Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Disciplina	:	Probabilidade I
Professor	:	Hubert Lacoin
Monitor	:	Lucas Schwengber
Data	:	31/03/2023
Data entrega	:	14/04/2023

Lista #2:

Você deve enviar as soluções dos exercícios com [★] para o e-mail: `lucas.schwengber@impa.br` até o dia 14/04/2023 às 23:59 (horário de Brasília).

Exercício 1 (★). 1. Seja $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função absolutamente contínua com $h'(x) \geq 0,\ x > 0$ e $h(0) = 0$. Dado X uma variável aleatória real não-negativa, prove que:

$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] = \int_0^\infty h'(t)\mathbb{P}\left(X \geq t\right) dt.$$

2. Faz diferença no item acima tomar $\mathbb{P}\left(X \geq t\right)$ ou $\mathbb{P}\left(X > t\right)$?

3. Mostre em particular que para X variável aleatória não-negativa e $p > 0$,

$$\mathbb{E}\left[X^p\right] = \int_0^\infty p x^{p-1}\mathbb{P}\left(X \geq x\right) dx.$$

4. Mais especificamente ainda, se X assume valores em $\mathbb{N}_0$,

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + 2\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}\left(X > n\right).$$

Exercício 2. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias reais uniformes independentes, *i.e.* com $\mathbb{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in B\right) = \lambda^n(B \cap [0,1]^n)$ para $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$, onde λ^n denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Seja

$$N = \min\{n \geq 1;\ X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 1\}$$

Mostre que:

(a)

$$\mathbb{E}\left[N\right] = e.$$

(b)

$$\mathbb{E}\left[N^2\right] = 3e.$$

Exercício 3 (★). Mostre que,

(a) Se $p > 0$ e $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, então $\mathbb{P}(|X| > x) = o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ (*i.e.* $\lim_{x\to+\infty} x^p \mathbb{P}(|X| > x) = 0$).

(b) Reciprocamente, se $\mathbb{P}(|X| > x) = o(\frac{1}{x^p})$ então $\mathbb{E}\left[|X|^{(p-\epsilon)}\right] < \infty$ para todo $\epsilon \in (0, p)$.

Exercício 4. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma coleção de variáveis aleatórias reais em $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ não correlacionadas *i.e.* $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]$ para $i \neq j$. Mostre que:

$$\operatorname{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \operatorname{var}(X_i)$$

Exercício 5 (★). Dado X variável aleatória com $\mathbb{E}\left[X^2\right] < +\infty$, mostre que:

(a) $\mathbb{P}(X \neq 0) \geq \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}$.

(b) $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq t) \leq \frac{\text{var(X)}}{\text{var}(X)+t^2}$ para todo $t > 0$.

(c) Se $X \geq 0$, então $\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}[X]) \geq (1-a)^2 \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}$, $\forall a \in (0,1)$.

(d) Se existem $a < b \in \mathbb{R}$ com $a \leq X \leq b$, então:

$$\operatorname{var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

(e) A cota do item (d) acima é ótima? *i.e.* existe alguma variável aleatória ou sequência de variáveis aleatórias que atingem esta cota?

Exercício 6 (★). Dado X uma variável aleatória, definimos a mediana de X, dizemos que $\operatorname{med}(X) \in \mathbb{R}$ é uma mediana de X se satisfaz: $\mathbb{P}(X \geq \operatorname{med}(X)) \geq \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(X \leq \operatorname{med}(X)) \geq \frac{1}{2}$.

1. Prove que qualquer variável aleatória real X possui uma mediana.

2. Supondo que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ prove que $a \in \mathbb{R}$ minimiza $\mathbb{E}[|X-a|]$ se e somente se a é uma mediana de X.

3. Supondo novamente que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$, prove que para qualquer mediana de X,

$$|\operatorname{med}(X) - \mathbb{E}[X]| \leq \sqrt{\operatorname{var}(X)}.$$

4. Seja f uma função convexa de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que para qualquer mediana de X,

$$f(\operatorname{med}(X)) \leq \operatorname{med}_+(f(X))$$

   onde med_+ é o supremo das medianas (que também é uma mediana).

