Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Disciplina	:	Probabilidade I
Professor	:	Hubert Lacoin
Monitor	:	Lucas Schwengber
Data	:	20/03/2023
Data entrega	:	01/04/2023

Lista #1:

Você deve enviar as soluções dos exercícios com [★] e mais dois (e somente dois) outros exercícios quaisquer de sua escolha para o e-mail: `lucas.schwengber@impa.br` até o dia 01/04/2023 às 23:59 (horário de Brasília).

Exercício 1 (★). Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\Omega', \mathcal{F}')$, dois espaços mensuráveis, Q uma medida de probabilidade em $(\Omega', \mathcal{F}')$ e $\{\mathbb{P}_\omega\}_{\omega\in\Omega'}$ uma família de medidas de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que para todo $A \in \mathcal{F}$ a aplicação $\omega \mapsto \mathbb{P}_\omega(A)$, de Ω' para $\mathbb{R}\geq 0$, é $\mathcal{F}'$-mensurável. Prove que $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ dada por:

$$\mathbb{P}(A) := \int_{\Omega'} \mathbb{P}_\omega(A) dQ(\omega),\ \ A \in \mathcal{F},$$

define uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exercício 2. Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, seja $A_1, \dots, A_n, \dots$ uma sequência de eventos em $\mathcal{F}$. Definimos:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Prove que:

$$\mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \triangle \left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)\right) = 0$$

se e somente se

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \triangle A_k\right) = 0 \text{ e } \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \triangle A_k\right) = 0$$

Exercício 3. Seja $\Omega = \{0, 1\}^n$ e considere $A_i = \{\omega \in \Omega;\ \omega(i) = 1\}$ para cada $i \in [n]$. Sejam P e P' duas medidas de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Prove que se $P(B) = P'(B)$ para todos os conjuntos B dados por interseções dos A_i, então $P = P'$.

Exercício 4. Fixado $n \in \mathbb{N}$,

(a) Descreva um espaço de probabilidade, $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$, adequado para modelar o experimento que consiste em sortear uniformemente uma permutação de $[n]$.

(b) Calcule p_n a probabilidade de sortear uma permutação que mantém ao menos um número fixo (*i.e.* $\sigma(i) = i$ para algum i) no espaço de probabilidade definido no item acima.

(c) Mostre que $p_n \to 1 - \frac{1}{e}$ quando $n \to \infty$.

Exercício 5 (★). Fixado $n \in \mathbb{N}$, $s = (s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ é dito um caminho simples de tamanho n se $s_0 = 0$ e $s_{k+1} - s_k \in \{-1, +1\}$ para $k = 0, \ldots, n-1$. Seja $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ o espaço de todos os caminhos simples de tamanho $2n$ com a medida uniforme, *i.e.* $\mathbb{P}(\{s\}) = 2^{-2n}$ para todo $s \in \Omega$. Prove que:

$$\mathbb{P}(\{s;\ \max\{s_0, \ldots, s_{2n}\} \geq 2k-1\} = 2\mathbb{P}(\{s;\ s_{2n} \geq 2k-1\}),\ k = 1, \ldots, n.$$

Exercício 6. Seja $\Omega = C([0,1])$ o espaço das funções contínuas em $[0,1]$ assumindo valores em $\mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B}(C)$ a σ-álgebra de Borel induzida pela topologia da norma $\|\cdot\|_\infty$ e seja $\mathcal{A} = \{X_t^{-1}(B),\ t \in [0,1],\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ a σ-álgebra gerada pelas projeções: $X_t(\omega) = \omega(t)$. Mostre que:

(a) $\mathcal{B}(C) = \mathcal{A}$.

(b) Considerando qualquer uma das σ-álgebras do item anterior mostre que os seguintes conjuntos são mensuráveis:

  (i) $\{\omega \in C([0,1]);\ \omega(t_0) \geq 0\}$ para algum $t_0 \in [0,1]$.
  (ii) $\{\omega \in C([0,1]);\ \omega(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$.
  (iii) $\{\omega \in C([0,1]);\ \int_0^1 \omega(t)dt \geq 0\}$.

Exercício 7. Se $\mathbb{E}(X_1^-) < +\infty$, então $X^n \uparrow X$ implica $\mathbb{E}(X_n) \uparrow E(X)$.

Exercício 8 (★). Suponha que $X \geq 0$ é uma variável aleatória real. Sem assumir que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) < \infty$, prove que:

(a) $\lim_{y \to +\infty} y\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\mathbf{1}_{X>y}\right) = 0$.

(b) $\lim_{y \to 0^+} y\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\mathbf{1}_{X>y}\right) = 0$.

Exercício 9. Dado X uma variável aleatória real, seja $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ a função de distribuição cumulativa definida por: $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$. Prove que:

(a) F é não-decrescente.

(b) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

(c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(d) F é contínua à direita.

(e) F é descontínua em x_0 se e somente se $\mathbb{P}(X = x_0) > 0$.

(f) $F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq y\}$ é não-decrescente e contínua à esquerda.

Exercício 10 (★). Prove que se X é uma variável aleatória real com função de distribuição cumulativa F_X contínua, então $F_X(X)$ têm distribuição uniforme. Indique qual é a distribuição de $F_X(X)$ quando X é uma variável aleatória real discreta.

Exercício 11. Seja X uma variável aleatória real com função de distribuição cumulativa F e $F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq y\}$, como definida anteriormente. Prove que $F^{-1}(F(X)) = X$ $\mathbb{P}$-q.c.

Exercício 12. Seja $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ uma variável aleatória Gaussiana padrão. Prove que a densidade de $\frac{1}{N^2}$ é dada por:

$$f_{N^2}(y) = \mathbf{1}_{y \geq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{3}{2}}.$$

Exercício 13. Seja $(X_1, \ldots, X_d)$ um vetor aleatório em $\mathbb{R}^d$. Prove que:

(a) É possível definir unicamente um vetor aleatório $(Y_1, \ldots, Y_d)$ tal que, para todo $\omega \in \Omega$, $Y_1(\omega) \leq \cdots \leq Y_d(\omega)$ e para todo $x \in \mathbb{R}$, $\#\{i \in [d];\ Y_i(\omega) = x\} = \#\{i \in [d];\ X_i(\omega) = x\}$.

(b) Suponha que $(X_1, \ldots, X_n)$ tem densidade $p(x_1, \ldots, x_d) = \mathbf{1}_{[0,1]^d}$. Prove que $(Y_1, \ldots, Y_d)$ tem densidade dada por:

$$q(y_1, \ldots, y_d) = d!\mathbf{1}_{0 < y_1 < \cdots < y_d < 1}.$$

(c) Suponha o caso particular do item acima quando $d = 3$. Encontre a densidade do vetor $\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \frac{Y_2}{Y_3}\right)$.