

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Tese de Doutorado

**FOLHEAÇÕES, SEPARATRIZES E CURVAS INVARIANTES
EM SUPERFÍCIES**

Edileno de Almeida Santos



**Rio de Janeiro
26 de Março de 2017**



Instituto Nacional de Matemática Pura e
Aplicada

Edileno de Almeida Santos

**FOLHEAÇÕES, SEPARATRIZES E CURVAS INVARIANTES
EM SUPERFÍCIES**

Tese apresentada ao Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada como requisito parcial para a obtenção
do título de doutor em Matemática.

Orientador: Jorge Vitório Pereira

Rio de Janeiro
2017

Abstract

In this thesis we discuss two different topics. First, from the analysis of the triviality of the logarithmic conormal bundle over invariant curves, we give a new proof of the Separatrix Theorem and some extensions of this important result. Secondly, inspired by Brunella's work on minimal models for foliations, in particular by his *very special foliation*, we study when an invariant rational nodal curve of positive self-intersection determines the foliation, and we show, under some natural hypothesis, the three possible foliations.

Keywords: Holomorphic Foliations, Separatrices, Invariant Curves.

Resumo

Nesta tese discutimos dois diferentes temas. Primeiro, a partir do estudo da trivialidade do fibrado conormal logarítmico restrito a curvas invariantes, somos levados a uma nova prova do Teorema da Separatriz e fazemos algumas pequenas extensões desse importante resultado. Em segundo, inspirados pelo trabalho de Brunella sobre modelos minimais de folheações, em particular pela sua *folheação muito especial*, investigamos quando uma curva racional nodal invariante determina a folheação, mostrando, sob certas hipóteses naturais, as três folheações possíveis.

Palavras-chave: Folheações Holomorfas, Separatrizes, Curvas Invariantes.

Sumário

Abstract	v
Resumo	vii
1 Introdução	1
1.1 Estudo Local	1
1.2 Estudo Global	5
2 Preliminares	11
2.1 Folheações Holomorfas em Superfícies	11
2.1.1 Redução de Singularidades	14
2.1.2 Índices para Curvas Invariantes	15
2.2 Teorema do Índice de Hodge	17
2.2.1 Grupo de Néron-Severi	17
2.2.2 O Teorema do Índice de Hodge	18
2.3 Superfícies Regradas	19
2.3.1 Superfícies de Hirzebruch	20
2.3.2 Existência de Fibração	21
3 Resíduos	23
3.1 Conceitos Básicos	23
3.2 Representação Residual	28
3.3 Grupo de Picard de Curvas	30
3.4 Divisor Residual	33

4	Existência de Separtriz	35
4.1	Representação Residual Trivial e Separtrizes	35
4.2	O Teorema da Separtriz	37
4.3	Representação Residual Torção e Separtrizes	41
4.4	Folheações com Feixe Normal \mathbb{Q} -Gorenstein	43
5	Folheações Especiais	47
5.1	Logaritimidade	47
5.2	Três Folheações Muito Especiais	50
5.2.1	A Folheação Muito Especial de Brunella	51
5.2.2	Segunda Folheação Muito Especial	52
5.2.3	Terceira Folheação Muito Especial	53
5.3	Folheações de Riccati	54
6	Rigidez das Folheações Muito Especiais	65
6.1	Ciclos Invariantes	65
6.2	Proposições e Lemas Básicos	68
6.3	Prova do Teorema 5.2.3 (Teorema 3)	73
6.3.1	Cálculos Preliminares	73
6.3.2	Auto-interseção 1	74
6.3.3	Auto-interseção 2	75
6.3.4	Auto-interseção 3	75
6.3.5	Auto-interseção 4	75
6.3.6	Auto-interseção >4	75
6.4	Construção de Curvas Racionais Nodais	76

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste trabalho, estamos interessados em aspectos locais e globais da teoria de folheações holomorfas em superfícies complexas.

1.1 Estudo Local

Dentro desse contexto, cuja origem remonta a trabalhos de H. Poincaré, uma das primeiras questões da teoria foi quanto à existência de curva invariante (*separatriz*) passando por singularidade isolada de um campo de vetores holomorfo em $(\mathbb{C}^2, 0)$, problema já apresentado em 1854 por C. Briot e J. Bouquet. A solução definitiva veio muitos anos depois, em 1982, quando C. Camacho e P. Sad provaram em [7] o seguinte

Teorema (da Separatriz). *Seja v um campo de vetores holomorfo definido em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ com singularidade isolada na origem. Então existe curva invariante por v passando por $0 \in \mathbb{C}^2$.*

Posteriormente, em 1988, C. Camacho publicou em [5] uma extensão desse resultado para folheações definidas em superfícies singulares:

Teorema. *Seja X uma superfície complexa normal irredutível. Suponhamos que o grafo dual da resolução da singularidade $p \in X$ seja uma árvore. Então todo germe de folheação holomorfa, singular em p , admite uma curva invariante passando por p .*

Uma prova bastante elegante foi apresentada por M. Sebastiani em [29] (veja também descrição de M. Brunella em [2]). No caso do Teorema da Separatriz para superfícies não singulares, outras demonstrações foram realizadas por M. Toma em [32] e J. Cano em [9]. Nosso primeiro objetivo nesta tese será apresentar uma prova alternativa do Teorema da Separatriz para superfícies singulares. Acreditamos que nossa demonstração seja direta e transparente, além de permitir extensões do teorema a superfícies singulares onde o grafo dual da resolução da singularidade da superfície não é uma árvore.

Se X é uma superfície com apenas singularidades normais, uma *folheação holomorfa* em X é simplesmente uma folheação holomorfa em $X - \text{Sing}(X)$. Os feixes *tangente* $T_{\mathcal{F}}$ e *normal* $N_{\mathcal{F}}$ são definidos tomando as imagens diretas via a inclusão $X - \text{Sing}(X) \rightarrow X$ dos feixes tangente e normal da folheação subjacente em $X - \text{Sing}(X)$.

Em [5], C. Camacho fornece um exemplo para não existência de separatriz em dimensão dois. Seja $\pi : Y \rightarrow X$ uma resolução da singularidade normal $p \in X$, onde $\pi^{-1}(p) = E = E_1 + E_2 + E_3$ é curva a cruzamentos normais simples e cada E_j é suave de auto-interseção $E_j^2 < 0$. O argumento consiste em construir folheação reduzida sem sela-nó em vizinhança da curva (invariante) E tal que $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap E = \text{Sing}(E)$. O grafo dual Γ de E é um ciclo, conforme abaixo ilustrado:

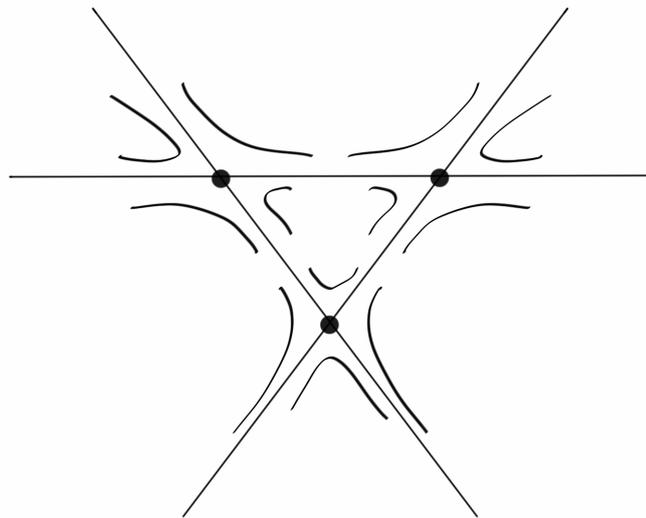
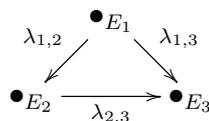


Figura 1.1: Ciclo de três curvas invariante.



onde $\lambda_{ij} = CS(\mathcal{F}, C_i, p_{ij})$, $\{p_{ij}\} = E_i \cap E_j$. Assim

$$\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} = E_1^2;$$

$$\frac{1}{\lambda_{1,2}} + \lambda_{2,3} = E_2^2;$$

$$\frac{1}{\lambda_{2,3}} + \frac{1}{\lambda_{1,3}} = E_3^2.$$

As condições acima são suficientes para construir uma folheação em vizinhança da curva E como desejado (ver prova apresentada por Lins-Neto do teorema principal em [19]). Se os λ_{ij} não forem racionais positivos, a folheação será reduzida. Deste modo, ao contrair a curva E num ponto p , obtém-se uma folheação em superfície singular sem separatriz passando pela singularidade p .

Surge então a questão:

Quais condições podemos exigir da folheação para que exista separatriz mesmo quando o grafo dual da resolução do ponto singular da superfície não é uma árvore?

Os capítulos 3 e 4 desenvolvem respostas ao questionamento acima. Primeiro, no Capítulo 3 investigamos relações entre folheações e suas curvas invariantes por meio do fibrado conormal logarítmico, em particular analisamos a situação em que tal fibrado restrito à curva é trivial, o que nos leva às noções de *resíduos* e *representação residual* (Teoremas 5.1.2 e 5.1.3). A partir de tais ideias, no Capítulo 4 apresentamos uma nova demonstração do Teorema da Separatriz e fazemos algumas extensões desse resultado com hipóteses envolvendo o grafo dual da resolução da singularidade da superfície ou o feixe normal da folheação (Teoremas 4.1.1, 4.3.3, 4.4.1 e 4.4.5). Desses resultados, destacamos o principal:

Teorema 1 (Teorema 4.4.1). *Seja \mathcal{F} uma folheação na superfície singular normal X . Seja $f : Y \rightarrow X$ aplicação bimeromorfa que resolve a singularidade $p \in X$ e tal que a folheação induzida $\mathcal{G} = f^*\mathcal{F}$ possui apenas singularidades reduzidas em $E = f^{-1}(p)$. Se \mathcal{G} não possui sela-nó em E e o feixe normal de \mathcal{F} é \mathbb{Q} -Gorenstein, então \mathcal{F} possui separatriz passando por p .*

No teorema acima, um feixe \mathcal{S} numa superfície singular é dito \mathbb{Q} -Gorenstein se existe um inteiro positivo $k > 0$ tal que a k -ésima potência $\mathcal{S}^{\otimes k}$ é localmente trivial (mesmo nas singularidades).

A demonstração do teorema consiste em mostrar que a representação residual é torção de ordem k (a representação é do grupo fundamental de Γ em \mathbb{C}^* , onde Γ é o grafo dual do divisor excepcional $E = \sum_{i=1}^n E_i$ de f). Essa representação corresponde à obstrução para que possamos associar a cada componente irredutível E_i de E um número complexo μ_i (chamado um *resíduo* ao longo de E_i) de modo que o índice de Camacho-Sad num ponto de cruzamento p_{ij} de duas componentes E_i e E_j ao longo de uma delas seja igual a menos o quociente dos números μ_i e μ_j (mais precisamente, $CS(\mathcal{F}, C_j, p_{ij}) = -\frac{\mu_i}{\mu_j}$). Ocorrendo que a representação é trivial, isto é, $k = 1$, o número de separatrizes por pontos de $Sing(\mathcal{G}) \cap (E - Sing(E))$ não suportadas em E será maior do que ou igual à dimensão do \mathbb{Q} -espaço vetorial gerado pelas combinações \mathbb{Q} -lineares dos *resíduos* μ_1, \dots, μ_n (associados às componentes E_1, \dots, E_n) e $\delta_1, \dots, \delta_m$ (resíduos associados às separatrizes não suportadas em E que intersectam E), conforme Teorema 4.1.1. Sendo tal dimensão maior do que ou igual a 1, concluímos que existe separatriz por ponto de E , mas não suportada em E , a qual se projeta por f em separatriz passando pela singularidade p . Se a representação não é trivial, mas é torção de ordem k , o *truque do recobrimento* nos permite levantar a folheação \mathcal{G} de modo que a representação residual correspondente será trivial, donde se conclui também a existência de separatriz (Teorema 4.3.3).

De um modo geral, sendo $C = \sum_{i=1}^n C_i$ curva compacta invariante por uma folheação reduzida \mathcal{F} tal que $Sing(C)$ são singularidades reduzidas não degeneradas, onde cada C_i é uma componente irredutível de C , indicamos por $Sep(\mathcal{F}, C) = S_1 + \dots + S_m$ as separatrizes (germes) não suportadas em C passando por pontos de $Sing(\mathcal{F}) \cap (C - Sing(C))$ que são singularidades não degeneradas. Seja $D = C + Sep(\mathcal{F}, C)$ e $\rho = \rho_{(\mathcal{F}, D)} : \pi_1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^*$ a representação residual de \mathcal{F} ao longo de D . Então vale o

Teorema 2 (Teorema 4.1.1). *Suponhamos que \mathcal{F} não possui separatriz fraca suportada em C e que a representação $\rho = \rho_{(\mathcal{F}, D)}$ seja trivial, com resíduos μ_1, \dots, μ_n ao longo de C e $\delta_1, \dots, \delta_m$ ao longo de $Sep(\mathcal{F}, C)$, isto é, com divisor residual*

$$R = Res(\mathcal{F}, D) = \sum_{i=1}^n \mu_i C_i + \sum_{k=1}^m \delta_k S_k.$$

Se a matriz de interseção $[C_i \cdot C_j]_{ij}$ de C é invertível, então

$$\#Sep(\mathcal{F}, C) = m \geq \dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \mathbb{Q} + \sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{Q}\right) \geq 1$$

Vamos explicar melhor as ideias envolvidas. Seja $C = \sum_{i=1}^n C_i$ curva qualquer invariante por uma folheação reduzida \mathcal{F} tal que $Sing(C)$ são singularidades reduzidas não degeneradas, onde cada C_i é uma componente irredutível de C . A representação residual $\rho_{(\mathcal{F}, C)} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ pode ser assim obtida: dado um caminho contínuo fechado em Γ , partindo do vértice C_1 digamos, associamos arbitrariamente um número complexo não nulo μ_1 a C_1 e cada vez que o caminho passa por um vértice C_k de Γ associamos um número $\mu_k \in \mathbb{C}^*$ de maneira que se o caminho sai de um vértice C_i para outro vértice C_j percorrendo a aresta p_{ij} que os liga, então o quociente dos números associados deve ser igual a menos o quociente dos autovalores de um campo gerador da folheação (mais precisamente, $\frac{\mu_i}{\mu_j} = -CS(\mathcal{F}, C_j, p_{ij})$), mas quando o caminho volta ao vértice inicial C_1 pode ocorrer de o número inicialmente associado a C_1 ter sido alterado por um fator $\alpha \in \mathbb{C}^*$, o qual será, por definição, a imagem em \mathbb{C}^* da classe do caminho em $\pi_1(\Gamma, C_1)$. Se C é compacta e ocorrer $Sing(\mathcal{F}) \cap C = Sing(C)$, então o fibrado conormal logarítmico restrito à curva $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C$ é determinado pela representação residual (Proposição 3.3.2), em particular $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$ se, e somente se, $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é trivial. Esta é a ligação entre a representação residual e o fibrado normal da folheação.

1.2 Estudo Global

Mais recentemente, em [2] e [3], M. Brunella introduziu o conceito de *modelo minimal* para folheações holomorfas em superfícies (uma versão *folheada* dos modelos minimais de Zariski para superfícies algébricas). Partindo-se de uma noção preliminar de *modelo relativamente minimal*, defini-se como *modelo minimal* um modelo relativamente minimal que é único a menos de transformações bimeromorfas. Nesse contexto, o seguinte resultado é muito importante:

Definição 1.2.1 (*Curvas Excepcionais de primeiro tipo*). Estas são curvas racionais não singulares com auto-interseção -1 . Frequentemente chamamos tais curvas (-1) -*curvas*. Uma propriedade muito útil das (-1) -curvas é dada pelo

Teorema 1.2.2 ([1], página 97). *Seja Y uma superfície não singular, $E \subset Y$ uma (-1) -curva e $\pi : Y \rightarrow X$ a aplicação contraindo E . Então $p = \pi(E)$ é não singular em X .*

A ideia de obter folheações minimais consiste em contrair o máximo possível de (-1) -curvas invariantes por uma folheação reduzida de modo que a folheação resultante ainda permaneça reduzida.

É demonstrado em [2] que a noção de minimalidade apresentada esquematicamente acima é equivalente à seguinte:

Definição 1.2.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação reduzida numa superfície compacta X . Dizemos que a folheação \mathcal{F} é *minimal* se, para toda folheação reduzida \mathcal{G} em superfície compacta Y , uma aplicação bimeromorfa $\phi : Y \dashrightarrow X$ que leva \mathcal{G} em \mathcal{F} é de fato um morfismo.*

No entanto, nem toda folheação admitirá um modelo minimal. Tais exceções estão precisamente descritas no teorema de Brunella abaixo ([2]):

Teorema. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa numa superfície complexa compacta X sem modelo minimal. Então \mathcal{F} é bimeromorficamente equivalente a uma folheação na lista abaixo:*

1. *fibrção racional;*
2. *folheação de Riccati não trivial;*
3. *a folheação muito especial descrita na página 58 de [2].*

As folheações apresentadas nos itens (1) e (2) no enunciado do teorema anterior formam uma numerosidade de classes bimeromorfas de folheações sem modelo minimal. A folheação dita *especial* do item (3) é realmente especial, pois ela apresenta uma caracterização em termos de uma de suas curvas algébricas invariantes, a saber vale o seguinte teorema de Brunella ([2]):

Teorema. *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa compacta X e seja $C \subset X$ uma curva racional nodal com um único nó $p \in C$, invariante por \mathcal{F} e com $C^2 = C \cdot C = 3$. Suponha que p é uma singularidade reduzida não degenerada de \mathcal{F} e que é a única singularidade de \mathcal{F} em C . Então \mathcal{F} é única a menos de transformações birracionais.*

A folheação birracionalmente única dada pelo teorema acima será chamada *folheação muito especial de Brunella* (veja subseção 5.2.1 para definição precisa).

Surge então a questão:

O que acontece se mantivermos as hipóteses do teorema acima a menos de trocar $C^2 = C \cdot C = 3$ por $C^2 = C \cdot C = n > 0$?

Relembremos o seguinte teorema de Kodaira:

Teorema 1.2.4 (Theorem 6.2, Chapter IV, [1], página 160). *Uma superfície compacta X é projetiva se, e somente se, existe em X um fibrado linear L tal que $L^2 > 0$.*

Sendo $C^2 > 0$, fica justificado o uso que fazemos do termo *birracional* em lugar de *bimeromorfo*. A fim de facilitar o discurso, faremos uma definição.

Definição 1.2.5. Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa X . Um *link* para \mathcal{F} é uma curva racional nodal $C \subset X$ com apenas um nó $p \in C$ tal que:

1. C é *positiva*, isto é, $C^2 = n > 0$;
2. C é \mathcal{F} -invariante;
3. p é uma singularidade reduzida não degenerada de \mathcal{F} e é a única singularidade de \mathcal{F} em C .

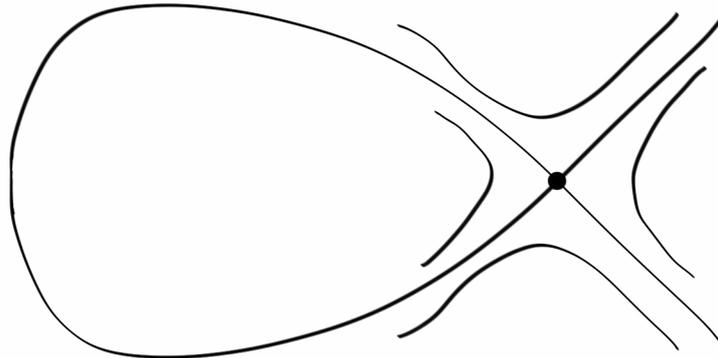


Figura 1.2: Link.

No Capítulo 5, inspirados pelo trabalho de Brunella sobre modelos mínimos de folheações, estudamos folheações reduzidas com curva racional nodal

invariante. Então desenvolvemos alguns resultados úteis sobre folheações de Riccati (Proposição 5.3.11).

No Capítulo 6 demonstramos o Teorema 5.2.3, o qual classifica as folheações reduzidas em superfícies complexas compactas que admitem curva racional nodal invariante de auto-interseção positiva com singularidade reduzida não degenerada (um *link* conforme Definição 1.2.5).

Teorema 3 (Teorema 5.2.3). *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície compacta complexa X e seja $C \subset X$ um link para \mathcal{F} . Então temos apenas três possibilidades, cada uma única a menos de transformações birracionais:*

1. $C^2 = 1$ e \mathcal{F} é birracional a uma folheação \mathcal{E}_1 em $Bl_3(\mathbb{P}^2)/\alpha$, onde $\alpha \in Aut(Bl_3(\mathbb{P}^2))$ e $Bl_3(\mathbb{P}^2)$ é um blow-up de \mathbb{P}^2 em três pontos não colineares;
2. $C^2 = 2$ e \mathcal{F} é birracional a uma folheação \mathcal{E}_2 em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1/\beta$, $\beta \in Aut(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$;
3. $C^2 = 3$ e \mathcal{F} é birracional a uma folheação \mathcal{E}_3 em \mathbb{P}^2/γ (folheação muito especial de Brunella), $\gamma \in Aut(\mathbb{P}^2)$.

