Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Disciplina	:	Probabilidade I
Professor	:	Hubert Lacoin
Monitor	:	Lucas Schwengber
Data	:	13/04/2023
Data entrega	:	21/04/2023

Lista #3:

Você deve enviar as soluções dos exercícios com [★] e mais dois (e somente dois) outros exercícios quaisquer de sua escolha para o e-mail: `lucas.schwengber@impa.br` até o dia 21/04/2023 às 23:59 (horário de Brasília).

1 Independência

Exercício 1. Seja $\Omega = \{1,2,3,4\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{4},\ i \in \Omega$. Encontre duas coleções de eventos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ que sejam independentes, mas cujas σ-álgebras geradas não sejam independentes.

Exercício 2 (★). Dado $k \in \mathbb{N}$, construa um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que para $\{j_1, \ldots, j_l\} \subset [k]$ com $l < k$,

$$\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_l}) = \mathbb{P}(A_{j_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{j_l}),$$

mas

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \neq \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_k).$$

Exercício 3. Seja $X = (X_1, \ldots, X_d)$ um vetor gaussiano. Mostre que $X_1, \ldots, X_d$ são independentes se e somente se $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0,\ \forall\ i \neq j$.

Exercício 4 (★). Mostre que:

1. Para toda $\mathbb{P}_X$ medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mathbb{P}_X(A) \in \{0,1\}$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se e somente se $\mathbb{P}_X = \delta_a$ para algum $a \in \mathbb{R}$.
2. Se uma variável aleatória X é independente de si mesma então $X = c$ q.c. para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.
3. Mostre que se $X = c$ q.c. então X é independente de qualquer outra variável aleatória.
4. Sejam X e Y independentes. Dê uma condição necessária e suficiente para que $\mathbb{P}(X = Y) > 0$.
5. Se X e Y são variáveis aleatórias reais independentes tais que $X + Y = c$ q.c. para $c \in \mathbb{R}$ então $X = c_1$ e $Y = c_2$ q.c. com $c = c_1 + c_2$.
6. Se X e Y são variáveis aleatórias reais independentes e sem átomos (*i.e.* suas funções de distribuição acumuladas são contínuas) então $X + Y$ também não tem átomos.

Exercício 5. Um grupo de n alunos do IMPA estão jogando *Set*®. Fixado um conjunto de cartas, seja X_i o tempo que o jogador $i \in [n]$ demora para encontrar um Set. Suponha que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, $i \in [n]$ e que são independentes.

(a) Encontre a distribuição de $\min\{X_1, \dots, X_n\}$, o tempo para o primeiro Set ser encontrado por algum jogador.

(b) Mostre que a probabilidade do primeiro Set ser encontrado pelo jogador j é dada por:

$$\mathbb{P}\left(X_j = \min\{X_1, \dots, X_n\}\right) = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}. \tag{1}$$

Exercício 6. Sejam U e V variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$. Mostre que $\frac{U}{U+V}$ e $U + V$ são independentes e encontre a lei de ambas.

2 Lema de Borel-Cantelli

Exercício 7. Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma coleção de eventos tais que:

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(A_n\right) = +\infty.$$

(a) Mostre que se:

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k\right)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j \cap A_k\right)} = \alpha \geq 0, \; \alpha \in (0, 1],$$

então $\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) \geq \alpha$.

(b) Como isso se relaciona com a segunda parte do Lema de Borel-Cantelli?

Exercício 8 (★). Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias reais i.i.d. não-negativas. Mostre que:

(a) Se $\mathbb{E}\left[X_1\right] < +\infty$ então,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{n} = 0 \text{ q.c.}$$

(b) Se $\mathbb{E}\left[X_1\right] = +\infty$ então,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{n} = +\infty \text{ q.c.}$$

Exercício 9. Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro 1.

(a) Prove que:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{\log(n)} = 1, \text{ q.c.}$$

(b) Seja $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Verifique que:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log(n)} \geq 1, \quad \text{q.c.}$$

(c) Verifique que para uma subsequência adequada, $n_k \uparrow +\infty$, temos:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{M_{n_k}}{\log(n_k)} \leq 1, \ \text{q.c.}$$

(d) Mostre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log(n)} = 1, \ \text{q.c..}$$

Exercício 10. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias reais independentes. Mostre que $\sup_n X_n < +\infty$ q.c. se e somente se existe algum A tal que:

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n > A\right) < +\infty$$

3 Somas de variáveis independentes

Exercício 11 (★). Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias reais com $\mathbb{E}\left[X_n\right] = 0, \ n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{E}\left[X_n X_m\right] \leq R(|n-m|)$ onde $R(k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Mostre que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{L^2} 0$.

Exercício 12. Dê uma prova alternativa da Proposição 9.14 (do *Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes, J.-F. Le Gall (2022)*) utilizando o Lema de Borel-Cantelli.

Exercício 13. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias. Suponha que existe uma constante C tal que $\mathbb{E}\left[X_n^2\right] \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $\text{Cov}(X_n, X_m) = 0, \ m \neq n$. Mostre que:

(a)

$$\frac{S_{n^2} - \mathbb{E}\left[S_{n^2}\right]}{n^2} \to 0 \text{ q.c.}$$

(b)

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\left[S_n\right]}{n} \to 0 \text{ q.c.}$$

Exercício 14. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com $\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = -1\right) = \frac{1}{2}$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Esta é outra maneira de construir o passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$. Vamos mostrar agora que a probabilidade dele não ter retornado até a origem até o instante $2n$ é igual à probabilidade dele estar na origem no tempo $2n$.

(a) Mostre que $\tau_0^+ = \min\{k > 1; S_k = 0\}$, com $\min(\emptyset) = +\infty$, define uma variável aleatória (estendida) mensurável em relação a $\sigma\left(X_i, \ i \in \mathbb{N}\right)$.

(b) Dado $k \in \mathbb{N}$, mostre que:

(i) $\mathbb{P}\left(S_1 = 1,\ \tau_0^+ \leq 2n,\ S_{2n} = 2k\right) = \mathbb{P}\left(S_{2n-1} = -2k-1, S_{2n} = -2k\right)$.

(ii) $\mathbb{P}\left(S_1 = 1, S_{2n} = 2k\right) = \mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k-1, S_{2n} = 2k-2)$.

(iii) $\mathbb{P}\left(S_1 = +1, \tau_0^+ > 2n\right) = \mathbb{P}\big(S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0\big)$.

(iv) $\mathbb{P}\left(\tau_0^+ > 2n\right) = \mathbb{P}\big(S_{2n} = 0\big)$.

(v) $\mathbb{P}\left(\tau_0^+ > 2n\right) \in \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, *i.e.* $\exists C, D > 0$ tais que $C\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mathbb{P}\left(\tau_0^+ > 2n\right) \leq D\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(vi) $\mathbb{E}\left[\tau_0^+\right] = +\infty$.