Comentário. Neste exercício você pode usar sem provar qualquer propriedade de funções convexas que julgar necessário, desde que justifique porque as hipóteses se aplicam.

Exercício 7 (★). (a) Mostre que,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] < +\infty,\ \lambda \in (-r, r)$$

para algum $r > 0$ se e somente se:

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{\|X\|_p}{p} < +\infty.$$

(b) Prove que supondo qualquer uma das condições equivalentes do item acima,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda^p \mathbb{E}\left[X^p\right]}{p!},\ \lambda \in (-r, r).$$

(c) Conclua que nesta situação, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right]\Bigg|_{\lambda=0} = (-1)^p \mathbb{E}\left[X^p\right].$$

Comentário. É comum na literatura chamar $\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right]$ de função geradora de momentos de X. Este último item motiva este nome.

Exercício 8. Seja X um variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$.

(a) Mostre que:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Conclua portanto que para $p \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathbb{E}\left[X^{2p}\right] = \frac{(2p)!}{2^p p!}$$

e

$$\mathbb{E}\left[X^{2p+1}\right] = 0.$$

Exercício 9 (★). Sejam X e Y variáveis aleatórias reais e sejam $L_X(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right]$ e $L_Y(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y}\right]$.

(a) Suponha que existe $a > 0$ tal que:

$$L_X(\lambda) = L_Y(\lambda) < +\infty,\ \lambda \in [0, a].$$

(i) Mostre que $\Psi_X(z) = \mathbb{E}\left[e^{zX}\right]$ e $\Psi_Y(z) = \mathbb{E}\left[e^{zY}\right]$, são funções bem definidas de $U = \{-\lambda + i\mu;\ \ \lambda \in [0, a],\ \ \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$.

(ii) Mostre que ambas funções são holomorfas em $\mathrm{int}(U)$.

(iii) Conclua que $\Psi_X(z) = \Psi_Y(z)$ para todo $z \in \mathrm{int}(U)$.

(iv) Mostre que ambas funções são contínuas em $\{i\mu;\ \ \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.

(v) Conclua que X e Y possuem a mesma lei.

(b) Utilizando o item anterior, mostre que se $\limsup_{p\to\infty} \frac{\|X\|_p}{p} < +\infty$ e $\mathbb{E}[X^p] = \mathbb{E}[Y^p]$ para todo $p \in \mathbb{N}$, então X e Y têm a mesma lei.

(c) (i) Seja X uma variável aleatória real com distribuição $\mathcal{N}(0,1)$. Calcule os momentos de e^X.

(ii) Seja Z uma variável aleatória discreta com:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{e^{-\frac{k^2}{2}}}{\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{j^2}{2}}},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que os momentos de e^Z são iguais aos de e^X.

(iii) Porque isto não contradiz o item (b)?

Exercício 10. Seja X um vetor aleatório em $\mathbb{R}^d$ e $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$, $b \in \mathbb{R}^p$. Definimos a função característica de X como:

$$\Phi_X(\xi) = e^{i\xi\cdot X},\ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(a) Mostre que:

$$\Phi_{AX+b}(\xi) = e^{i\xi\cdot b}\Phi_X(A^T\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^p.$$

(b) Em particular, se $p = d = 1$, dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{aX+b}(\xi) = e^{i\xi b}\Phi_X(a\xi),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Exercício 11. Dado $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ crescente e convexa com $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$, prove que:

$$\|X\|_\psi := \inf\left\{a > 0;\ \mathbb{E}\left(\psi\left(\frac{|X|}{a}\right)\right) \leq 1\right\}$$

define uma norma no espaço de variáveis aleatórias reais para os quais $\mathbb{E}\left[\psi\left(\frac{|X|}{a}\right)\right] < +\infty$ para algum $a > 0$.