Nos casos de auto-interseção $C^2 = 1, 2$ e 3 , a demonstração desse teorema consiste em adaptar a prova do teorema de Brunella. O caso $C^2 = 4$ se exclui

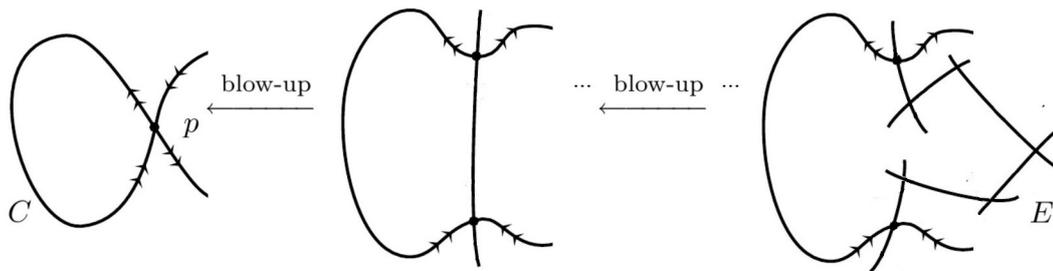


Figura 1.3: $C^2 = 3$ blow-ups.

diretamente pela hipótese da folheação ser reduzida no link. Supondo que exista folheação com link de auto-interseção $C^2 > 4$, após alguns blow-ups partindo do ponto de nó $p \in C$, o transformado estriço de C terá auto-interseção nula. E assim a folheação resultante será uma folheação de Riccati, um absurdo em face do resultado que demonstraremos para folheações de Riccati:

Teorema 4 (Proposição 5.3.11). *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa compacta X . Seja $C = C_1 + \dots + C_n$ uma curva conexa invariante, onde cada C_i é uma curva suave. Suponhamos que $C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ são singularidades reduzidas não degeneradas e $\#C_i \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) > 1$, $i = 1, \dots, n$. Se \mathcal{F} é Riccati com respeito a uma fibração racional $\pi : X \rightarrow B$, então toda fibra de π por um ponto de $C \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$ está completamente suportada em C .*

Nossas demonstrações originais dos teoremas 3 e 4 encontram-se em [28].

2.1 Folheações Holomorfas em Superfícies

Uma *folheação holomorfa (singular)* numa superfície complexa (suave) X é dada por uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X e 1-formas holomorfas ω_i com singularidades isoladas em U_i tais que

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow \omega_i = g_{ij} \omega_j$$

onde $g_{ij} \in \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^*$. O cociclo $\{g_{ij}\}$ define um fibrado linear holomorfo $N_{\mathcal{F}}$, chamado o *fibrado normal* de \mathcal{F} .

Alternativamente, podemos definir uma *folheação holomorfa* por meio de uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ e campos vetoriais holomorfas v_i com singularidades isoladas em U_i tais que

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow v_i = f_{ij} v_j$$

onde $f_{ij} \in \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^*$. O cociclo $\{f_{ij}^{-1}\}$ define um fibrado linear holomorfo $T_{\mathcal{F}}$, chamado o *fibrado tangente* de \mathcal{F} .

O *conjunto singular* de \mathcal{F} , indicado por $Sing(\mathcal{F})$, é o subconjunto discreto de X definido por

$$Sing(\mathcal{F}) \cap U_i = \{p \in U_i; v_i(p) = 0\}$$

para todo índice i .

Assim, \mathcal{F} é uma folheação holomorfa *regular* em $X - \text{Sing}(\mathcal{F})$ e podemos aplicar todo o estudo da teoria de folheações regulares (folhas, holonomia, ...) em \mathcal{F} , considerando sua restrição ao complementar de seu conjunto singular.

Seja $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ e v um campo vetorial holomorfo que define a folheação em vizinhança da *singularidade* p . Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear $(Dv)(p)$ de v em p .

Definição 2.1.1. A singularidade p é chamada *singularidade reduzida* se

1. $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$;
2. se $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, então λ_1/λ_2 não é um número racional positivo.

Uma singularidade reduzida p é dita *não degenerada* se ambos os autovalores λ_1 e λ_2 forem não nulos. Caso contrário, p é chamada *sela-nó*.

Neste texto, grosso modo, tratamos da seguinte situação geral: $C \subset X$ é uma curva invariante pela folheação \mathcal{F} . Se a singularidade p pertence à curva C , dizemos que C é uma *separatriz* de \mathcal{F} passando por p .

Vamos fazer a seguir um breve apanhado dos resultados sobre separatrizes de singularidades reduzidas que necessitaremos nos próximos capítulos. Referências gerais são [8] e [22]. No que se segue, λ é o quociente de autovalores ou $\lambda = 0$.

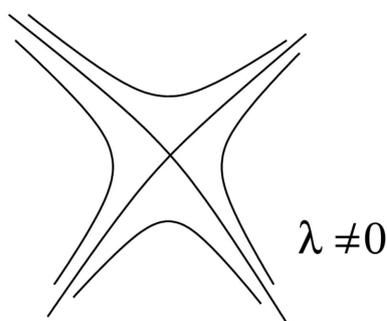


Figura 2.1: Duas separatrizes passando pela singularidade p .

1) $\lambda \in \mathbb{C} - (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ ("domínio de Poincaré")

Pelo clássico Teorema de Linearização de Poincaré, a folheação é linearizável em vizinhança de p : em coordenadas convenientes (x, y) com centro em p , a folheação é gerada pela 1-forma $x dy - \lambda y dx$. Existem exatamente duas separatrizes: $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$. A holonomia de cada separatriz é conjugada, a menos de inversão, ao germe de difeomorfismo $\exp(2\pi i \lambda^{\pm 1})$, onde o expoente de λ depende da separatriz escolhida.

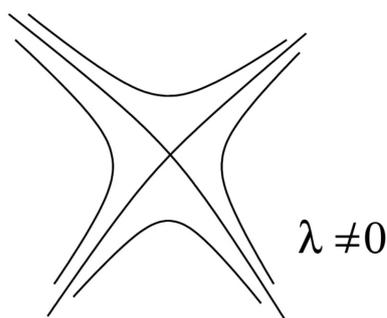


Figura 2.2: Duas separatrizes passando pela singularidade p .

2) $\lambda \in \mathbb{R}_-$ ("domínio de Siegel")

Embora neste caso a linearização nem sempre seja possível, como antes ainda temos exatamente duas separatrizes passando por p , dadas por $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ em coordenadas convenientes (x, y) .



Figura 2.3: Uma ou duas separatrizes passando pela singularidade p .

3) $\lambda = 0$ (sela-nó)

Pelo Forma Normal de Dulac, em coordenadas convenientes, a folheação \mathcal{F} é dada pela 1-forma

$$(x(1 + ay^k) + yf(x, y))dy - y^{k+1}dx$$

onde $k \in \mathbb{N}_+$, $a \in \mathbb{C}$ e f é uma função holomorfa que se anula em $p = (0, 0)$ até ordem k . A curva $\{y = 0\}$ é uma separatriz, chamada *separatriz forte*. Algumas vezes, por exemplo se $f \equiv 0$, existe uma segunda (no máximo!) separatriz passando por p , suave e transversal à primeira, chamada *separatriz fraca*.

2.1.1 Redução de Singularidades

Vamos considerar uma folheação \mathcal{F} numa superfície U , gerada por um campo vetorial v ou uma 1-forma ω com singularidades isoladas. Seja $p \in U$ uma singularidade de \mathcal{F} e $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ o blow-up em p . Localmente podemos "limpar" o anulamento de $\pi^*(\omega)$ ao longo do divisor excepcional $\pi^{-1}(p)$, de modo a obter 1-formas com singularidades isoladas. Obtemos assim uma folheação $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$ em \tilde{U} tal que $\tilde{\mathcal{F}}|_{\tilde{U}-\pi^{-1}(p)}$ é equivalente a $\mathcal{F}|_{U-\{p\}}$.

Teorema 2.1.2 (de Seidenberg, [2], página 13). *Dado um ponto singular $p \in U$ de uma folheação \mathcal{F} em U , existe uma sequência de blow-ups $\sigma : \bar{U} \rightarrow U$ sobre p tal que a folheação $\bar{\mathcal{F}} = \sigma^*(\mathcal{F})$ tem apenas singularidades reduzidas sobre $\sigma^{-1}(p)$.*

O processo dado pelo teorema anterior será chamado *redução da singularidade p* .

Definição 2.1.3. Uma singularidade p de uma folheação \mathcal{F} é chamada *dicrítica* se existem infinitas separatrizes passando por p .

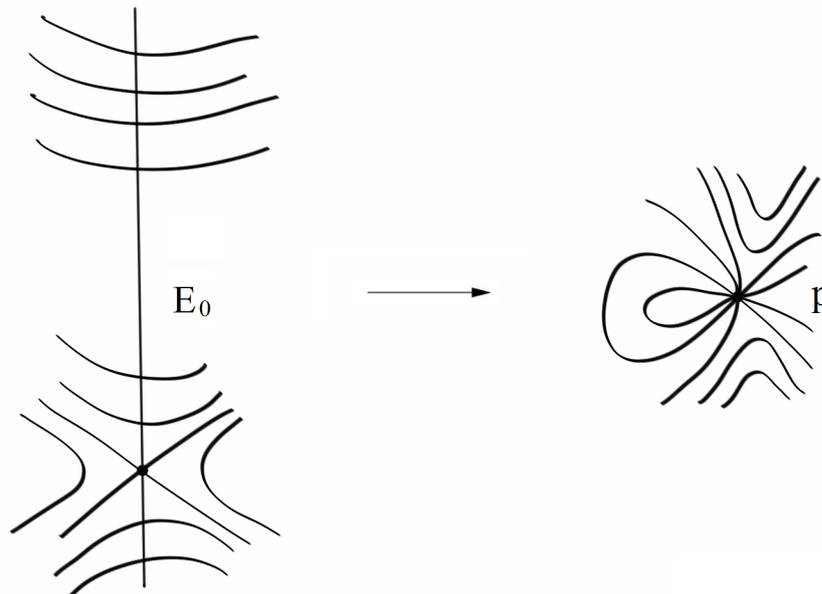


Figura 2.4: Singularidade dicrítica p de \mathcal{F} .

Como consequência do Teorema de Seidenberg acima, temos a

Proposição 2.1.4 (Proposition 1, Chapter 1, [2], página 15). *Uma singularidade p de uma folheação \mathcal{F} é dicrítica se, e somente se, existe uma sequência de blow-ups $\sigma : \tilde{U} \rightarrow U$ sobre p e uma componente irredutível E_0 do divisor excepcional $\sigma^{-1}(p) = E$ que não é invariante pela folheação induzida $\tilde{\mathcal{F}} = \sigma^*(\mathcal{F})$.*

2.1.2 Índices para Curvas Invariantes

Consideremos uma folheação \mathcal{F} dada por uma 1-forma holomorfa ω com singularidade isolada em p . Seja C uma separatriz de \mathcal{F} passando por p , isto é, C é uma curva invariante que passa pela singularidade. Suponhamos que C é dada pela equação local reduzida $f = 0$. Então vale o seguinte lema:

Lema 2.1.5 ([18]). *Existem germes de funções holomorfas g e h , relativamente primos e não identicamente nulos sobre C , e germe de 1-forma holomorfa η tais que*

$$g\omega = hdf + f\eta.$$

Definição 2.1.6. O *Índice de Camacho-Sad* de \mathcal{F} com respeito à curva C no ponto p é dado por

$$CS(\mathcal{F}, C, p) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial C} \frac{\eta}{h}.$$

Exemplo 2.1.7. Seja \mathcal{F} uma folheação induzida em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ por

$$\omega = x(\lambda_1 + yf(x, y))dy - y(\lambda_2 + xg(x, y))dx$$

onde λ_1, λ_2 são não nulos e $f(x, y), g(x, y)$ são holomorfas. $C_1 : \{y = 0\}$ e $C_2 : \{x = 0\}$ são separatrizes. Temos

$$CS(\mathcal{F}, C_1, 0) = \lambda_2/\lambda_1$$

e

$$CS(\mathcal{F}, C_2, 0) = \lambda_1/\lambda_2.$$

Se $p \in C$ é um ponto regular da folheação, convencionaremos

$$CS(\mathcal{F}, C, p) = 0.$$

Para uma curva compacta C existe um número finito de singularidades da folheação sobre C , logo podemos definir

$$CS(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in C} CS(\mathcal{F}, C, p).$$

Teorema 2.1.8 (do Índice de Camacho e Sad, [7]). *Se a curva C é compacta e \mathcal{F} -invariante, então*

$$CS(\mathcal{F}, C) = C^2.$$

Definição 2.1.9. O Índice Z de \mathcal{F} com respeito à curva C no ponto p é dado por

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial C} \frac{(h/g)}{d(h/g)}.$$

Exemplo 2.1.10. Seja \mathcal{F} uma folheação induzida em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ por

$$\omega = x(\lambda_1 + yf(x, y))dy - y(\lambda_2 + xg(x, y))dx$$

onde λ_1, λ_2 são não nulos e $f(x, y), g(x, y)$ são holomorfas. $C_1 : \{y = 0\}$ e $C_2 : \{x = 0\}$ são separatrizes. Temos

$$Z(\mathcal{F}, C_1, 0) = 1$$

e

$$Z(\mathcal{F}, C_2, 0) = 1.$$

Se $p \in C$ é um ponto regular da folheação, convencionaremos

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = 0.$$

Para uma curva compacta C existe um número finito de singularidades da folheação sobre C , logo podemos definir

$$Z(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in C} Z(\mathcal{F}, C, p).$$

Vale o seguinte resultado:

Teorema 2.1.11 (Proposition 7 de [3]). *Se a singularidade p de \mathcal{F} não possui sela-nó em sua redução e sendo C a união de todas as separatrizes por p , então*

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = 0.$$

A fórmula de interseção do fibrado normal a seguir será muito importante.

Teorema 2.1.12 (Proposition 3, [2], página 25). *Seja \mathcal{F} folheação numa superfície complexa X e seja $C \subset X$ uma curva compacta suave \mathcal{F} -invariante. Então*

$$N_{\mathcal{F}|_C} = \mathcal{N}_C \otimes \mathcal{O}_C(Z(\mathcal{F}, C)).$$

Se $D \subset X$ é uma curva conexa qualquer (não necessariamente suave) invariante pela folheação, então

$$N_{\mathcal{F}} \cdot D = D^2 + Z(\mathcal{F}, D).$$

2.2 Teorema do Índice de Hodge

Esquematzamos a seguir definições e resultados no âmbito da Geometria Complexa que serão utilizados neste texto. Seguimos [1] e [16]

2.2.1 Grupo de Néron-Severi

Primeiro vamos explorar a relação entre o grupo de Picard de uma variedade compacta Kähler X e o grupo de cohomologia $H^{1,1}(X) := H^{1,1}(X, \mathbb{C})$. Relembremos a sequência (exata curta) exponencial:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0.$$

Em particular, obtemos o morfismo de cobordo

$$\text{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

o qual pode ser composto com o morfismo $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ induzido pela inclusão $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Se X é Kähler compacta, temos a decomposição

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X).$$

O morfismo $H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$, induzido pela inclusão $\mathbb{C} \subset \mathcal{O}_X$, e o morfismo $H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{0,2}(X) = H^2(X, \mathcal{O}_X)$, dado pela projeção na primeira parcela da decomposição acima, coincidem (veja **Lemma 3.3.1** de [16]).

A sequência exata longa em cohomologia obtida da sequência exponencial mostra que a composição

$$\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^{0,2}(X)$$

é trivial. Portanto, a imagem de $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ está contida na imagem de $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ e, se X é Kähler compacta, também no núcleo da projeção $H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X) \rightarrow H^{2,0}(X)$. Como $H^2(X, \mathbb{R}) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ é invariante por conjugação complexa e contém a imagem de $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$, então obtemos que a imagem de $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ está contida em

$$H^{1,1}(X, \mathbb{Z}) := \text{Im}(H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})) \cap H^{1,1}(X).$$

E vale a

Proposição 2.2.1 (Teorema de Lefschetz para (1,1)-classes, **Proposition 3.3.2** de [16]). *Seja X uma variedade compacta Kähler. Então $\text{Pic}(X) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ é sobrejetivo.*

E no caso de superfícies vale mais geralmente a

Proposição 2.2.2 (Teorema de Lefschetz para (1,1)-classes, **Theorem 2.13** de [1]). *Seja X uma superfície compacta. Então $\text{Pic}(X) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ é sobrejetivo.*

Definição 2.2.3. A imagem de $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ é o grupo de Néron-Severi $NS(X)$ da variedade X , que gera um subespaço real

$$NS(X)_{\mathbb{R}} := NS(X) \otimes \mathbb{R} \subset H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X).$$

O Teorema de Lefschetz 2.2.1 acima diz que a inclusão natural $NS(X) \subset H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ é uma igualdade.

Definição 2.2.4. Seja X uma variedade compacta complexa. O posto da imagem $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ é chamado o número de Picard $\rho(X)$.

Então, se X é uma variedade Kähler compacta, vale $\rho(X) = \text{posto}(H^{1,1}(X, \mathbb{Z})) = \text{posto}(NS(X))$.

2.2.2 O Teorema do Índice de Hodge

Enunciemos agora o importante

Teorema 2.2.5 (Teorema do Índice de Hodge, **Corollary 3.3.16** de [16]). *Seja X uma superfície Kähler compacta, então a forma de interseção*

$$H^2(X, \mathbb{R}) \times H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

tem índice $(2h^{2,0}(X) + 1, h^{1,1}(X) - 1)$. Restrita a $H^{1,1}(X)$ a forma tem índice $(1, h^{1,1}(X) - 1)$.

Notemos que $NS(X)_{\mathbb{R}}$ é a imagem da aplicação

$$\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R} \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X).$$

Em vista do Teorema 1.2.4, podemos enunciar a seguinte consequência direta do Teorema do Índice de Hodge, a qual será utilizada algumas vezes neste

trabalho: se X é uma superfície complexa compacta, $C \subset X$ é uma curva compacta com $C^2 > 0$ e D é um \mathbb{R} -divisor tal que $C \cdot D = 0$, então $D^2 \leq 0$ e $D^2 = 0$ se, e somente se, a classe de D em $NS(X)_{\mathbb{R}} \subset H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C}) \cap H^{1,1}(X)$ é zero.

2.3 Superfícies Regradas

Seguiremos [1] e [14].

Definição 2.3.1. Chamaremos *superfície regrada* a uma superfície complexa compacta X que é o espaço total de um fibrado localmente trivial sobre uma curva complexa B , de fibra \mathbb{P}^1 e grupo estrutural $PSL(2, \mathbb{C})$.

Da teoria geral de fibrados mais o Princípio GAGA (espaços vetoriais analíticos sobre curvas são algébricos), segue o

Teorema 2.3.2 (Proposition 4.1 de [1]). *Todo fibrado analítico com fibra \mathbb{P}^n e grupo estrutural $PGL(n+1, \mathbb{C})$ sobre uma curva compacta suave B é isomorfo a $\mathbb{P}(V)$, o projetivizado de um espaço vetorial algébrico V de posto $n+1$ sobre B .*

De fato, uma superfície regrada pode ser caracterizada por uma *fibração* sobre uma curva suave compacta cujas fibras são todas isomorfas a \mathbb{P}^1 ([1], página 190).

Indiquemos por $\text{Num}(X)$ o grupo de divisores módulo equivalência numérica, isto é, $D_1 \equiv_{\text{num}} D_2$ se para todo divisor D em X tivermos $D_1 \cdot D = D_2 \cdot D$.

Teorema 2.3.3 (Proposition 2.3 de [14]). *Seja $\pi : X \rightarrow B$ uma superfície regrada, \mathbf{s}_0 a classe da imagem de uma seção holomorfa e \mathbf{f} a classe de uma fibra. Então*

$$\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \pi^*(\text{Pic}(B))$$

onde \mathbb{Z} é gerado por \mathbf{s}_0 e também

$$\text{Num}(X) = \mathbb{Z}\mathbf{s}_0 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{f}$$

determinado pelas relações

$$\mathbf{s}_0^2 = -e,$$

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{f} = 1,$$

$$\mathbf{f}^2 = 0.$$

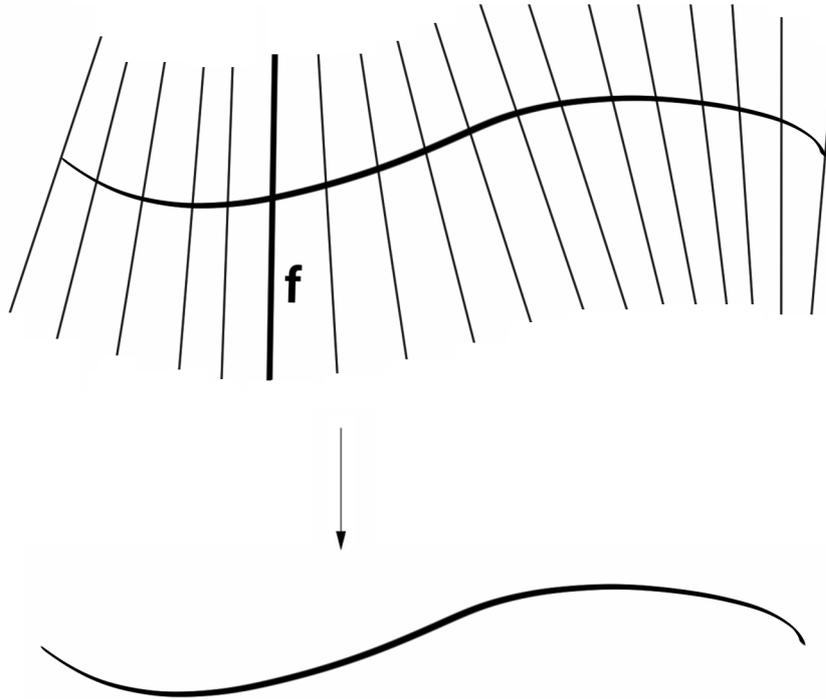


Figura 2.5: Superfície regrada.

2.3.1 Superfícies de Hirzebruch

Quando $B = \mathbb{P}^1$, um teorema clássico de Grothendieck ([12]) garante que todo fibrado vetorial algébrico sobre B é isomorfo a uma soma direta de fibrados lineares. Logo, toda superfície regrada sobre \mathbb{P}^1 é da forma $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ para algum $n \geq 0$ (pois $\text{Pic}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$ e $\mathbb{P}(V \otimes L) \cong \mathbb{P}(V)$ para todo fibrado linear L em B). Obtemos assim a n -ésima superfície de Hirzebruch

$$\Sigma_n := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)).$$

As superfícies Σ_n são todas birracionalmente equivalentes a $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1$, logo a \mathbb{P}^2 .

Se $n > 0$ e $C_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \in \Sigma_n$, então $C_n^2 = -n$ (veja [1], página 191). Em particular, temos

Teorema 2.3.4 (Proposition 4.2 de [1]). *As superfícies de Hirzebruch Σ_n são todas birregularmente distintas. Exceto $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, cada uma dessas superfícies possui apenas uma fibração racional localmente trivial.*

2.3.2 Existência de Fibrção

O seguinte resultado será crucial:

Teorema 2.3.5 (Proposition 4.3 de [1]). *Seja X uma superfície compacta e C uma curva racional suave em X .*

1. *se $C^2 = 0$, então existe uma modificação (composição de blow-downs) $\phi : X \rightarrow Y$, onde Y é "regrada", tal que C não intersecta curva excepcional de ϕ e $\phi(C)$ é uma fibra de Y ;*
2. *se $C^2 > 0$, então X é ou \mathbb{P}^2 ou uma superfície de Hirzebruch ou o blow-up de uma dessas superfícies.*

Assim, do item 1 do teorema acima, se $C \subset X$ é uma curva racional suave com auto-interseção $C^2 = 0$ na superfície compacta X , então X é obtida por uma sequência de blow-ups a partir de uma superfície regrada.

3.1 Conceitos Básicos

Sejam X uma superfície complexa e $C \subset X$ uma curva.

Definição 3.1.1. Uma 1-forma *logarítmica* ω num aberto $U \subset X$ com polos em C é uma 1-forma meromorfa em U com a seguinte propriedade: para todo $p \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que

$$\omega|_V = \omega_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{df_i}{f_i}$$

onde ω_0 é uma 1-forma holomorfa em V , f_i e g_i são funções holomorfas em V e cada f_i é uma equação reduzida de uma componente irredutível de $C \cap V$.

Em geral estaremos interessados na situação em que $C = \sum_{i=1}^n C_i \subset X$ é um *divisor a cruzamentos normais simples* (*simple normal crossing divisor*), em cujo caso obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{C_i} \rightarrow 0$$

onde $\Omega_X^1(\log C)$ é o feixe localmente livre (de posto 2) de 1-formas logarítmicas (veja **Lemma 8.16** de [34]) e a última aplicação é dada pelo *resíduo*, definido como segue: se, localmente,

$$\omega|_V = \omega_0 + \sum_{i=1}^n g_i \frac{df_i}{f_i}$$

então o resíduo de ω ao longo de C_i é dado por

$$\text{Res}(\omega)|_{C_i} = g_i|_{\{f_i=0\}}.$$

Verifica-se facilmente que essa definição independe das escolhas envolvidas (f_i, g_i, ω_0 etc.).

No contexto de folheações temos a definição a seguir.

Definição 3.1.2. Seja \mathcal{F} uma folheação em X e suponhamos que a curva C seja \mathcal{F} -invariante. Diremos que a folheação \mathcal{F} é *logarítmica* em (X, C) quando, dado $p \in C$, ω 1-forma definindo \mathcal{F} em vizinhança V de p e f equação reduzida de $C \cap V$, a 1-forma meromorfa $\frac{\omega}{f}$ for logarítmica com polos em C .

Se a curva C possui apenas singularidades a *cruzamentos normais*, então toda folheação \mathcal{F} em X tangente a C é logarítmica em (X, C) . Neste caso, o fibrado

$$L = N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$$

é chamado *fibrado conormal logarítmico*. Se a curva é um divisor a *cruzamentos normais simples*, então a aplicação de resíduo induz uma sequência exata:

$$0 \rightarrow N_{\mathcal{F}}^* \rightarrow N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{C_i}$$

Observemos que uma coleção de seções locais η_j de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$ definidas em abertos V_j determina uma coleção de resíduos $\text{Res}_{V_j \cap C_i}(\eta_j)$ como seções locais de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_{C_i}$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 3.1.3. Seja a 1-forma logarítmica *fechada*

$$\omega = \lambda_1 \frac{dy}{y} - \lambda_2 \frac{dx}{x}.$$

Então

$$\text{Res}_{\{x=0\}}(\omega) = -\lambda_2$$

e

$$\text{Res}_{\{y=0\}}(\omega) = \lambda_1.$$

Relembremos a forma normal a seguir:

Teorema 3.1.4 (THÉORÈME 1, [22], página 521). *Seja \mathcal{F} folheação dada por uma 1-forma holomorfa ω em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ com singularidade isolada na origem e parte linear $\lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx$. Suponhamos que λ_1, λ_2 são não nulos e λ_1/λ_2 e λ_2/λ_1 não são inteiros > 1 . Então existe uma mudança de coordenadas em vizinhança da origem tal que, nas novas coordenadas, a folheação é dada pela 1-forma*

$$\lambda_1 x(1 + xy(\dots))dy - \lambda_2 y(1 + xy(\dots))dx$$

Exemplo 3.1.5. Segue do teorema acima que se a folheação \mathcal{F} tem singularidade reduzida não degenerada em $0 \in \mathbb{C}^2$, então podemos encontrar uma expressão logarítmica para a folheação como segue:

$$\eta = \lambda_1(1 + xy(\dots))\frac{dy}{y} - \lambda_2(1 + xy(\dots))\frac{dx}{x}$$

de modo que

$$\text{Res}_{\{x=0\}}(\eta) = -\lambda_2$$

e

$$\text{Res}_{\{y=0\}}(\eta) = \lambda_1.$$

Vemos assim que o quociente de resíduos é igual a menos o quociente de autovalores.

Notemos que se a curva C é compacta e ω é uma seção global em vizinhança de C de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$, então o resíduo em cada componente irredutível C_i é constante.

Fixemos uma curva compacta $C \subset X$ com singularidades a cruzamentos normais simples. Seja \mathcal{F} uma folheação reduzida tangente a C .

Proposição 3.1.6. *Se a folheação reduzida \mathcal{F} não possui sela-nó em C , então existem vizinhança U de C e 1-formas logarítmicas em abertos contidos em U definindo $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_U$ tais que os resíduos obtidos são localmente constantes.*

Demonstração. Fora dos pontos singulares de \mathcal{F} em C , podemos escolher seções locais do fibrado conormal logarítmico com qualquer resíduo fixado em \mathbb{C}^* . Em vizinhanças dos pontos singulares, seções locais com resíduo constante são obtidas via Exemplo 3.1.5. \square

Como consequência do Teorema 2.1.12, temos a proposição a seguir:

Proposição 3.1.7. *Se a folheação reduzida \mathcal{F} não possui sela-nó na curva compacta invariante $C = \sum_{i=1}^n C_i$, onde cada C_i é uma curva suave, e*

$$C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$$

então

$$N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_{C_i} = \mathcal{O}_{C_i}$$

$i = 1, \dots, n$.

Demonstração. O índice Z é zero nos pontos de $C_i - C \cap \text{Sing}(C)$ e vale 1 nos pontos de $C_i \cap \text{Sing}(C)$. Logo

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}}|_{C_i} &= \mathcal{N}_{C_i} \otimes \mathcal{O}_{C_i}(Z(\mathcal{F}, C_i)) \\ &= \mathcal{N}_{C_i} \otimes \mathcal{O}_{C_i}(C_i \cap \text{Sing}(C)) \\ &= \mathcal{N}_{C_i} \otimes \mathcal{O}_{C_i}(\bigcup_{j \neq i} C_j \cap C_i) \\ &= \mathcal{O}_X(C)|_{C_i} \end{aligned}$$

□

Observação 3.1.8. A Proposição acima também é consequência da (prova da) Proposição 3.1.6. Com efeito, primeiro notamos que os resíduos tem cociclo de transição igual ao cociclo de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$ restrito a C (em vizinhança dum ponto singular de C temos duas componentes para o cociclo, cada uma delas com valor dado pelas transições dos respectivos resíduos). Em particular, em cada componente C_i , o cociclo de transição dos resíduos nos dá um cociclo para $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_{C_i}$. Podemos escolher seções locais definindo $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$ ao longo de uma vizinhança de C_i todas com o mesmo resíduo fixado em \mathbb{C}^* (ao longo de C_i), logo segue a trivialidade de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_{C_i}$.

De nossa discussão acima também obtemos a

Proposição 3.1.9. *Suponhamos que a folheação reduzida \mathcal{F} não possui sela-nó na curva compacta invariante $C = \sum_{i=1}^n C_i$, onde cada C_i é uma curva suave, e*

$$C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j.$$

Então

$$N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$$

se, e somente se, existem $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{C}^*$, abertos V_i formando vizinhança de C em X e seções η_i de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_{V_i}$ tais que

$$V_i \cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \text{Res}_{C_i}(\eta_i) = \delta_i$$

$i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Suponhamos $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$. Então, multiplicando as seções locais η_i dadas pela Proposição 3.1.6 por constantes não nulas convenientes, podemos supor que o cociclo de transição dos resíduos é constante igual a 1. Então, em cada componente C_i , vale

$$V_i \cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \text{Res}_{C_i}(\eta_i) = \delta_i$$

para constante $\delta_i \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, \dots, n$.

Reciprocamente, suponhamos que existam as seções locais η_i como acima. Então, evidentemente, o cociclo de transição dos resíduos é constante igual a 1 e, portanto, $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C$ é trivial. \square

Observação 3.1.10. Seja $p \in C_1 \cap C_2$, onde C_1 e C_2 são curvas suaves. Se $C = C_1 \cup C_2$ é invariante por uma folheação \mathcal{F} reduzida não degenerada em p e η é uma seção local em vizinhança de p definindo $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$, então o quociente

$$\text{Res}_{C_1}\eta / \text{Res}_{C_2}\eta$$

independe de η e é igual a menos o quociente de autovalores da folheação em p . Isso é consequência do Teorema 3.1.4 (veja Exemplo 3.1.5).

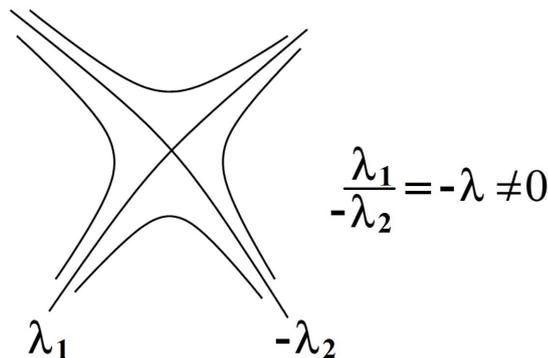


Figura 3.1: Quociente de resíduos é igual a menos o quociente de autovalores em p .

Nossas discussões anteriores e a observação acima nos levam naturalmente ao conceito a seguir.

3.2 Representação Residual

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa numa superfície complexa X . Suponhamos que \mathcal{F} deixa invariante uma curva $C = \sum_{i=1}^n C_i$ com as seguintes propriedades:

1. C_1, \dots, C_n são curvas suaves;
2. todas as singularidades de \mathcal{F} em C são reduzidas;
3. $Sing(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ são singularidades reduzidas não degeneradas de \mathcal{F} .

A fim de simplificar a exposição, vamos supor $\#C_i \cap C_j \leq 1$ se $i \neq j$ (a menos de realizar alguns blow-ups, não há perda de generalidade). Se $i \neq j$ e $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, seja $\{p_{ij}\} = \{p_{ji}\} = C_i \cap C_j$.

Associado ao divisor \mathcal{F} -invariante C temos o seu grafo dual Γ , onde cada vértice representa uma curva C_i e cada aresta ligando dois vértices representa a interseção dos mesmos no ponto p_{ij} . O grafo será *dirigido*, orientado pela ordem dos índices de seus vértices, isto é, uma aresta p_{ij} ligando um vértice C_i a outro vértice C_j será orientada no sentido de C_i para C_j se $i < j$. (Existe uma escolha arbitrária na orientação do grafo, mas isso não afetará nosso estudo.)

A cada aresta p_{ij} , com $i < j$, associamos o número $\delta_{ij} = -CS(\mathcal{F}, C_j, p_{ij}) \in \mathbb{C}^*$. (Notemos que se a folheação é reduzida não degenerada em p_{ij} , então

$$\delta_{ij} = -CS(\mathcal{F}, C_j, p_{ij}) = -\alpha_{ij}/\beta_{ij} = Res_{C_i}/Res_{C_j}$$

onde α_{ij}, β_{ij} são autovalores no ponto p_{ij} associados a um campo local que define a folheação.)

Assim, obtemos um elemento

$$\sigma = \sigma_{(\mathcal{F}, C)} \in H^1(\Gamma, \mathbb{C}^*)$$

e (equivalentemente) uma representação

$$\rho = \rho_{(\mathcal{F}, C)} : \pi_1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^*$$

a ser chamada *representação residual*.

Em certos casos, a representação acima corresponde à obstrução para a trivialidade do fibrado linear $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C$. Explicitamente, temos a

Proposição 3.2.1. *Suponhamos que a folheação reduzida \mathcal{F} não possui sela-nó na curva compacta invariante $C = \sum_{i=1}^n C_i$, onde cada C_i é uma curva suave, e*

$$C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j.$$

Então

$$N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$$

se, e somente se, a representação residual $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é trivial.

Demonstração. Se $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$, então a Proposição anterior (3.1.9) mais a Observação acima (3.1.10) implicam que a representação $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é trivial.

Reciprocamente, suponhamos a trivialidade da representação residual. Então existem $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{C}^*$ tais que

$$\delta_i/\delta_j = \delta_{ij} = \text{Res}_{C_i}/\text{Res}_{C_j}.$$

Assim, é possível escolher seções locais do fibrado conormal logarítmico em vizinhanças das singularidades de C com resíduo δ_i ao longo de C_i , $i = 1, \dots, n$ (Observação 3.1.10). Fora dos pontos singulares de C , podemos escolher o resíduo que bem quisermos, então tomamos seções locais com resíduo δ_i ao longo de C_i . Portanto, tais seções locais trivializam o fibrado conormal logarítmico em C (via resíduos). \square

Definição 3.2.2. Um *ciclo de curvas racionais suaves* (ou simplesmente um *ciclo*) é uma união de um número finito de curvas racionais suaves em posição geral (cruzamentos normais) C_i , $i = 1, \dots, m$, $m > 1$, tal que: se $m = 2$, então $\#C_1 \cap C_2 = 2$; se $m > 2$, então $\#C_i \cap C_{(i+1)} = \#C_1 \cap C_m = 1$, $i = 1, \dots, m-1$, caso contrário $\#C_i \cap C_j = 0$.

Exemplo 3.2.3. Se o grafo dual Γ de C é contrátil, então a representação $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é trivial.

Exemplo 3.2.4. Seja uma folheação \mathcal{F} que deixa invariante um ciclo de curvas racionais $C = C_1 + C_2 + C_3$, onde $C_j^2 = 1$, $j = 1, 2, 3$, e tal que $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = \text{Sing}(C)$ são singularidades reduzidas não degeneradas de \mathcal{F} . (Por exemplo, considere a folheação dada por $\omega = xdy - \lambda ydx$ em \mathbb{P}^2 , onde $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}_{\geq 0}$.)

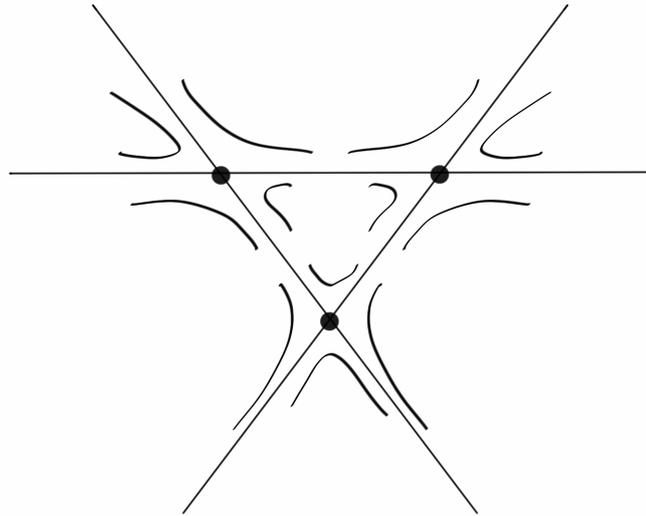
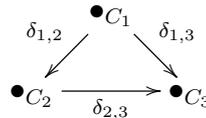


Figura 3.2: Ciclo de três curvas racionais invariante.

O grafo dual de C é



onde os δ_{ij} representam o cociclo em $H^1(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ correspondente à representação residual. Assim

$$\begin{aligned}\delta_{1,2} + \delta_{1,3} &= -1; \\ \frac{1}{\delta_{1,2}} + \delta_{2,3} &= -1; \\ \frac{1}{\delta_{2,3}} + \frac{1}{\delta_{1,3}} &= -1.\end{aligned}$$

Vemos facilmente que neste caso a representação $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é sempre trivial.

3.3 Grupo de Picard de Curvas

Seja $C = \sum_{i=1}^n C_i$ uma curva complexa compacta (conexa!), onde cada C_i é uma curva suave, e Γ o grafo dual de C . Vamos descrever os fibrados lineares em C que tem a propriedade de ser trivial em restrição a cada uma das componentes irredutíveis C_i , $i = 1, \dots, n$.

Proposição 3.3.1. *Seja $T(C) = \{F \in \text{Pic}(C); F|_{C_i} = \mathcal{O}_{C_i}, i = 1, \dots, n\}$.*

Então

$$T(C) \simeq H^1(\Gamma, \mathbb{C}^*) \simeq \text{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathbb{C}^*).$$

Demonstração. Consideremos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_C^* \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{C_i}^* \rightarrow \bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \rightarrow 1$$

onde o morfismo com imagem em $\bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^*$ é dado por quociente (para isto usamos uma ordenação dos índices a fim de fixar como proceder tais divisões): se $k < l$ e $q \in C_k \cap C_l$, uma seção local de $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{C_i}^*$ com valor λ_k em $q \in C_k$ e λ_l em $q \in C_l$ tem imagem com valor λ_k/λ_l em q (como seção de $\bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^*$). Obtemos então a sequência exata longa em cohomologia

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^* \rightarrow \bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Pic}(C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(C_i) \rightarrow 1.$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathbb{C}^*) &\simeq H^1(\Gamma, \mathbb{C}^*) \\ &\simeq \frac{\bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^*}{\text{Im}(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^* \rightarrow \bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^*)} \\ &\simeq \frac{\bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^*}{\text{Ker}(\bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Pic}(C))} \\ &\simeq \text{Im}(\bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Pic}(C)) \\ &\simeq \text{Ker}(\text{Pic}(C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(C_i)) \\ &= T(C) \end{aligned}$$

□

Assim, um fibrado linear

$$F \in \text{Ker}(\text{Pic}(C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(C_i)) = \text{Im}(\bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Pic}(C))$$

determina um elemento em $H^1(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ (logo uma representação $\rho_F : \pi_1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^*$) e reciprocamente um elemento em $H^1(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ determina um fibrado linear como acima.

A situação de nosso interesse consiste da curva $C = \sum_{i=1}^n C_i$, com singularidades a cruzamentos normais simples e invariante por uma folheação \mathcal{F} reduzida, sem sela-nó e singular apenas nos pontos de cruzamentos da curva, e do fibrado conormal logarítmico $L = N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$ restrito à curva C , de modo que

$$F = L|_C \in \text{Ker}(\text{Pic}(C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(C_i))$$

conforme a Proposição 3.1.7.

À luz do que fizemos acima, podemos escrever o diagrama comutativo a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \text{Pic}(C) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(C_i) \longrightarrow 1 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{Pic}(C) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(C_i) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}_C^* & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}_{C_i}^* & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^* & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{C_i}^* & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in \text{Sing}(C)} \mathbb{C}^* \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & L \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{C_i} & &
 \end{array}$$

De nossos argumentos anteriores segue a generalização da Proposição 3.2.1

Proposição 3.3.2. *Suponhamos que a folheação reduzida \mathcal{F} não possui selanó na curva invariante $C = \sum_{i=1}^n C_i$, onde cada C_i é uma curva suave, e*

$$C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j.$$

Então o fibrado linear $F = N_{\mathcal{F}}^ \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C$ é determinado pela representação residual $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$. Isto é, $\rho_F = \rho_{(\mathcal{F}, C)}$.*

Demonstração. Basta notar que

$$F = N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C \in \text{Ker}(\text{Pic}(C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(C_i)).$$

□

3.4 Divisor Residual

Se a representação $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é trivial, então existem $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{C}^*$ tais que $\delta_{ij} = \delta_i/\delta_j$ e, assim, podemos definir, a menos de multiplicação por constante não nula, o *divisor residual*

$$R = \text{Res}(\mathcal{F}, C) = \sum_{i=1}^n \delta_i C_i.$$

A fim de tornar a definição precisa, determinamos o divisor residual impondo que $\delta_1 = 1$, de modo a obter solução única em $\delta_2, \dots, \delta_n$ (o que, obviamente, depende da ordem das componentes de C).

Exemplo 3.4.1. Suponhamos agora

$$D = \sum_{i=1}^n C_i + \sum_{k=1}^m S_k$$

com C_1, \dots, C_n curvas suaves compactas e S_1, \dots, S_m sendo as separatrizes (germes) não suportadas em C passando por singularidades reduzidas não degeneradas de \mathcal{F} em $C - \text{Sing}(C)$. Suponhamos que a representação $\rho_{(\mathcal{F}, D)}$ seja trivial, com *divisor de resíduos*

$$R = \text{Res}(\mathcal{F}, D) = \sum_{i=1}^n \mu_i C_i + \sum_{k=1}^m \delta_k S_k.$$

Suponhamos que a folheação não possui separatriz fraca suportada em C .
Então

$$\begin{aligned}
 R \cdot C_j &= \sum_{i=1}^n \mu_i C_i \cdot C_j + \sum_{k=1}^m \delta_k S_k \cdot C_j \\
 &= \mu_j (C_j^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\mu_i}{\mu_j} C_i \cdot C_j + \sum_{k=1}^m \frac{\delta_k}{\mu_j} S_k \cdot C_j) \\
 &= \mu_j (C_j^2 - CS(\mathcal{F}, C_j)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n$.

4.1 Representação Residual Trivial e Separatrizes

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa numa superfície complexa X . Suponhamos que \mathcal{F} deixa invariante uma curva *compacta* $C = \sum_{i=1}^n C_i$ com as seguintes propriedades:

1. C_1, \dots, C_n são curvas suaves;
2. todas as singularidades de \mathcal{F} em C são reduzidas;
3. $Sing(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ são singularidades reduzidas não degeneradas de \mathcal{F} .

Indiquemos por $Sep(\mathcal{F}, C) = S_1 + \dots + S_m$ as separatrizes (germes) não suportadas em C passando por pontos de $C \cap (Sing(\mathcal{F}) - Sing(C))$ que são singularidades não degeneradas.

Seja $D = C + Sep(\mathcal{F}, C)$ e $\rho = \rho_{(\mathcal{F}, D)} : \pi_1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^*$ a representação residual de \mathcal{F} ao longo de D .

Teorema 4.1.1 (Teorema 2). *Suponhamos que \mathcal{F} não possui separatriz fraca suportada em C e que a representação $\rho = \rho_{(\mathcal{F}, D)}$ seja trivial, com*

resíduos μ_1, \dots, μ_n ao longo de C e $\delta_1, \dots, \delta_m$ ao longo de $Sep(\mathcal{F}, C)$, isto é, com divisor residual

$$R = Res(\mathcal{F}, D) = \sum_{i=1}^n \mu_i C_i + \sum_{k=1}^m \delta_k S_k.$$

Se a matriz de interseção $[C_i \cdot C_j]_{ij}$ de C é invertível, então

$$\#Sep(\mathcal{F}, C) = m \geq \dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \mathbb{Q} + \sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{Q}\right) \geq 1$$

Demonstração. Consideremos a matriz de interseção de C com $C + Sep(\mathcal{F}, C)$,

$$A = [C_i \cdot C_j \oplus C_i \cdot S_k].$$

Seja o \mathbb{C} -divisor em X dado por

$$R = \sum_{j=1}^n \mu_j C_j + \sum_{k=1}^m \delta_k S_k.$$

Então $C_i \cdot R = R \cdot C_i = 0$, para $i = 1, \dots, n$. Logo

$$A(\mu_1, \dots, \mu_n, \delta_1, \dots, \delta_m) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n.$$

Sendo a matriz de interseção $[C_i \cdot C_j]$ invertível, então a matriz A tem posto n , logo a igualdade acima corresponde a n relações \mathbb{Q} -linearmente independentes (com coeficientes inteiros) entre $\mu_1, \dots, \mu_n, \delta_1, \dots, \delta_m$. Logo

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \mathbb{Q} + \sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{Q}\right) \leq m = \#Sep(\mathcal{F}, C).$$

□

Uma consequência interessante é o seguinte

Corolário 4.1.2. *Suponhamos que a representação $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ seja trivial. Se a matriz de interseção $[C_i \cdot C_j]_{ij}$ de C é invertível, então existe separatriz S por ponto de $C - Sing(C)$ não suportada em C e que não é separatriz fraca de sela-nó.*

Demonstração. Com efeito, se não há sela-nó em $Sing(\mathcal{F}) \cap (C - Sing(C))$ com separatriz fraca suportada em C , então o Teorema 4.1.1 implica na existência de ponto singular da folheação em $Sing(\mathcal{F}) \cap (C - Sing(C))$ por onde passa separatriz não suportada em C e que não é separatriz fraca de sela-nó. Caso contrário, se existe sela-nó em $Sing(\mathcal{F}) \cap (C - Sing(C))$ com separatriz fraca suportada em C , então a separatriz forte não está suportada em C . □

4.2 O Teorema da Separatriz

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular numa superfície complexa X . Suponhamos que \mathcal{F} deixa invariante uma curva $C = \sum_{i=1}^n C_i$ com as seguintes propriedades já costumeiras:

1. C_1, \dots, C_n são curvas suaves;
2. todas as singularidades de \mathcal{F} em C são reduzidas;
3. $Sing(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ são singularidades reduzidas não degeneradas de \mathcal{F} .

Particularmente interessante é estudar o caso em que a representação $\rho = \rho_{(\mathcal{F}, C)}$ associada a uma curva *excepcional* é trivial. Relembremos a noção:

Definição 4.2.1 (*Curvas Excepcionais*). Uma curva conexa, compacta, reduzida C numa superfície não singular X é chamada *excepcional* se existe um bimeromorfismo $\pi : X \rightarrow Y$ tal que C é excepcional para π , i.e., se existe uma vizinhança aberta U de C em X , um ponto $y \in Y$, e uma vizinhança V de y em Y , tal que π leva $U - C$ biholomorficamente sobre $V - \{y\}$, onde $\pi(C) = y$. Também iremos expressar essa situação dizendo que C é *contraída* em y .

Então nos será útil o seguinte resultado clássico:

Teorema 4.2.2 (**Grauert's criterion**, [1], página 91). *Uma curva conexa, compacta, reduzida $C = \sum_{i=1}^n C_i$ com componentes irredutíveis C_i numa superfície lisa é excepcional se, e somente se, a matriz de interseção $[C_i \cdot C_j]$ é negativa definida.*

Veremos agora o que podemos concluir supondo trivialidade da representação residual e excepcionalidade da curva. O teorema abaixo é de fato uma consequência direta do Corolário 4.1.2, pois toda matriz negativa definida é invertível, mas preferimos dar uma prova independente, porém no mesmo espírito.

Teorema 4.2.3. *Se a curva C é compacta e excepcional e a representação $\rho = \rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é trivial, então existe ao menos uma singularidade $p \in Sing(\mathcal{F}) \cap (C - Sing(C))$ e separatriz passando por p não suportada em C e que não é separatriz fraca de sela-nó.*

Demonstração. Se a representação ρ é trivial (equivalentemente se σ é trivial), então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ tais que

$$CS(\mathcal{F}, C_j, p_{ij}) = -\lambda_{ij} = -\lambda_i/\lambda_j$$

se $i < j$. Logo, sendo p_{ij} singularidade reduzida não degenerada de \mathcal{F} , temos

$$CS(\mathcal{F}, C_j, p_{ij}) = -\lambda_i/\lambda_j$$

e

$$CS(\mathcal{F}, C_i, p_{ij}) = -\lambda_j/\lambda_i.$$

Consideremos o \mathbb{C} -divisor

$$R = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i.$$

Suponhamos, por absurdo, a não existência de separatriz não suportada em C que não é separatriz fraca de sela-nó passando por singularidade da folheação em $C - \text{Sing}(C) = C - \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$. Assim, os possíveis pontos singulares em $C - \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ são selas-nós com separatriz forte em uma das componentes de C e separatriz fraca (se existe) não suportada em C , logo o índice de Camacho-Sad nesses pontos é nulo ao longo de C . Portanto, como já tivemos ocasião de calcular noutra ocasião, vale

$$\begin{aligned} R \cdot C_j &= \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \cdot C_j \\ &= \lambda_j (C_j^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} C_i \cdot C_j) \\ &= \lambda_j (C_j^2 - \sum_{i \neq j} CS(\mathcal{F}, C_j, p_{ij}) C_i \cdot C_j) \\ &= \lambda_j (C_j^2 - CS(\mathcal{F}, C_j)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Podemos escrever

$$R = R_1 + \sqrt{-1}R_2$$

onde R_1 e R_2 são \mathbb{R} -divisores. Então

$$R \cdot C_j = 0 \Rightarrow R_1 \cdot C_j + \sqrt{-1}R_2 \cdot C_j = 0$$

logo $R_1 \cdot C_j = 0$ e $R_2 \cdot C_j = 0$, para $j = 1, \dots, n$. Isto implica $R_1^2 = 0$ e $R_2^2 = 0$. Mas $R \neq 0$, logo $R_1 \neq 0$ ou $R_2 \neq 0$, portanto a matriz de interseção $[C_i \cdot C_j]_{i \neq j}$ não é negativa definida, contrariando a excepcionalidade de C , pelo Critério de Grauert acima. \square

Como consequência temos um critério para existência de separatriz em superfície singular (normal).

Corolário 4.2.4. *Seja \mathcal{F} uma folheação na superfície singular normal X . Seja $\pi : Y \rightarrow X$ aplicação bimeromorfa que resolve a singularidade p e tal que a folheação induzida $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$ é reduzida. Suponhamos que exista uma sub-curva conexa $C = \sum_{i=1}^n C_i \subset E = \pi^{-1}(p)$ tal que a folheação \mathcal{G} é reduzida não degenerada nos cruzamentos $Sing(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ e \mathcal{G} não possui separatriz fraca de sela-nó suportada em C . Se a representação $\rho = \rho_{(\mathcal{G}, C)}$ é trivial, então \mathcal{F} possui separatriz passando por p .*

Demonstração. A curva C é excepcional, logo estamos em condições de aplicar o Teorema 4.2.3. Assim, existe singularidade $q \in C - Sing(C)$ e separatriz (de \mathcal{G}) passando por q mas não suportada em E (pelas hipóteses do enunciado). Tal separatriz projeta-se pela aplicação π numa separatriz de \mathcal{F} passando por p . \square

Corolário 4.2.5 (Generalização do Teorema da Separatriz por Camacho, [5]). *Seja \mathcal{F} uma folheação na superfície singular normal X . Seja E o divisor excepcional obtido pela resolução da singularidade $p \in X$ seguida da redução de singularidades da folheação. Se o grafo dual de E é uma árvore, então existe separatriz passando por p .*

Demonstração. Com efeito, basta mostrarmos que existe sub-curva conexa $C \subset E$ nas condições do enunciado do Corolário anterior, pois tal sub-curva também terá grafo dual contrátil, logo a representação $\rho_{(\mathcal{G}, C)}$ será trivial.

Seguimos um argumento de M. Toma em [32]. Seja $\Lambda \subset \Gamma$ o subgrafo consistindo da união das arestas de Γ que não conectam vértices por um cruzamento em sela-nó, ou seja, retiramos de Γ as arestas que correspondem aos cruzamentos em sela-nó. Notamos que retirar uma dessas arestas divide um grafo contrátil em duas componentes, uma correspondendo à componente da separatriz forte e outra correspondendo à componente da separatriz fraca. Fazendo esse processo de remoção de aresta indesejada e sempre fixando a componente que resta correspondente à separatriz forte, ao final obtemos uma

componente conexa $\Gamma_0 \subset \Lambda$ sem vértices que são separatrizes fracas. Então Γ_0 é o grafo dual de uma sub-curva C com a propriedade desejada. \square

Em particular, resulta o importante

Corolário 4.2.6 (Teorema da Separatriz de Camacho e Sad, [7]). *Sejam \mathcal{F} folheação na superfície lisa X e $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Então existe separatriz de \mathcal{F} passando por p .*

Observação 4.2.7. Agora vamos analisar o que ocorre em geral sem impor a trivialidade da representação residual. Antes relembremos alguns fatos sobre grafos finitos.

Teorema 4.2.8 (Theorem 4.2 de [21]). *Seja Γ um grafo. Então toda árvore contida em Γ está contida numa árvore maximal contida em Γ .*

Teorema 4.2.9 (Theorem 4.2 de [21]). *Seja Γ um grafo e seja T um subgrafo de Γ que é uma árvore. Então T é maximal se, e somente se, contém todos os vértices de Γ .*

Seja, como antes, Γ o grafo dual da curva C . Se considerarmos a árvore maximal $T \subset \Gamma$, então todas as arestas de Γ estão em T . Logo T é o grafo dual da curva $C = \sum_{i=1}^n C_i$ com a exclusão de $b_1(\Gamma)$ arestas (cruzamentos de componentes de C), onde $b_1(\Gamma)$ é o primeiro número de Betti de Γ . Agora fazemos blow-up em todos os pontos de cruzamento ignorados pela árvore T . Obtemos assim que o grafo dual Λ do transformado estrito $\tilde{C} = \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i$ de C é contrátil.

Suponhamos que a folheação reduzida \mathcal{F} não possui sela-nó na curva invariante C . Como $\tilde{D} = \tilde{C} + \text{Sep}(\mathcal{G}, \tilde{C})$ tem grafo dual contrátil, então a representação $\rho_{(\mathcal{G}, \tilde{D})} : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^*$ é trivial. Podemos escrever

$$\text{Sep}(\mathcal{G}, \tilde{C}) = E_1 + \dots + E_{2b_1(\Gamma)} + \tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_m$$

onde os germes de separatrizes $E_1, \dots, E_{2b_1(\Gamma)}$ vem do divisor excepcional e $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_m$ se projetam nos germes de separatrizes S_1, \dots, S_m passando por C . Por construção, \tilde{C} está nas mesmas hipóteses de antes para C (ausência de sela-nó), mas agora já temos de início que $\#\text{Sep}(\mathcal{G}, \tilde{C}) \geq 2b_1(\Gamma)$. Mais precisamente

$$m = \#\text{Sep}(\mathcal{F}, C) = \#\text{Sep}(\mathcal{G}, \tilde{C}) - 2b_1(\Gamma) \geq 0$$

Pelo Teorema 4.1.1 deduzimos o

Teorema 4.2.10. *Se μ_1, \dots, μ_n são os resíduos de $\rho_{(\mathcal{G}, \tilde{D})}$ ao longo de \tilde{C} , ν_1, \dots, ν_r ao longo de $E_1 + \dots + E_{2b_1(\Gamma)}$ e $\delta_1, \dots, \delta_m$ ao longo de $\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_m$, isto é, o divisor residual é*

$$R = \text{Res}(\mathcal{G}, \tilde{D}) = \sum_{i=1}^n \mu_i \tilde{C}_i + \sum_{j=1}^{2b_1(\Gamma)} \nu_j E_j + \sum_{k=1}^m \delta_k S_k.$$

Então, se a matriz de interseção $[C_i \cdot C_j]_{ij}$ de C é negativa definida (isto é, C é excepcional), obtemos

$$\# \text{Sep}(\mathcal{F}, C) = m \geq \dim_{\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \mathbb{Q} + \sum_{j=1}^{2b_1(\Gamma)} \nu_j \mathbb{Q} + \sum_{k=1}^m \delta_k \mathbb{Q} \right) - 2b_1(\Gamma) \geq 0$$

4.3 Representação Residual Torção e Separatrizes

Começamos com o conhecido *truque do recobrimento* em sua versão mais simples (não ramificado).

Proposição 4.3.1. *Sejam X uma variedade complexa e L um fibrado linear sobre X de ordem $k > 0$ em $\text{Pic}(X)$, isto é, k é o menor inteiro positivo para o qual $L^{\otimes k}$ é trivial. Então existe um recobrimento regular de ordem k cíclico $g : Y \rightarrow X$ tal que g^*L é trivial.*

Demonstração. Seja $\tau : L \rightarrow X$ a projeção do fibrado. Consideremos uma seção trivializante s de $L^{\otimes k}$ e seja a aplicação $f : L \rightarrow L^{\otimes k}$ dada por

$$f(v) = v^{\otimes k} = v \otimes \dots \otimes v$$

(k vezes).

Então $Y = f^{-1}(s(X)) \subset L$ é uma subvariedade de L e a projeção

$$g = \tau|_Y : Y \rightarrow X$$

é um recobrimento regular de ordem k cíclico (para generalização desta construção, veja [1], página 54). Os automorfismos de recobrimentos são as restrições a Y dos automorfismos de fibrado em L correspondentes a multiplicação por raízes k -ésimas da unidade.

Por construção, o fibrado g^*L é trivial. Com efeito, a própria inclusão de Y em L nos fornece uma seção global trivializante de g^*L , pois cada

elemento $v \in Y \subset L$ é não-nulo como elemento de L e, portanto, é não nulo como elemento de g^*L .

$$\begin{array}{ccccccc}
 g^*L & \hookrightarrow & \tau^*L & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & L^{\otimes k} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\text{inclusão}} & L & \xrightarrow{\tau} & X & \xlongequal{\quad} & X \\
 & \searrow & \swarrow & \searrow & & & \\
 & & & & g & &
 \end{array}$$

□

Relembremos também o seguinte resultado da Geometria Complexa:

Teorema 4.3.2 (Grauert, **Satz 5**, [11] página 340). *Seja A um subconjunto analítico conexo e compacto da variedade analítica X . Então A é excepcional se, e somente se, possui uma vizinhança estritamente pseudoconvexa G em X tal que A é o subconjunto analítico compacto maximal de G .*

Como consequência, no caso particular que nos interessa, obtemos o seguinte fato: se $g : Y \rightarrow X$ é um recobrimento finito da superfície complexa X e $C \subset X$ é uma curva excepcional, então $g^{-1}(C)$ é uma curva excepcional em Y .

Suponhamos que a folheação \mathcal{F} deixa invariante uma curva $C = \sum_{i=1}^n C_i$ tal que:

1. C_1, \dots, C_n são curvas suaves;
2. todas as singularidades de \mathcal{F} em C são reduzidas não degeneradas.

Com essas hipóteses, obtemos uma versão do Teorema 4.2.3 no caso em que a representação residual é de torção.

Teorema 4.3.3. *Se a curva \mathcal{F} -invariante $C = \sum_{i=1}^n C_i \subset X$ é compacta e excepcional e a representação $\rho = \rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é torção de ordem k , então existe ao menos uma singularidade $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap (C - \text{Sing}(C))$ e separatriz passando por p , não suportada em C .*

Demonstração. Seja $F = F_p = N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C$ o fibrado linear sobre C associado a ρ (veja a subseção 3.3) e consideremos uma extensão \mathbb{C}^* -plana L de F a uma vizinhança U de C de modo que $L^{\otimes k}$ é trivial. Então, pelo truque do recobrimento exibido inicialmente, obtemos um recobrimento cíclico de ordem k de uma superfície Y sobre X , digamos $g : Y \rightarrow X$, com g^*L trivial.

Sejam $\mathcal{G} = g^*\mathcal{F}$ e $D = \sum_{j=1}^{kn} D_j = g^{-1}(C)$. Assim

$$N_{\mathcal{G}}^* \otimes \mathcal{O}_X(D)|_D = g^*F = g^*L|_D = \mathcal{O}_D$$

logo a representação $\tilde{\rho} = \rho_{(\mathcal{G}, D)}$ é trivial. (Reveja a subseção 3.3 e a Proposição 3.3.2.) Pelo Teorema 4.3.2, a curva D é excepcional. Logo, do Teorema 4.2.3, existe separatriz por ponto de $Sing(\mathcal{G}) \cap (D - Sing(D))$ não suportada em D . Tal separatriz projeta-se por f em separatriz de \mathcal{F} com as propriedades desejadas. \square

4.4 Folheações com Feixe Normal \mathbb{Q} -Gorenstein

Um feixe \mathcal{S} numa superfície singular é dito *\mathbb{Q} -Gorenstein* se existe um inteiro positivo $k > 0$ tal que a k -ésima potência $\mathcal{S}^{\otimes k}$ é localmente trivial (mesmo nas singularidades).

Nosso objetivo agora é provar o **Teorema 1** da Introdução:

Teorema 4.4.1 (Teorema 1). *Seja \mathcal{F} uma folheação na superfície singular normal X . Seja $f : Y \rightarrow X$ aplicação bimeromorfa que resolve a singularidade p e tal que a folheação induzida $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$ é reduzida em $E = f^{-1}(p)$. Se \mathcal{G} não possui sela-nó no divisor excepcional E e o feixe normal de \mathcal{F} é \mathbb{Q} -Gorenstein, então \mathcal{F} possui separatriz passando por p .*

Antes desenvolvemos alguns resultados preliminares. Primeiro, necessitaremos do seguinte resultado:

Lema 4.4.2 (Lemma 5 de [33]). *Sejam X uma superfície compacta complexa não singular, K um subconjunto compacto de X e E um fibrado vetorial holomorfo sobre X . Se $X - K$ é estritamente pseudoconvexo, então toda seção s de E sobre $X - K$ pode ser estendida a uma seção meromorfa \tilde{s} sobre X inteiro.*

Proposição 4.4.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação na superfície singular normal X . Seja $f : Y \rightarrow X$ aplicação bimeromorfa que resolve a singularidade p . Se o feixe normal de \mathcal{F} é \mathbb{Q} -Gorenstein, então, em vizinhança V de E ,*

$$N_{\mathcal{G}}^{\otimes k}|_V = \mathcal{O}_Y\left(\sum_{i=1}^n a_i E_i\right)|_V$$

onde k é o menor inteiro para o qual $N_{\mathcal{F}}^{\otimes k}$ é trivial em vizinhança de p , os a_i são números inteiros e $f^{-1}(p) = E = \sum_{i=1}^n E_i$, cada E_i sendo uma componente irredutível.

Demonstração. Primeiro notamos que, do Teorema 4.3.2, o divisor excepcional E possui uma vizinhança estritamente pseudoconvexa V . E para uma vizinhança suficientemente pequena U de p , o feixe $N_{\mathcal{F}}^{\otimes k}$ é trivial. Diminuindo U e V se necessário, podemos assumir $f^{-1}(U) = V$.

Como $N_{\mathcal{G}}^{\otimes k} = f^*N_{\mathcal{F}}^{\otimes k}$ é trivial em $V - E$, então existe uma seção holomorfa sem zeros s do fibrado $N_{\mathcal{G}}^{\otimes k}$ em $V - E$. O Lema 4.4.2 acima implica que existe extensão meromorfa \tilde{s} de s a V , a qual terá polos ou zeros ao longo de E , o que demonstra o teorema. \square

Lema 4.4.4. *Seja \mathcal{G} folheação reduzida em Y e tangente à curva $E = \sum_{i=1}^m E_i$, onde cada E_i é uma curva suave em Y . Suponhamos que \mathcal{G} não possui sela-nó em E e que*

$$E \cap \text{Sing}(\mathcal{G}) = \text{Sing}(E) = \bigcup_{i \neq j} E_i \cap E_j.$$

Se

$$N_{\mathcal{G}}^* \otimes \mathcal{O}_Y(E)|_E^{\otimes k} = \mathcal{O}_E$$

para algum inteiro $k > 0$, então a matriz de interseção de E não é negativa definida (E não é excepcional).

Demonstração. Se vale $N_{\mathcal{G}}^* \otimes \mathcal{O}_Y(E)|_E^{\otimes k} = \mathcal{O}_E$, então, pela Proposição 3.3.2, a representação $\rho_{(\mathcal{G}, E)}$ é torção. Segue do Teorema 4.3.3 que E não pode ser excepcional. \square

Demonstração do Teorema 4.4.1. Suponhamos, por absurdo, que não há ponto singular de \mathcal{G} em $E - \text{Sing}(E)$. Sendo $N_{\mathcal{F}}$ um feixe \mathbb{Q} -Gorenstein, resulta da Proposição 4.4.3 que, em vizinhança de E ,

$$N_{\mathcal{G}}^{\otimes k} = \mathcal{O}_Y\left(\sum_{i=1}^n a_i E_i\right)$$

onde $k > 0$ e os a_i são números inteiros e $E = \sum_{i=1}^n E_i$, cada E_i sendo uma componente irredutível.

Como não há sela-nó em E , então, pela fórmula de interseção com o fibrado normal dada no Teorema 2.1.12, vale

$$N_{\mathcal{G}} \cdot E_j = E \cdot E_j$$

ou seja,

$$(N_{\mathcal{G}} - E) \cdot E_j = 0$$

para $j = 1, \dots, n$. Então

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i E_i - kE\right) \cdot E_j = 0$$

ou seja,

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i - k)E_i\right) \cdot E_j = 0$$

para $j = 1, \dots, n$. Logo

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i - k)E_i\right)^2 = 0.$$

Portanto, como a matriz de interseção de E é negativa definida (Critério de Grauert 4.2.2), $a_i = k$ para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja

$$N_{\mathcal{G}}^{\otimes k} = \mathcal{O}_Y\left(k \sum_{i=1}^n E_i\right) = \mathcal{O}_Y(kE)$$

contrariando o Lema 4.4.4. Logo, existe ponto singular de \mathcal{G} em $E - \text{Sing}(E)$ e, sendo tal ponto uma singularidade reduzida não degenerada, existe separatriz pelo mesmo que não está contida em E , a qual projeta-se em separatriz de \mathcal{F} passando por p . \square

A demonstração do teorema acima nos permite enunciar um resultado mais geral.

Teorema 4.4.5. *Seja \mathcal{F} uma folheação na superfície singular normal X . Seja $f : Y \rightarrow X$ aplicação bimeromorfa que resolve a singularidade p e tal que a folheação induzida $\mathcal{G} = f^*\mathcal{F}$ é reduzida em $E = f^{-1}(p)$. Se \mathcal{G} não possui sela-nó no divisor excepcional E e*

$$N_{\mathcal{G}|_E}^{\otimes k} = \mathcal{O}_Y\left(\sum_{i=1}^n a_i E_i\right)|_E$$

onde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Então \mathcal{F} possui separatriz passando por p .

Uma pergunta natural que surge é se poderíamos supor que o feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ é \mathbb{Q} -Gorenstein e obter, nas hipóteses do Teorema 1, existência de separatriz. Conforme [13], exemplos naturais respondendo negativamente à questão surgem de campos vetoriais em *superfícies de Kato intermediárias*. Superfícies de Kato intermediárias possuem um divisor D (o divisor reduzido maximal de curvas racionais) com suporte conexo e matriz de interseção

negativa definida. Algumas delas admitem um campo de vetores holomorfo global v . Como a matriz de interseção é negativa definida, então D é invariante pelo campo v . Tais campos vetoriais são bem entendidos e sabemos que em vizinhança de D as únicas singularidades de v estão em D e qualquer germe de curva invariante passando por D está suportado em D . Assim, contraindo D num ponto p , obtemos uma superfície singular (em p) admitindo um campo de vetores holomorfo sem separatriz passando por p . Ou seja, uma folheação \mathcal{F} numa superfície singular sem separatriz passando por p , mas cujo feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ é Gorenstein.

5.1 Logaritmidade

Em [4], M. Brunella prova o seguinte resultado, baseado num teorema de Deligne:

Teorema 5.1.1 (Proposition 10 de [4]). *Seja X superfície compacta Kähler com a propriedade que o "morfismo de classe de Chern real" $H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ é injetivo. Seja \mathcal{F} uma folheação em X tangente à curva não dicrítica C tal que*

1. *existem $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}$ tais que $(\sum_{k=1}^N m_k C_{i_k})^2 > 0$;*
2. $N_{\mathcal{F}} \cdot C = C^2$;
3. $C^2 \leq (N_{\mathcal{F}})^2$.

Então \mathcal{F} é gerada por uma 1-forma meromorfa fechada Ω tendo C como divisor polar de primeira ordem.

Inspirados pelo resultado acima, a seguir damos uma condição suficiente para que uma folheação logarítmica em (X, C) seja dada por uma 1-forma logarítmica fechada em vizinhança de C :

Teorema 5.1.2. *Seja X superfície compacta. Seja \mathcal{F} folheação reduzida em X e tangente à curva $C = \sum_{i=1}^n C_i$, onde cada C_i é uma curva suave em X . Suponhamos que \mathcal{F} não possui sela-nó em C e que*

1. existem $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}$ tais que $(\sum_{k=1}^N m_k C_{i_k})^2 > 0$;
2. $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$;
3. $C^2 \leq (N_{\mathcal{F}})^2$.

Então existe 1-forma logarítmica fechada em vizinhança U de C que define a folheação nesta vizinhança.

Demonstração. Seja o fibrado conormal logarítmico $L = N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$. Os itens (2) e (3) implicam

$$L^2 \geq 0.$$

Pelo item (2), temos $L \cdot C_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, logo

$$L \cdot \sum_{k=1}^N m_k C_{i_k} = \sum_{k=1}^N m_k L \cdot C_{i_k} = 0.$$

Considerando o item (1), o Teorema do Índice de Hodge implica

$$L^2 \leq 0.$$

Portanto $L^2 = 0$ e, novamente pelo Teorema do Índice de Hodge, a classe de Chern de L é zero. Logo o fibrado L é \mathbb{S}^1 -flat (**Corollary 2.6** de [26]) e, de $L|_C = \mathcal{O}_C$, segue a trivialidade de L em vizinhança de C .

Seja ω uma 1-forma logarítmica em vizinhança U de C definindo $L|_U$. Como C é compacta, os resíduos ao longo de C_i , $i = 1, \dots, n$, são constantes, logo $d\omega$ é uma 2-forma holomorfa em U .

Assim, existem 1-formas logarítmicas ω_i definindo a folheação, com polos ao longo de C e $d\omega_i$ holomorfa, tais que

$$\omega_i = \mu_{ij} \omega_j$$

onde $\mu_{ij} \in \mathbb{S}^1$ (notemos que agora $i \in I$ são outros índices e não necessariamente $i = 1, \dots, n$; mas coloquemos $0 \in I$, $\omega_0 = \omega$). Desse modo

$$d\omega_i \wedge d\bar{\omega}_i = d\omega_j \wedge d\bar{\omega}_j$$

nos fornece uma 4-forma real Ω em X e

$$\omega_i \wedge d\bar{\omega}_i = \omega_j \wedge d\bar{\omega}_j$$

é uma 3-forma real Θ em X tal que

$$\Omega = d\omega_i \wedge d\bar{\omega}_i = d(\omega_i \wedge d\bar{\omega}_i) = d\Theta.$$

Como X é compacta, o Teorema de Stokes implica

$$\int_X \Omega = \int_X d\Theta = 0$$

Escrevendo localmente $d\omega_i = f_i dz_1 \wedge dz_2$ e

$$\Omega = d\omega_i \wedge d\bar{\omega}_i = -|f_i| dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 = |f_i| dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2$$

(com $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$, $j = 1, 2$) concluímos que $\Omega = 0$ e, portanto, $d\omega_i = 0$ para todo $i \in I$. Em particular, a 1-forma logarítmica ω é fechada. \square

Por outro lado, vale uma assertiva "dual" ao teorema anterior, isto é, partindo de uma folheação bem comportada em vizinhança de uma curva C , deduzimos a existência de outra folheação (global) dada por uma 1-forma logarítmica fechada global em X com polos em C . O argumento principal provem de J. V. Pereira (**Proposition 2.2** de [25]).

Teorema 5.1.3. *Seja X superfície compacta e $U \subset X$ um aberto. Seja \mathcal{F} folheação reduzida em U e tangente à curva $C = \sum_{i=1}^n C_i \subset U$, onde cada C_i é uma curva suave em X . Suponhamos que \mathcal{F} não possui sela-nó em C e que*

1. *existem $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}$ tais que $(\sum_{k=1}^N m_k C_{i_k})^2 > 0$;*
2. $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$;

Então existe 1-forma logarítmica fechada definida em X com divisor polar C .

Demonstração. Se vale $N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)|_C = \mathcal{O}_C$, então, pela Proposição 3.2.1, a representação $\rho_{(\mathcal{F}, C)}$ é trivial. Assim, existem $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{C}^*$ tais que o \mathbb{C} -divisor $R = \sum_{i=1}^n \delta_i C_i$ cumpre

$$R \cdot C_i = 0$$

para $i = 1, \dots, n$. Escrevendo

$$R = R_1 + \sqrt{-1}R_2$$

onde R_1 e R_2 são \mathbb{R} -divisores, temos

$$R_1 \cdot C_i = 0$$

e

$$R_2 \cdot C_i = 0$$

para $i = 1, \dots, n$. Em particular, $R_1 \cdot \sum_{k=1}^N m_k C_{i_k} = 0$ e $R_2 \cdot \sum_{k=1}^N m_k C_{i_k} = 0$.

Assim, pelo Teorema do Índice de Hodge, a classe de Chern de R é zero (vista como elemento em $H^2(X, \mathbb{C})$). Vamos mostrar que existe 1-forma logarítmica em X com divisor polar C e *resíduo* R . Com efeito, da sequência exata

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{C_i} \rightarrow 0$$

obtemos por sequência exata longa em cohomologia a aplicação de cobordo

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^n H^0(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1)$$

a qual leva uma escolha de resíduos a um cociclo de 1-formas logarítmicas $\eta_{ij} = \eta_i - \eta_j$, onde $\eta_i \in \Omega_X^1(\log C)(U_i)$ é uma 1-forma logarítmica no conjunto aberto U_i com os resíduos prescritos. (Do Teorema de Decomposição de Hodge, $H^1(X, \Omega_X^1) \simeq H^{1,1}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C})$, ou seja, a aplicação acima dá a classe de Chern de um \mathbb{C} -divisor.) Se o cociclo η_{ij} é cohomólogo a zero então

$$\eta_i - \eta_j = \beta_i - \beta_j$$

para 1-formas holomorfas fechadas $\beta_i \in \Omega_X^1(U_i)$.

Portanto, as 1-formas

$$\eta_i - \beta_i = \eta_j - \beta_j$$

determinam uma 1-forma logarítmica definida em X tangente a C e com resíduo R . Resulta das considerações feitas na prova do teorema anterior que essa 1-forma obtida é fechada. \square

Observação 5.1.4. Se vale o item 1 do teorema acima e existe um \mathbb{C} -divisor R tal que $R \cdot C_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, então segue a conclusão do teorema.

5.2 Três Folheações Muito Especiais

Conforme mencionado na Introdução, nem toda folheação admite um modelo minimal e vale o

Teorema 5.2.1 (Theorem 1, [2], página 75). *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa numa superfície compacta X sem modelo minimal. Então \mathcal{F} é bimeromorficamente equivalente a uma folheação na lista abaixo:*

1. *fibrção racional;*
2. *folheação de Riccati não trivial;*
3. *a folheação muito especial descrita na página 58 de [2].*

E a folheação do item (3) é *especial* no sentido que vale o resultado a seguir.

Teorema 5.2.2 (Proposition 3, [2], página 60). *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície compacta complexa X e seja $C \subset X$ uma curva racional nodal com um único nó p , invariante por \mathcal{F} e com $C^2 = C \cdot C = 3$. Suponha que p é uma singularidade reduzida não degenerada de \mathcal{F} e que é a única singularidade de \mathcal{F} em C . Então \mathcal{F} é única a menos de transformações birracionais.*

A partir de agora, o teorema principal a ser demonstrado (no próximo capítulo) é o

Teorema 5.2.3 (Teorema 3). *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície compacta complexa X e seja $C \subset X$ um link para \mathcal{F} . Então temos apenas três possibilidades, cada uma única a menos de transformações birracionais:*

1. $C^2 = 1$ e \mathcal{F} é birracional a uma folheação \mathcal{E}_1 em $Bl_3(\mathbb{P}^2)/\alpha$, onde $\alpha \in Aut(Bl_3(\mathbb{P}^2))$ e $Bl_3(\mathbb{P}^2)$ é um blow-up de \mathbb{P}^2 em três pontos não colineares;
2. $C^2 = 2$ e \mathcal{F} é birracional a uma folheação \mathcal{E}_2 em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1/\beta$, $\beta \in Aut(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$;
3. $C^2 = 3$ e \mathcal{F} é birracional a uma folheação \mathcal{E}_3 em \mathbb{P}^2/γ (folheação muito especial de Brunella), $\gamma \in Aut(\mathbb{P}^2)$.

Note que estamos trabalhando livremente com folheações em superfícies singulares.

A seguir veremos a descrição das três folheações citadas no teorema acima.

5.2.1 A Folheação Muito Especial de Brunella

Seja \mathcal{L} a folheação linear em \mathbb{P}^2 dada em coordenadas afins pela 1-forma

$$\omega = \lambda y dx - x dy = \left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right) y dx - x dy.$$

Essa folheação possui um ciclo de três linhas invariantes $C_1 + C_2 + C_3$. Além disso, a folheação \mathcal{L} é γ -invariante, onde $\gamma : (s : t : u) \mapsto (u : s : t)$ pertence a $Aut(\mathbb{P}^2)$.

A folheação quociente $\mathcal{E}_3 = \mathcal{L}/\gamma$ obtida tomando o quociente de $(\mathbb{P}^2, \mathcal{L})$ pelo grupo gerado por γ é, por definição, a *folheação muito especial de Brunella* (veja [2, Chapter 4]).

Notemos que a escolha de λ não afeta a classe birracional de \mathcal{E}_3 , pois a involução $(x, y) \mapsto (y, x)$ conjuga as duas possíveis construções.

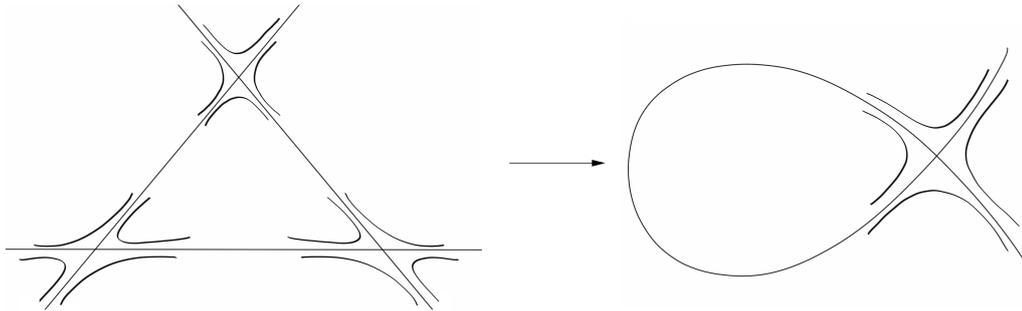


Figura 5.1: Folheação Muito Especial de Brunella.

5.2.2 Segunda Folheação Muito Especial

Consideremos a folheação \mathcal{M} em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dada em coordenadas afins (x, y) pela 1-forma linear

$$\omega = \lambda y dx - x dy = \pm \sqrt{-1} y dx - x dy.$$

onde $\lambda = \pm \sqrt{-1}$. Então é invariante o ciclo de quatro linhas

$$(\mathbb{P}^1 \times \{0\}) + (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) + (\{0\} \times \mathbb{P}^1) + (\{\infty\} \times \mathbb{P}^1),$$

no qual as únicas singularidades são os pontos de cruzamento, cada uma sendo reduzida não degenerada. O automorfismo de ordem 4

$$\beta : (u : v, z : w) \mapsto (z : w, v : u).$$

é tal que, em coordenadas afins (x, y) , $\beta(x, y) = (y, \frac{1}{x})$ e

$$\beta^* \omega = \beta^*(\lambda y dx - x dy) = \lambda \frac{1}{x} dy - y \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx,$$

portanto, como $\lambda = \pm\sqrt{-1}$,

$$\omega \wedge \beta^*\omega = (\lambda y dx - x dy) \wedge \left(\lambda \frac{1}{x} dy + \frac{y}{x^2} dx\right) = (\lambda^2 + 1) \frac{y}{x} dx \wedge dy = 0.$$

Notemos que β permuta ciclicamente o ciclo de quatro linhas

$$(\mathbb{P}^1 \times \{0\}) + (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) + (\{0\} \times \mathbb{P}^1) + (\{\infty\} \times \mathbb{P}^1).$$

Então a folheação quociente \mathcal{E}_2 obtida tomando-se o quociente de $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{M})$ pelo grupo gerado por β é a folheação desejada, isto é, \mathcal{E}_2 tem um link de auto-interseção 2.

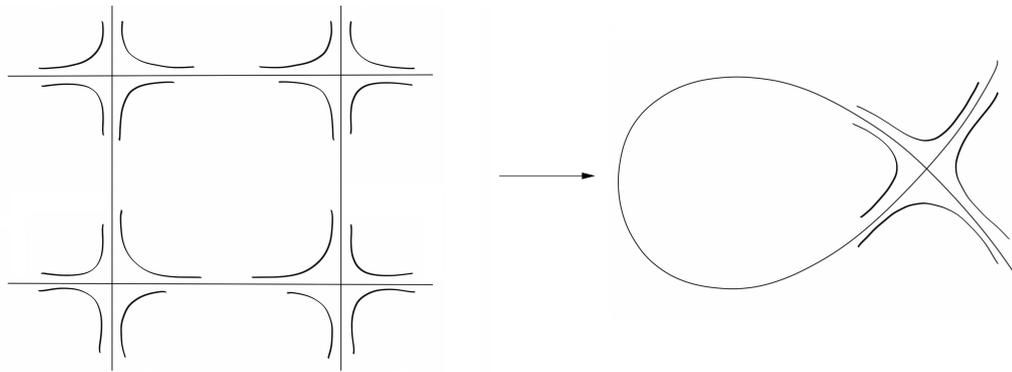


Figura 5.2: Segunda Folheação Muito Especial.

Novamente a escolha de λ não afeta a classe birracional de \mathcal{E}_2 , pois a involução $(u : v, z : w) \mapsto (z : w, u : v)$ conjuga as duas possíveis construções.

5.2.3 Terceira Folheação Muito Especial

Seja \mathcal{L} e γ como na subseção 5.2.1. Relembremos que \mathcal{L} tem um ciclo invariante de três linhas $C_1 + C_2 + C_3$, onde $C_i = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^2 \mid z_i = 0\}$, $i = 1, 2, 3$. Consideremos a transformação de Cremona padrão

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2,$$

$$f([z_1 : z_2 : z_3]) = [z_2 z_3 : z_1 z_3 : z_1 z_2].$$

Notemos que \mathcal{L} é f -invariante.

Se fizermos blow-up nos três pontos de cruzamentos do ciclo \mathcal{L} -invariante de três linhas projetivas $C_1 + C_2 + C_3$, obtemos um morfismo birracional

$\pi_3 : Bl_3(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^2$ e uma folheação $\mathcal{N} = \pi_3^* \mathcal{L}$ com um ciclo de seis (-1) -curvas racionais suaves, digamos

$$\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 + C_4 + C_5 + C_6$$

no qual as singularidades de \mathcal{N} são apenas os pontos de cruzamentos (e elas são reduzidas não degeneradas), onde $\tilde{C}_i = \pi^* C_i$, $i = 1, 2, 3$. Notemos que

$$\alpha = \pi_3^{-1} \circ f \circ \pi_3 : Bl_3(\mathbb{P}^2) \rightarrow Bl_3(\mathbb{P}^2)$$

é um automorfismo de ordem 6 que preserva a folheação e permuta ciclicamente o ciclo de seis curvas racionais suaves.

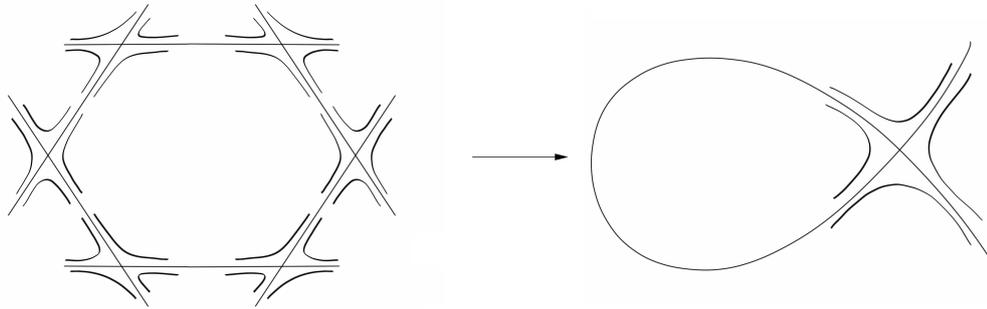


Figura 5.3: Terceira Folheação Muito Especial.

A folheação quociente $\mathcal{E}_1 = \mathcal{N}/\alpha$ possui um link de auto-interseção 1, logo \mathcal{E}_1 é a folheação desejada.

5.3 Folheações de Riccati

Relembremos a definição de folheação de Riccati.

Definição 5.3.1. Uma folheação \mathcal{F} numa superfície compacta é chamada *folheação de Riccati* se existe uma fibração racional $\pi : X \rightarrow B$ (possivelmente com fibras singulares), onde B é uma curva complexa suave, cuja fibra genérica é transversal a \mathcal{F} .

Teorema 5.3.2 (Proposition 1, [2], página 51). *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa compacta X se seja $C \subset X$ uma curva racional suave de auto-interseção $C^2 = 0$. Então*

1. se $Z(\mathcal{F}, C) = 0$ então \mathcal{F} é uma fibração racional;

2. se $Z(\mathcal{F}, C) = 2$ então \mathcal{F} é uma folheação de Riccati;

3. $Z(\mathcal{F}, C)$ não pode ser igual a 1.

Seja então \mathcal{F} folheação em X que é Riccati com respeito a uma fibração $\pi : X \rightarrow B$. Se R é uma fibra regular de π que é \mathcal{F} -invariante, então ([2, Chapter 4]): existem no máximo duas singularidades em R e existem coordenadas $(x, y) \in D \times \mathbb{P}^1$ em vizinhança de R , onde D é um disco, tais que a folheação é dada pela 1-form

$$\omega = (a(x)y^2 + b(x)y + c(x))dx + h(x)dy.$$

Seja q uma singularidade de ω . Após uma mudança na coordenada y , podemos supor $q = (0, 0)$. Escrevendo $h(x) = h_k x^k + \dots$, onde $k > 0$ e $h_k \neq 0$, definimos a *multiplicidade* da fibra R como $l(\mathcal{F}, R) = k$.

A seguinte definição nos será útil, pois destaca uma propriedade que nos ajudará a ter uma ideia do que acontece numa redução de singularidades de folheações de Riccati (conforma o lema que veremos logo mais).

Definição 5.3.3. Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa X . Uma singularidade $p \in X$ de \mathcal{F} será dita *efetiva* se o divisor excepcional de uma (logo todas) redução de singularidades de \mathcal{F} em p for uma cadeia de curvas racionais suaves L_1, \dots, L_n tal que existe no máximo uma componente não invariante e se L_i é tal componente, então

$$L_i \cap L_j \neq \emptyset \Rightarrow \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap L_j = 1 - \delta_{ij}$$

onde $\tilde{\mathcal{F}}$ é a folheação reduzida e δ_{ij} é o *delta de Kronecker*, isto é, $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Suponhamos que a parte linear de um campo de vetores que gera \mathcal{F} em vizinhança da singularidade p tem multiplicidade algébrica 1. Então, pela forma canônica de Jordan, esta parte linear é dada por uma das seguintes matrizes:

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*; (2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*;$$

$$(3) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*; (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja π um blow-up em p . As três proposições seguintes são de fácil verificação.

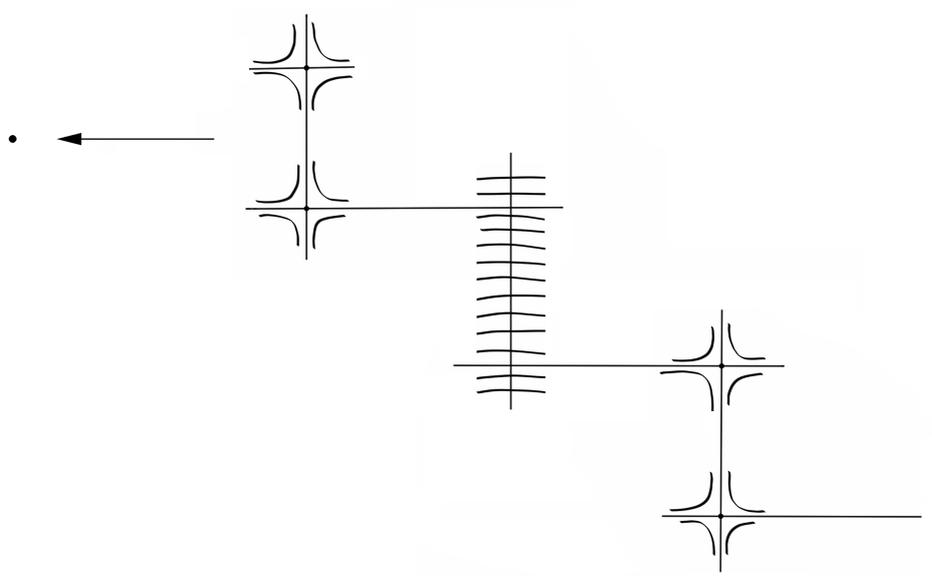
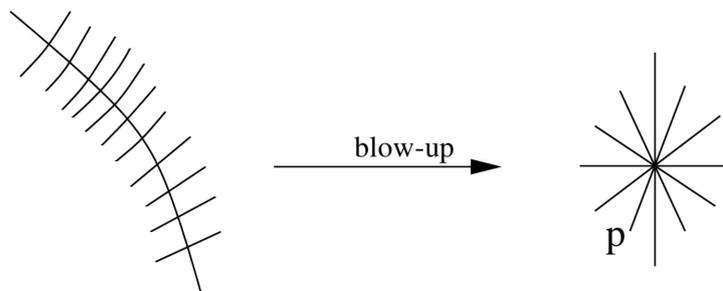


Figura 5.4: Singularidade efetiva.

Proposição 5.3.4. *Se p é uma singularidade de tipo (2) com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, então o divisor excepcional de π é não invariante e não tem singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$.*

□

Figura 5.5: Blow-up tipo 2 com $\lambda_1 = \lambda_2$.

Proposição 5.3.5. *Se p é uma singularidade de tipo (2) com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então o divisor excepcional de π é invariante e tem duas singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$, cada uma de tipo (2), com autovalores $\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2$ e $\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1$, respectivamente.*

□

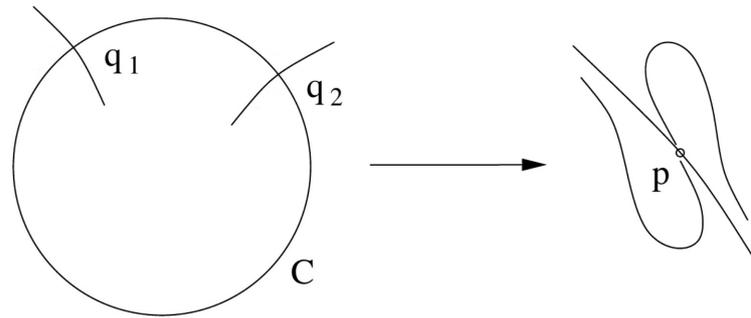


Figura 5.6: Blow-up tipo 2 com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Proposição 5.3.6. *Se p é uma singularidade de tipo (3), então o divisor excepcional de π é invariante e tem apenas uma singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$, de tipo (1).*

□

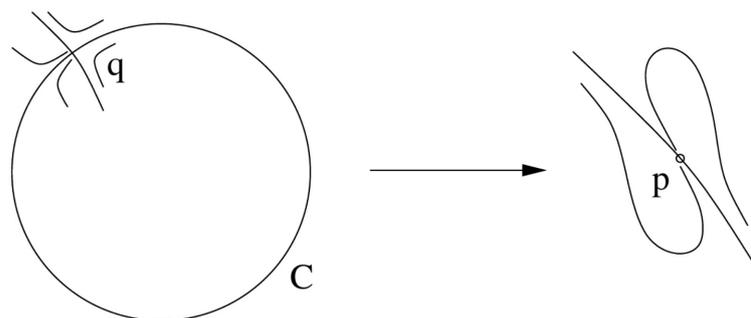


Figura 5.7: Blow-up tipo 3.

Notemos que se p é de tipo (1), então p é reduzida e portanto é uma singularidade efetiva (singularidade não dicrítica é efetiva). Combinando as três proposições precedentes, podemos concluir a seguinte

Proposição 5.3.7. *Se p é uma singularidade de tipo (1), (2) ou (3), então p é efetiva.*

□

Agora voltemos ao caso de \mathcal{F} ser folheação de Riccati. Primeiro, notemos que, por [2, **Chapter 3**, páginas 55-56], se p possui parte linear não trivial e nilpotente (tipo (4)), então p é não dicrítica, logo p é efetiva.

Portanto:

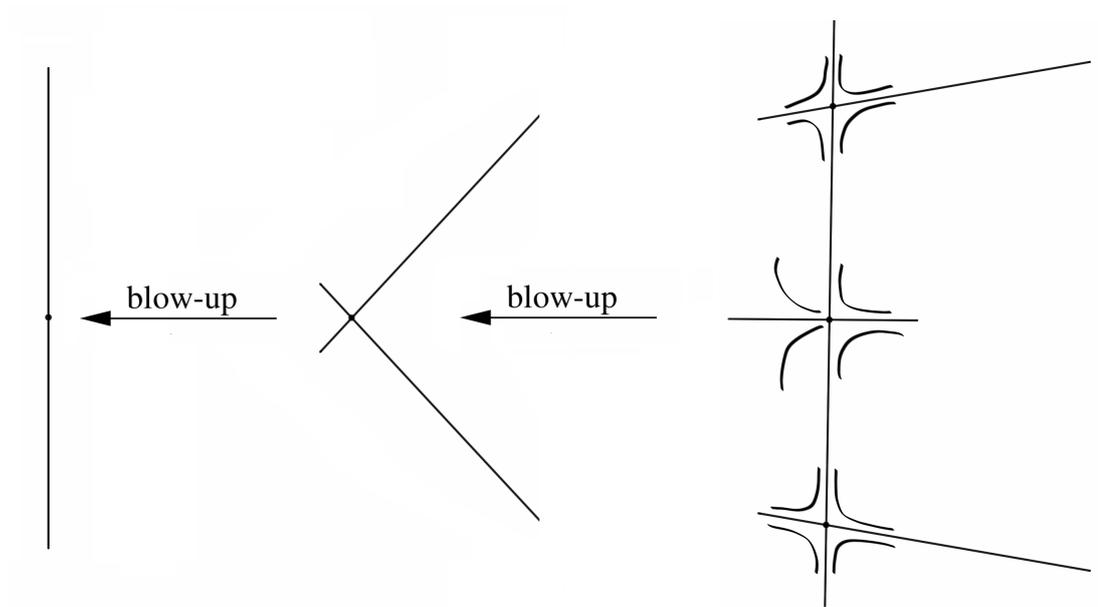


Figura 5.8: Redução de singularidade nilpotente de folheação de Riccati.

Proposição 5.3.8. *Se $p = (0, 0)$ é uma singularidade (de folheação de Riccati) com parte linear não trivial, então q é efetiva.*

□

Em geral vale o

Lema 5.3.9. *Seja $p = (0, 0)$ singularidade da folheação de Riccati \mathcal{F} e $\tau : Y \rightarrow X$ uma redução de singularidades em p . Se R é a fibra invariante passando por p , seja $S = \tau^{-1}(R) = D_1 + \dots + D_m$, onde cada D_i é uma curva racional suave. Então existe no máximo uma componente irredutível não invariante pela folheação e se D_k é tal componente, então cada componente conexa de $\sum_{i \neq k} D_i$ possui uma componente irredutível com apenas uma singularidade de \mathcal{F} .*

Demonstração. Como antes, a folheação é dada, em coordenadas convenientes, pela 1-forma

$$\omega = (a(x)y^2 + b(x)y + c(x))dx + h(x)dy.$$

Se a parte linear de ω em p é não trivial, o resultado segue da Proposição 5.3.8.

Então supomos que a parte linear de ω em p é trivial. Logo

$$b(0) = c(0) = c'(0) = 0$$

e

$$l(\mathcal{F}, R) = k > 1.$$

Como $Sing(\omega) \subset Sing(\mathcal{F})$ tem codimensão dois em X , temos $a(0) \neq 0$. Portanto ω tem multiplicidade algébrica dois em p . Como $b(0)^2 - 4a(0)c(0) = 0$, p é a única singularidade de \mathcal{F} em R . O blow-up em p possui em $R' \cap E'$ (E' é o divisor excepcional e R' é o transformado estrito de R) uma singularidade de tipo $d(xy) = 0$ e nenhuma mais em R' . Se colapsarmos R' , então E' se torna uma nova fibra R_1 de uma nova fibração racional, invariante por uma nova folheação de Riccati \mathcal{F}_1 . Desta forma, existem no máximo duas singularidades de R_1 , mas agora $l(\mathcal{F}_1, R_1) < l(\mathcal{F}, R) = k$.

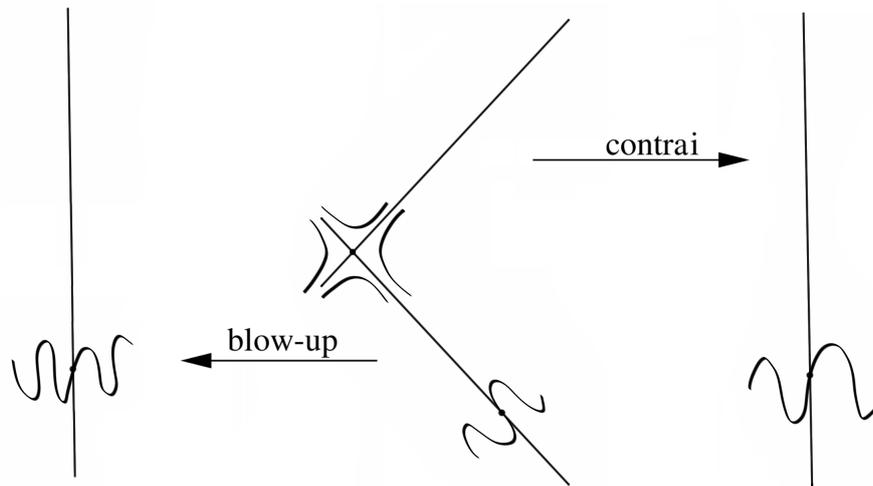


Figura 5.9: Transformação Elementar.

Esse procedimento será chamado *transformação elementar* com centro p . Após um número finito de transformações elementares $\sigma_1 : X = X_0 \dashrightarrow X_1$, $\sigma_2 : X_1 \dashrightarrow X_2, \dots, \sigma_m : X_{(m-1)} \dashrightarrow X_m$, obtemos folheações de Riccati $\mathcal{F}_1 = (\sigma_1)_*\mathcal{F}$ em $X_1, \dots, \mathcal{F}_m = (\sigma_m)_*\mathcal{F}_{m-1}$ em X_m e fibras invariantes R_1 em X_1, \dots, R_m em X_m de modo que a folheação \mathcal{F}_m possui uma fibra invariante R_m tal que uma 1-forma geradora para a folheação tem multiplicidade algébrica um. Ou seja, se ω_m é tal 1-forma, então

$$\omega_m = (a_m(x)y^2 + b_m(x)y + c_m(x))dx + h_m(x)dy.$$

com $c_m(0) = h_m(0) = 0$, mas $b_m(0) \neq 0$ ou $c'_m(0) \neq 0$ ou $h'_m(0) \neq 0$. Então a singularidade $p_m = (0, 0)$ é efetiva pela Proposição 5.3.8. Possivelmente

exista uma segunda singularidade q_m na fibra R_m , no entanto, apenas uma delas pode ser dicrítica e vamos supor que, se ocorre, p_m é a dicrítica.

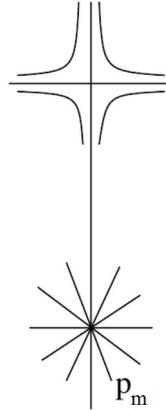


Figura 5.10: Fibra invariante possui no máximo duas singularidades e no máximo uma delas é dicrítica.

Se $\sigma = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1 : X \dashrightarrow X_m$, temos a fatoração dada pelo diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X = X_0 & \xrightarrow{\sigma} & X_m \end{array}$$

onde π_1 e π_2 são obtidas por sequência de blow-ups e π_1 é birregular de $Y - \pi_1^{-1}(p)$ sobre $X - \{p\}$ e π_2 é birregular de $Y - \pi_2^{-1}(q)$ sobre $X - \{q\}$, onde $q \neq p_m$.

Seja \mathcal{G} a folheação induzida em Y , isto é, $\mathcal{G} = \pi_1^* \mathcal{F} = \pi_2^* \mathcal{F}_m$. Seja $\tilde{p} \in Y$ tal que $\pi_2^{-1}(p_m) = \{\tilde{p}\}$. Como p_m é efetiva, então \tilde{p} é uma singularidade efetiva de \mathcal{G} . Notemos que $\pi_1^{-1}(p) \cup \pi_2^{-1}(q)$ é \mathcal{G} -invariante e \mathcal{G} é não dicrítica nas singularidades sobre $\pi_1^{-1}(p) \cup \pi_2^{-1}(q) - \{\tilde{p}\}$.

Seja $\rho : Z \rightarrow Y$ uma redução de singularidades de \mathcal{G} em \tilde{p} e possivelmente em outra singularidade \tilde{q} , não dicrítica, se $\# \text{Sing}(\mathcal{F}_m) \cap R_m = 2$. Então ρ tem a propriedade dada pela Definição 5.3.3 porque \tilde{p} é efetiva (e \tilde{q} , se existe, é não dicrítica). Seja $\tau = \pi_1 \circ \rho$ e notemos que essa é uma redução de singularidades em p . Observemos que $\pi_1^{-1}(p)$ possui uma componente irredutível (transformado estrito da fibra original) com apenas uma singularidade (e esta é reduzida), conforme já observamos ao aplicar transformações elementares. Sendo \tilde{p} efetiva, segue o resultado. \square

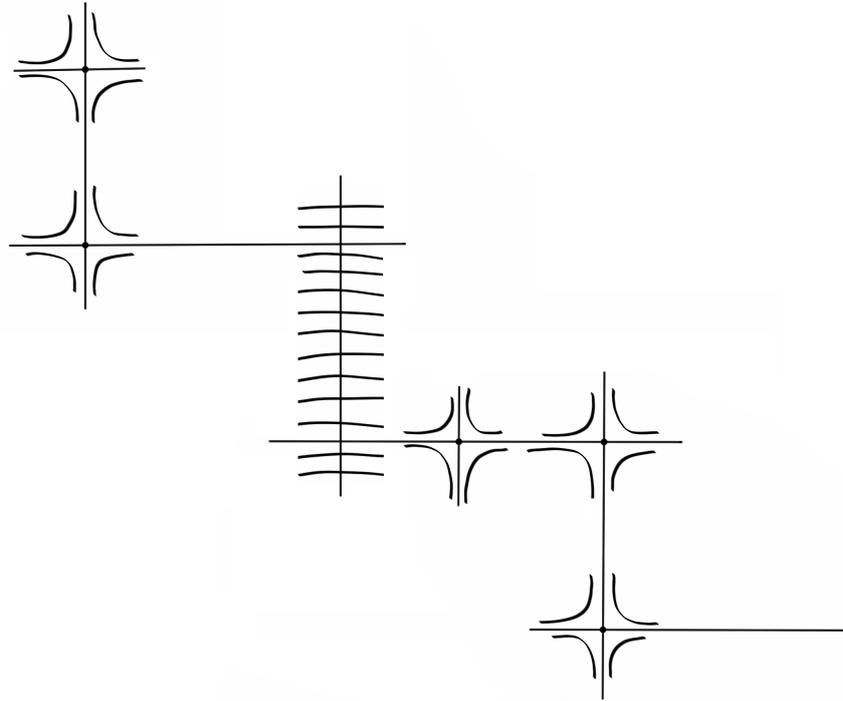


Figura 5.11: Redução de singularidades de folheações de Riccati.

Proposição 5.3.10. *Sejam \mathcal{F} uma folheação de Riccati e $\tau : Y \rightarrow X$ uma redução de singularidades de uma fibra invariante R . Seja $S = \tau^{-1}(R) = D_1 + \dots + D_m$, onde cada D_i é uma curva racional suave. Então existe no máximo uma componente irredutível não invariante pela folheação e se D_k é tal componente, então cada componente conexa de $\sum_{i \neq k} D_i$ possui uma componente irredutível com apenas uma singularidade de \mathcal{F} .*

Demonstração. Se a fibra invariante R possui apenas uma singularidade da folheação, então o resultado segue diretamente do Lema 5.3.9 acima.

Se $\#Sing(\mathcal{F}) \cap R = 2$, então ao menos uma das duas singularidades em R é não dicrítica. Sendo assim, o resultado segue novamente do Lema 5.3.9. \square

Como consequência de nossas discussões até aqui, temos a

Proposição 5.3.11 (Teorema 4). *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa compacta X . Seja $C = C_1 + \dots + C_n$ uma curva conexa invariante, onde cada C_i é uma curva suave. Suponhamos que $C \cap Sing(\mathcal{F}) = Sing(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ são singularidades reduzidas não degeneradas e $\#C_i \cap Sing(\mathcal{F}) > 1$, $i = 1, \dots, n$. Se \mathcal{F} é Riccati com respeito a uma fibração racional $\pi : X \rightarrow$*

B , então toda fibra de π por um ponto de $C \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$ está completamente suportada em C .

Demonstração. Seja $p \in C \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$. Se $R = \pi^{-1}(\pi(p))$ é a fibra passando por p , podemos escrever

$$R = C_{i_1} + \dots + C_{i_k} + E_1 + \dots + E_l$$

onde $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ e E_1, \dots, E_l são curvas racionais suaves fora de $\{C_1, \dots, C_n\}$, e, pelo Teorema 2.3.5, existe uma transformação bimeromorfa

$$\sigma = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1 : X \rightarrow Y$$

onde cada σ_i , $i = 1, \dots, m$, é um blow-up num ponto p_i , tal que $S = \sigma(R)$ é uma fibra regular para a fibração $\rho = \pi \circ \sigma^{-1}$ (σ é contração de componentes de R).

Notemos que se fizermos blow-up num ponto regular de uma folheação, o divisor excepcional é invariante, com apenas uma singularidade, do tipo $d(xy) = xdy + ydx$.

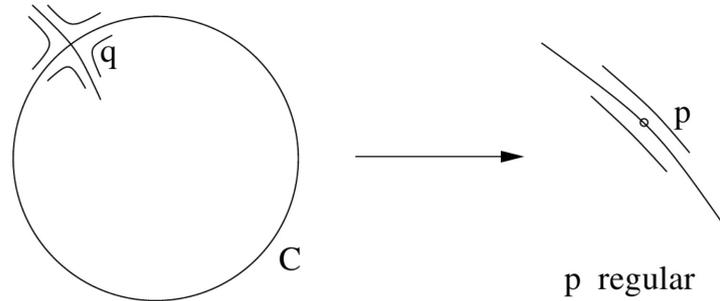


Figura 5.12: Blow-up em ponto regular.

Portanto, se p_i é um ponto regular para a folheação induzida $(\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)_* \mathcal{F}$, então $(\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)^{-1}(p_i) = D_1 + \dots + D_r$ é \mathcal{F} -invariante e existe D_s (curva racional) tal que

$$\#D_s \cap (D_1 + \dots + \widehat{D_s} + \dots + D_r) = \#D_s \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = 1.$$

Agora, se $C \cap (\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)^{-1}(p_i) \neq \emptyset$, então, como $(\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)^{-1}(p_i)$ é conexo e \mathcal{F} -invariante, concluímos que $(\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)^{-1}(p_i) \subset C$, logo $D_s = C_{i_s}$, que resulta na contradição

$$1 = \#D_s \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \#C_{i_s} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) > 1.$$

Então, se contrairmos $(\sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)^{-1}(p_i)$, não afetaremos a curva C .

Assim, podemos olhar para σ como uma redução de singularidades de $\sigma_*(\mathcal{F})$ em S e usar a Proposição 5.3.10 para concluir: se $p \in C_i \cap C_j$ então C_i ou C_j é uma componente de R , caso contrário teremos uma componente não invariante de R com singularidade.

Se o conjunto $\{E_1, \dots, E_l\}$ é não vazio, como R é conexo, existem C_i e E_j componentes de R tais que $C_i \cap E_j \neq \emptyset$. Então E_j não é \mathcal{F} -invariante. Mas então, pela Proposição 5.3.10, a curva

$$C_{i_1} + \dots + C_{i_k} + \sum_{i \neq j} E_i$$

é \mathcal{F} -invariante e a componente conexa que contém C_i tem alguma componente irredutível com apenas um ponto singular da folheação, o que é absurdo, pois tal componente conexa deverá estar completamente suportada em C . Então temos $\{E_1, \dots, E_l\} = \emptyset$. \square

Rigidez das Folheações Muito Especiais

6.1 Ciclos Invariantes

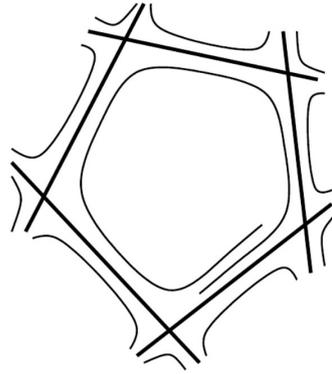
A seguinte definição nos permitirá aplicar resultados anteriores sobre folheações de Riccati.

Definição 6.1.1. Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa X . Um (k, l) -ciclo para \mathcal{F} é um ciclo de $k > 1$ curvas racionais suaves $C = C_1 + \dots + C_k \subset X$ tal que:

1. $C^2 = n > 0$;
2. $C_i^2 = l, i = 1, \dots, n$;
3. C é \mathcal{F} -invariante;
4. $C \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ são singularidades reduzidas não degeneradas de \mathcal{F} .

Corolário 6.1.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa compacta X e seja $C = C_1 + \dots + C_k \subset X$ um (k, l) -ciclo para \mathcal{F} . Então $(k, l) \in \{(2, -1), (3, -1), (6, -1), (2, 0), (4, 0), (3, 1)\}$.*

Demonstração. A prova é uma aplicação direta mas tediosa da Proposição 5.3.11, por meio de blow-ups nos pontos de cruzamento do ciclo ou blow-downs de curvas excepcionais.

Figura 6.1: (k, l) -ciclo.

Seja $C = C_1 + \dots + C_k \subset X$ um (k, l) -ciclo para a folheação \mathcal{F} em X . Sejam $C_i \cap C_{i+1} = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, k-1$, e $C_k \cap C_1 = \{p_k\}$, onde os k pontos p_1, \dots, p_k são distintos. Notemos que

$$C^2 = (C_1 + \dots + C_k)^2 = C_1^2 + \dots + C_k^2 + 2k = kl + 2k = k(l+2)$$

logo $l > -2$.

Se $l > 0$, escolhamos $z \in \text{Sing}(C) = \bigcup_{i \neq j} C_i \cap C_j$ um ponto de cruzamento. Após uma sequência de l blow-ups começando em z , obtemos um novo ciclo de curvas racionais

$$\tilde{C} = E_l + \dots + E_1 + D_1 + D_2 + \dots + D_k$$

onde $D_1^2 = 0$, $E_1^2 = -1$, $E_2^2 = -2, \dots, E_l^2 = -2$, $D_2^2 = l$, $D_3^2 = l, \dots, D_k^2 = l-1$ (se $k = 2$, então $D_2^2 = D_k^2 = l-1$), e $D_1 \cap E_1 = \{p\}$, $D_1 \cap D_2 = \{q\}$. Então, pelo Teorema 5.3.2, a folheação $\sigma^*\mathcal{F}$ é Riccati com respeito a uma fibração racional que possui D_1 como uma fibra regular, onde σ é a sequência de blow-ups. Pela Proposição 5.3.11, uma fibra R passando por um ponto em $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap \tilde{C} - D_1$ deve estar suportada em \tilde{C} , e tal fibra deve também ser disjunta de D_1 , pois D_1 também é uma fibra da mesma fibração. Isto é, devemos ter

$$R \subset \tilde{C} - D_1 \subset E_l + \dots + E_1 + D_2 + \dots + D_k.$$

Como $D_1 \cap E_1 \neq \emptyset$ e $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, então D_1 e E_1 não podem ser componentes de R , logo

$$R \subset E_l + \dots + E_2 + D_3 + \dots + D_k.$$

Se $k = 2$ e $l = 1$, então, de fato

$$R \subset E_1 \cap D_2 = \{p\}$$

e obtemos uma contradição, uma vez que R não se reduz a um ponto.

Para $l > 1$, uma curva conexa suportada em $E_l + \dots + E_2 + D_3 + \dots + D_k$ não pode ser transformada via contrações numa curva racional de auto-interseção zero, logo não pode ser uma fibra de uma fibração racional.

Se $k > 3$ e $l = 1$, temos

$$\tilde{C} = E_1 + D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_k$$

onde $D_1^2 = 0$, $E_1^2 = -1$, $D_2^2 = l = 1$, $D_3^2 = l = 1, \dots$, $D_k^2 = l - 1 = 0$. Neste caso, se R é disjunto de D_k , então

$$R \subset E_1 + D_3 + \dots + D_{k-1}$$

mas uma curva conexa suportada em $E_1 + D_3 + \dots + D_{k-1}$ não pode ser transformada via contrações numa curva racional de auto-interseção zero.

Portanto, se $l > 0$, o único (k, l) -ciclo é o $(3, 1)$ -ciclo.

Agora, suponha $l = 0$. Então, como $C_i^2 = 0$, $i = 1, \dots, k$, cada C_i será fibra de uma fibração racional. Lembremos que curvas racionais disjuntas de auto-interseção zero são fibras da mesma fibração racional (Teorema 2.3.5), o que implica facilmente que $k < 5$ (caso contrário teríamos fibras distintas da mesma fibração racional com interseção não vazia). Se $k = 3$, então teríamos três fibrações racionais, o que não pode ocorrer, uma vez que, pelos Teoremas 2.3.4 e 2.3.5, devemos ter no máximo duas fibrações. Logo as únicas possibilidades são $(k, l) = (2, 0)$ e $(k, l) = (4, 0)$, por razões puramente da geometria das superfícies regradas (na argumentação não usamos a folheação, apenas o ciclo).

Finalmente, usando contrações em lugar de blow-ups, podemos concluir que não existem $(k, -1)$ -ciclos se $(k, -1)$ não pertence ao conjunto

$$\{(2, -1), (3, -1), (6, -1)\}.$$

□

Podemos também realizar uma prova mais geométrica da **Proposição 4** de [2, Chapter 3]. A demonstração de Brunella usa a dinâmica da folheação muito especial para chegar a uma contradição ao supor que a mesma é Riccati.

Proposição 6.1.3. *Seja \mathcal{F} uma das folheações especiais \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 ou \mathcal{E}_3 . Então \mathcal{F} não é birracional a uma folheação de Riccati.*

Demonstração. Assim como antes, após um blow-up no ponto de nó no link de \mathcal{F} , concluímos, pela Proposição 5.3.11, que \mathcal{F} não pode ser Riccati. □

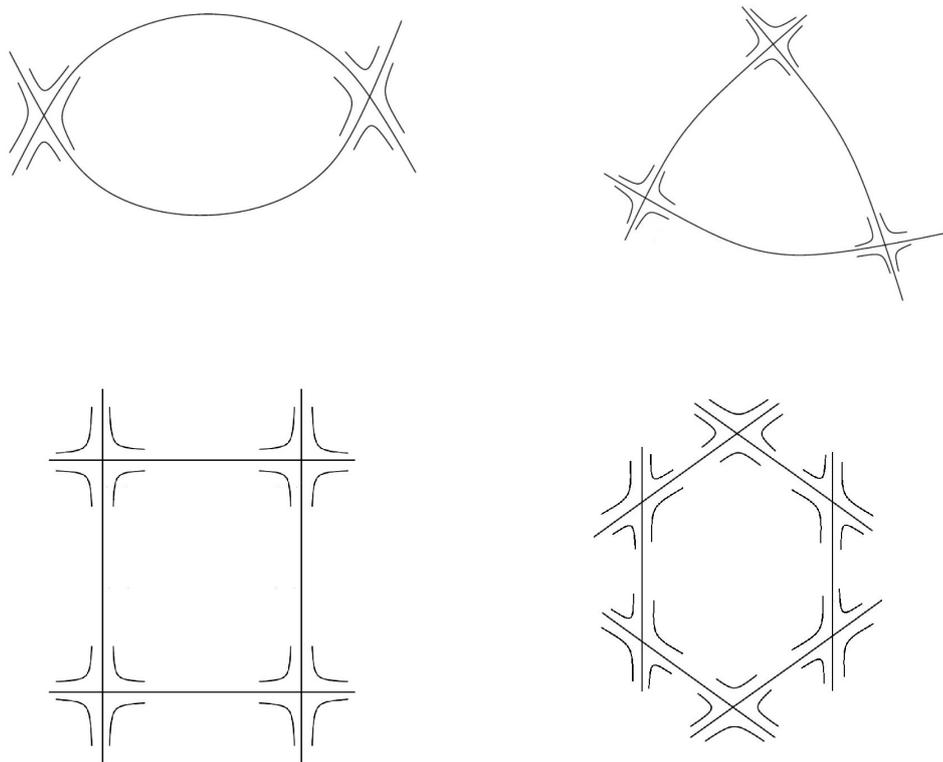


Figura 6.2: (k, l) -ciclos possíveis.

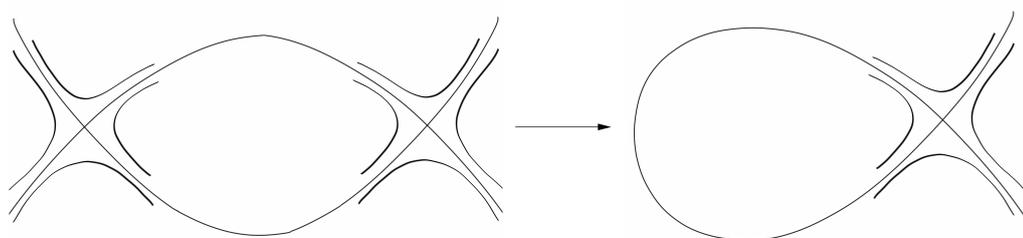


Figura 6.3: Blow-up de um link.

6.2 Proposições e Lemas Básicos

Aqui desenvolveremos mais "tecnologia" para a prova de nosso resultado principal.

O próximo lema é a generalização do **Lemma 1** de [2, Chapter 4]. A prova é essencialmente a mesma.

Lema 6.2.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície compacta complexa X e seja $C \subset X$ um link para \mathcal{F} com nó $p \in C$. Seja $L = N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$ e λ o quociente de autovalores em p . Suponha que $-\lambda$ é uma k -ésima raiz primitiva da unidade, $k > 2$. Então existe uma vizinhança aberta U de C tal que $L^{\otimes k}|_U = \mathcal{O}_U$.*

Demonstração. Como λ é não real, dado um ponto $q \in C - \{p\}$ e uma transversal T a \mathcal{F} em q , o grupo de holonomia correspondente de \mathcal{F} , $Hol_{\mathcal{F}} \subset \text{Diff}(T, q)$, é infinito cíclico, gerado por um difeomorfismo hiperbólico com parte linear $\exp(2\pi i\lambda)$ (veja [8] ou [22]). Portanto, existe em T uma coordenada z que é $Hol_{\mathcal{F}}$ -linearizante, $z(q) = 0$. Extendemos essa coordenada a uma vizinhança aberta completa de q em X , constantemente nas folhas locais de \mathcal{F} . A 1-forma logarítmica $\eta_q = \frac{dz}{z}$ define \mathcal{F} , é fechada e $\eta_q|_T$ é $Hol_{\mathcal{F}}$ -invariante.

Pelo Teorema de Linearização de Poincaré, numa vizinhança de p a folheação é definida por uma 1-forma logarítmica fechada $\eta_p = \frac{dz}{z} - \lambda \frac{dw}{w}$ (veja [8] ou [22]). Se q está próximo a p , então $\eta_p|_T$ é $Hol_{\mathcal{F}}$ -invariante.

Obtemos uma vizinhança aberta U de C pela união de conjuntos abertos U_j , tal que em cada U_j a folheação é definida por uma 1-forma logarítmica η_j , com polos em C , que é fechada e $Hol_{\mathcal{F}}$ -invariante nas transversais. Em $U_i \cap U_j$ temos $\eta_i = f_{ij}\eta_j$, $f_{ij} \in \mathcal{O}^*$. Como η_i e η_j são fechadas, então $df_{ij} \wedge \eta_j = 0$, logo f_{ij} é constante ao longo das folhas locais \mathcal{F} . Além disso, $f_{ij}|_T$ é $Hol_{\mathcal{F}}$ -invariante e portanto constante porque a holonomia é hiperbólica.

Pensando η_j como seções locais do fibrado conormal logarítmico $L = N_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)$, então a propriedade prévia mostra que $L|_U$ é definida por um cociclo localmente constante. Portanto, para mostrar que $L^{\otimes k}|_U = \mathcal{O}_U$ é suficiente mostrar que $L^{\otimes k}|_C = \mathcal{O}_C$. Podemos agora usar o resíduo de η_j ao longo de C para calcular o cociclo. Para η_q com $q \in C - \{p\}$ podemos escolher uma 1-forma para produzir qualquer resíduo não nulo. Mas temos uma restrição em torno de p : o resíduo de η_p numa separatriz é $-\lambda$ vezes o resíduo na outra separatriz. Como $(-\lambda)^k = 1$, claramente $L^{\otimes k}|_C = \mathcal{O}_C$. □

Também a proposição seguinte é uma adaptação do argumento de Brunella em [2, **Chapter** 3, página 61-62]. Sua demonstração depende do lema logo a seguir:

Lema 6.2.2 ([23], página 32). *Seja X uma superfície compacta complexa e*

$C \subset X$ uma curva compacta irredutível. Se $C^2 > 0$ então $X - C$ é estritamente pseudoconvexo.

Proposição 6.2.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície compacta complexa X e seja $C \subset X$ um link para \mathcal{F} com nó $p \in C$. Seja λ o quociente de autovalores em p . Suponha que $-\lambda$ é uma k -ésima raiz primitiva da unidade, $k > 2$. Então existe uma superfície compacta Z , um morfismo birracional $f : Z \rightarrow X$, uma vizinhança U de C e um conjunto aberto $V \subset Z$ tal que $f|_V : V \rightarrow U$ é um recobrimento regular de grau k sobre U . Além disso, $(f|_V)^{-1}(C)$ é um ciclo de k curvas racionais suaves, cada qual com auto-interseção $C^2 - 2$ (isto é, um $(k, C^2 - 2)$ -ciclo) e os automorfismos de recobrimento de $f|_V$ permutam ciclicamente as curvas no ciclo.*

Demonstração. Pelo lema anterior, o fibrado de linha $L^{\otimes k}$ tem uma seção não trivial sobre U sem zeros. Como $C^2 > 0$, o conjunto aberto $X - C$ é estritamente pseudoconvexo pelo Lema 6.2.2. Então, pelo Lema 4.4.2, esta seção pode ser estendida para o X inteiro como uma seção global meromorfa s de $L^{\otimes k}$.

Considere $E(L)$ e $E(L^{\otimes k})$ a compactificação do espaço total de L e $L^{\otimes k}$, respectivamente. Seja \tilde{s} a compactificação do gráfico de s em $E(L^{\otimes k})$. Seja $\tau : E(L) \rightarrow E(L^{\otimes k})$ a aplicação definida pelo k -ésimo produto tensorial.

Seja Z a desingularização de $\tau^{-1}(\tilde{s})$ e eliminação de indeterminações da projeção $\tau^{-1}(\tilde{s}) \dashrightarrow X$. Tome $f : Z \rightarrow X$ a projeção induzida.

□

Lema 6.2.4. *Sejam $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$ três pontos não colineares em \mathbb{P}^2 . Seja $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ dada por $\gamma(z_1 : z_2 : z_3) = (z_3 : z_1 : z_2)$. Se $J \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ é outro automorfismo tal que $J(p_1) = p_2$, $J(p_2) = p_3$ e $J(p_3) = p_1$, então J é conjugado a γ , isto é, existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\gamma = g \circ J \circ g^{-1}$.*

Demonstração. Em coordenadas homogêneas, $J(z_1 : z_2 : z_3) = (xz_3 : yz_1 : zz_2)$, onde $xyz \neq 0$. Podemos supor $xyz = 1$. Como $\text{Aut}(\mathbb{P}^2) = \text{PGL}(3, \mathbb{C})$, escrevendo J e γ como matrizes

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

precisamos mostrar que existe uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C})$$

tal que $AJ = \gamma A$ em $PGL(3, \mathbb{C})$.

Se $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, facilmente se verifica que a igualdade $AJ = \gamma A$ é equivalente a $x\gamma(c) = a$, $y\gamma(a) = b$, $z\gamma(b) = c$. Seja $a \neq 0$ qualquer. Definamos $b = y\gamma(a)$ e $c = z\gamma(b) = zy\gamma^2(a)$. Então a matriz $A = (a, b, c) \in GL(3, \mathbb{C})$ é uma solução. □

Proposição 6.2.5. *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície compacta complexa Z e seja $C_1 + C_2 + C_3 \subset Z$ um $(3, 1)$ -ciclo para \mathcal{F} . Suponhamos que existe um \mathcal{F} -automorfismo birracional $\phi : Z \dashrightarrow Z$ de ordem três permutando ciclicamente as curvas racionais. Então \mathcal{F} é birracional à folheação linear \mathcal{L} em \mathbb{P}^2 da subseção 5.2.1 e a folheação quociente \mathcal{F}/ϕ é birracional a $\mathcal{E}_3 = \mathcal{L}/\gamma$.*

Demonstração. Podemos supor $\phi(C_1) = C_2$, $\phi(C_2) = C_3$ e $\phi(C_3) = C_1$. Consideremos, para cada i , uma seção s_i de $\mathcal{O}_Z(C_i)$ anulando-se em C_i . Se fizermos blow-up no ponto de cruzamento $C_1 \cap C_2$, obtemos que $\tilde{C}_1^2 = \tilde{C}_2^2 = 0$, onde \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 são os transformados estritos de C_1, C_2 , respectivamente. Portanto, como \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 são curvas racionais disjuntas de auto-interseção zero, \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 são fibras regulares da mesma fibração racional sobre \mathbb{P}^1 (veja Teorema 2.3.5 ou [1], página 192), logo as duas curvas são linearmente equivalentes e assim C_1 e C_2 também o são. Pelo mesmo argumento nos outros pontos de cruzamento, concluímos que C_1, C_2, C_3 são linearmente equivalentes, portanto podemos definir uma aplicação racional

$$(s_1 : s_2 : s_3) : Z \dashrightarrow \mathbb{P}^2.$$

Vemos facilmente que esta aplicação é birracional e birregular em uma vizinhança do ciclo $C_1 + C_2 + C_3$, cuja imagem é um ciclo de três linhas em \mathbb{P}^2 . A folheação induzida $\tilde{\mathcal{F}}$ em \mathbb{P}^2 é linear porque o grau da folheação é

1. O automorfismo birracional ϕ é transformado num automorfismo birracional $\tilde{\phi}$ de \mathbb{P}^2 que é birregular em uma vizinhança das três linhas e portanto é globalmente birregular; além disso, este automorfismo permuta ciclicamente as três linhas. Pelo Lema 6.2.4 $\tilde{\phi}$ é conjugado ao automorfismo $\gamma(z_1 : z_2 : z_3) = (z_3 : z_1 : z_2)$, isto é, existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\gamma = g \circ \tilde{\phi} \circ g^{-1}$. Como γ é um $g_*\tilde{\mathcal{F}}$ -automorfismo, um cálculo direto mostra que $g_*\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{L}$ em coordenadas homogêneas $[z_1 : z_2 : z_3]$. Em particular, \mathcal{F}/ϕ é birracional a $\mathcal{E}_3 = \mathcal{L}/\gamma$. □

Analogamente podemos provar os dois resultados seguintes.

Lema 6.2.6. *Seja $p_1 = (1 : 0, 1 : 0)$, $p_2 = (0 : 1, 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 1, 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 0, 0 : 1)$ quatro pontos em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Seja $\beta \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ dado por $\beta(z_1 : z_2, z_3 : z_4) = (z_4 : z_3, z_1 : z_2)$. Se $J \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ é outro automorfismo tal que $J(p_1) = p_2$, $J(p_2) = p_3$, $J(p_3) = p_4$ e $J(p_4) = p_1$, então J é conjugado a β , isto é, existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ tal que $\beta = g \circ J \circ g^{-1}$. □*

Proposição 6.2.7. *Seja \mathcal{H} uma folheação numa superfície compacta complexa W e seja $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \subset W$ um $(4, 0)$ -ciclo para \mathcal{H} . Suponhamos que existe um \mathcal{H} -automorfismo birracional $\phi : W \dashrightarrow W$ de ordem 4 permutando ciclicamente as curvas racionais. Então \mathcal{H} é birracional à folheação linear \mathcal{M} em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ da subseção 5.2.2 e a folheação quociente \mathcal{W}/ϕ é birracional a $\mathcal{E}_2 = \mathcal{M}/\beta$.*

Demonstração. Consideremos, para cada i , uma seção s_i de $\mathcal{O}_Z(D_i)$ anulando-se em D_i . Definimos uma aplicação racional

$$(s_1 : s_2, s_3 : s_4) : W \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Vemos facilmente que esta aplicação é birracional e birregular numa vizinhança do ciclo $D_1 + D_2 + D_3 + D_4$, cuja imagem é um ciclo de quatro linhas em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Portanto, a folheação induzida $\tilde{\mathcal{H}}$ em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ deixa invariante o ciclo de quatro linhas

$$(\mathbb{P}^1 \times \{0\}) + (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) + (\{0\} \times \mathbb{P}^1) + (\{\infty\} \times \mathbb{P}^1)$$

cujas singularidades no ciclo são os pontos de cruzamento, cada uma reduzida não degenerada. Então por **Proposition 2** de [2, Chapter 4] (veja também

[19] e [20]) esta folheação em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ é dada em coordenadas afins (x, y) pela 1-forma linear

$$\omega = \lambda y dx - x dy.$$

O automorfismo ϕ é transformado num automorfismo birracional $\tilde{\phi}$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que é birregular em uma vizinhança das quatro linhas e assim é globalmente birregular; além disso, esse automorfismo permuta ciclicamente as quatro linhas. Pelo Lema 6.2.6 $\tilde{\phi}$ é conjugado ao automorfismo $\beta(z_1 : z_2, z_3 : z_4) = (z_3 : z_4, z_2 : z_1)$, isto é, existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\beta = g \circ \tilde{\phi} \circ g^{-1}$. Como β é um $g_*\tilde{\mathcal{H}}$ -automorfismo, um cálculo direto mostra que $g_*\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{M}$ em coordenadas homogêneas $[z_1 : z_2, z_3 : z_4]$. Em particular, \mathcal{H}/ϕ é birracional a $\mathcal{E}_2 = \mathcal{M}/\beta$. □

6.3 Prova do Teorema 5.2.3 (Teorema 3)

Nossa demonstração do teorema consiste primeiro em determinar a unicidade das folheações com links de auto-interseção 1, 2 e 3 e depois mostrar que uma folheação com link de auto-interseção maior do que 4 deveria ser uma folheação de Riccati, o que conduz a um absurdo. O caso de auto-interseção 4 se exclui facilmente pelas hipóteses do enunciado do teorema.

6.3.1 Cálculos Preliminares

Seja p o nó de C e $C^2 = n$ um número inteiro positivo. Se as hipóteses são como antes (isto é, C é um link para \mathcal{F}), podemos usar a Fórmula do Índice de Camacho-Sad 2.1.8 para calcular o quociente de auto-valores de \mathcal{F} em p :

$$n = C^2 = CS(\mathcal{F}, Y, p) = \lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}.$$

Então obtemos a equação

$$\lambda^2 + (2 - n)\lambda + 1 = 0$$

cuja solução é

$$\lambda = \frac{n - 2 \pm \sqrt{n(n - 4)}}{2}.$$

Portanto:

1. se $C^2 = 1$ então $-\lambda$ é uma raiz sexta primitiva da unidade;

2. se $C^2 = 2$ então $-\lambda$ é uma raiz quarta primitiva da unidade;
3. se $C^2 = 3$ então $-\lambda$ é uma raiz terça primitiva da unidade;
4. se $C^2 = 4$ então $\lambda = 1$;
5. se $C^2 > 4$ então λ é um número positivo irracional.

Agora trataremos separadamente as diferentes possibilidades para a auto-interseção do link.

6.3.2 Auto-interseção 1

Como $-\lambda$ é uma raiz sexta primitiva da unidade, pela Proposição 6.2.3 obtemos um recobrimento ramificado $F : Z \rightarrow X$, regular e de ordem 6 numa vizinhança U de C . Os automorfismos de recobrimento sobre U estendem, por construção, a transformações birracionais de Z . Seja $\alpha : Z \dashrightarrow Z$ um automorfismo de recobrimento birracional de ordem 6.

Agora, levantamos \mathcal{F} a Z via F , obtendo uma nova folheação \mathcal{G} que deixa invariante seis curvas racionais suaves $C_i, i = 1, \dots, 6$, formando um ciclo sobre C . Temos $C_i^2 = -1, C^2 = 1$. As únicas singularidades de \mathcal{G} no ciclo são os seis pontos de cruzamento, todos reduzidos não degenerados assim como p .

Podemos contrair três (-1) -curves disjuntas do ciclo, digamos C_1, C_3 e C_5 , obtendo uma folheação $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{Z})$ birracional a (\mathcal{G}, Z) . Notemos que $\tilde{\mathcal{G}}$ possui um ciclo invariante de três curvas racionais suaves de auto-interseção 1. Ademais, $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$ induz um $\tilde{\mathcal{G}}$ -automorfismo birracional que permuta ciclicamente esse ciclo. Portanto, pela Proposição 6.2.5, $\tilde{\mathcal{G}}$ é birracional à folheação linear \mathcal{L} em \mathbb{P}^2 dada na subseção 5.2.1. Do mesmo modo, contraindo as três (-1) -curvas C_2, C_4 e C_6 , obtemos uma folheação birracional a $(\mathcal{L}, \mathbb{P}^2)$. Então $\alpha : Z \dashrightarrow Z$ induz um \mathcal{L} -automorfismo $\tilde{\alpha} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Como $\tilde{\alpha}$ é único a menos de conjugação (Lema 6.2.5), o mesmo vale para α . Portanto \mathcal{F} é birracional à folheação \mathcal{E}_1 da subseção 5.2.3.

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{Z}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{L}, \mathbb{P}^2) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & (\mathcal{L}, \mathbb{P}^2)
 \end{array}$$

6.3.3 Auto-interseção 2

Neste caso, $-\lambda$ é uma raiz quarta primitiva da unidade. Novamente pelo Lema 6.2.3 temos um recobrimento ramificado $G : W \rightarrow X$, que é regular e de ordem 4 numa vizinhança de C . Levantamos \mathcal{F} para W , obtendo uma folheação \mathcal{H} que deixa invariante quatro curvas racionais suaves $D_i, i = 1, \dots, 4$, formando um ciclo sobre C . Analogamente, $D_i^2 = 0$, porque $C^2 = 1$. As únicas singularidades de \mathcal{H} no ciclo são os quatro pontos de cruzamento, todas reduzidas não degeneradas assim como p . Logo, a Proposição 6.2.7 implica que \mathcal{F} é birracional a \mathcal{E}_2 .

6.3.4 Auto-interseção 3

Este é o caso coberto pelo Teorema 5.2.2. De qualquer modo, a prova consiste justamente no Lema 6.2.3 combinado com a Proposição 6.2.5.

6.3.5 Auto-interseção 4

Agora $\lambda = 1$, portanto p é uma singularidade dicrítica linerizável (conforme [8] ou [22]; e, em particular, após um blow-up em p , a auto-interseção do transformado estrito de C é $C^2 - 4 = 0$, logo obtemos uma fibração racional sobre \mathbb{P}^1). Mas, como λ é racional positivo, a folheação não é reduzida em p , portanto essa situação não é compatível com nossas hipóteses.

6.3.6 Auto-interseção >4

Como $n > 4$ temos que λ é um número irracional positivo, donde a singularidade é reduzida não degenerada e linerizável.

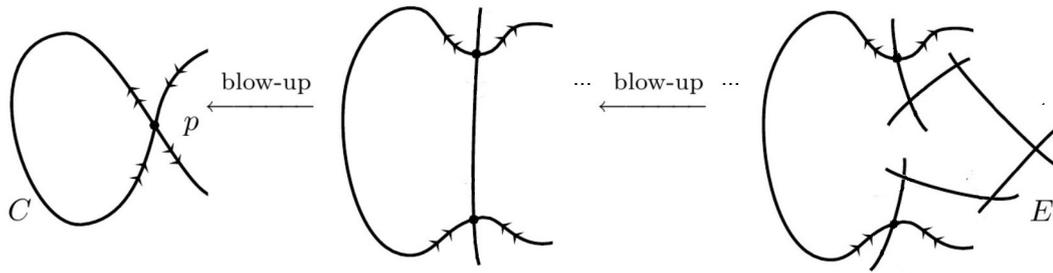
Após k blow-ups a auto-interseção do transformado estrito de C é

$$\tilde{C}^2 = C^2 - 4 - k + 1 = n - 3 - k$$

(o primeiro blow-up em p e os seguintes blow-ups em um dos pontos singulares da folheação no transformado estrito de C). Portanto, depois de $n - 3$ blow-ups obtemos $\tilde{C}^2 = 0$. Seja $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ a transformação obtida por composição desses blow-ups, $\tilde{C} = \sigma^*(C)$,

$$E = \sigma^{-1}(p) = E_1 + \dots + E_{(n-3)}$$

onde E_i são curvas racionais, com $E_1^2 = -1$ e $E_j^2 = -2$ se $j > 1$ e $\tilde{\mathcal{F}} = \sigma^*(\mathcal{F})$.

Figura 6.4: $n - 3$ blow-ups.

Como $Z(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{C}) = 2$, $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma folheação de Riccati com respeito a uma fibração $\pi : \tilde{X} \rightarrow B$, onde B é uma curva suave (pela Proposição 5.3.2). Como o divisor excepcional E é uma união de curvas racionais suaves, a base B é uma curva racional suave.

Sejam $\{q\} = E_1 \cap E_2$, que é uma singularidade da folheação, e R a fibra (possivelmente singular) passando por q . Pela Proposição 5.3.11, R deve estar suportada em E , o que é impossível, pois E tem matriz de interseção negativa definida.

□

6.4 Construção de Curvas Racionais Nodais

Primeiro observemos que não existe curva racional nodal (com único nó) de auto-interseção 4 em superfície compacta. Isso é consequência do Teorema 2.3.3.

Por outro lado, existem curvas racionais nodais de auto-interseção 1, 2 e 3, conforme vimos ao descrever as folheações muito especiais \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 e \mathcal{E}_3 (com seus respectivos links).

Em geral, começando com $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, após alguns blow-ups, obtemos um ciclo de curvas racionais suaves

$$D + E = D + E_1 + \dots + E_n$$

onde $D^2 = 0$, $E_1^2 = -1$, $E_2^2 = -2, \dots, E_n^2 = -2$ ($n > 1$). Contraindo o divisor excepcional $E = E_1 + \dots + E_n$, obtemos uma curva racional nodal C com um único nó $\{p\} = \text{Sing}(C)$ e auto-interseção

$$C^2 = n - 1 + 4 = n + 3.$$

Referências Bibliográficas

- [1] W. BARTH, C. PETERS AND A. VAN DE VEN, *Compact complex surfaces*. Springer-Verlag, 2003.
- [2] M. BRUNELLA, *Birational geometry of foliations*. Monografias de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2000. 138 pp.
- [3] M. BRUNELLA, *Minimal Models of Foliated Algebraic Surfaces*. Bull. Soc. math. France, **127**, (1999), 289-305.
- [4] M. BRUNELLA, *Some remarks on indices of holomorphic vector fields*. Publ. Mat., **41**, (1997), 527-544.
- [5] C. CAMACHO, *Quadratic forms and holomorphic foliations on singular surfaces*. Math. Ann., **282**, (1988), 177-184.
- [6] C. CAMACHO, A. LINS-NETO, *Teoria geométrica das folheações*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1979.
- [7] C. CAMACHO, P. SAD, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Ann. of Math., **115**, (1982), 579-595.
- [8] C. CAMACHO, P. SAD, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. Monografias de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.

- [9] J. CANO, *Construction of invariant curves for singular holomorphic vector fields*. Am. Math. Soc., **125.9**, (1997), 2649-2650.
- [10] G. DLOUSSKY, K. OELJEKLAUS, M. TOMA, *Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs*. Comment. Math. Helv., **75** (2000), no. 2, 255-270.
- [11] H. GRAUERT, *Über modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*. Math. Ann., **146**, (1962), 331-368.
- [12] A. GROTHENDIECK, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*. Am. J. M., **79**, (1957), 121-138.
- [13] A. GUILLOT, *Vector fields, separatrices and Kato surfaces*. Annales de l'institut Fourier, **64.3** (2014): 1331-1361. <<http://eudml.org/doc/275572>>.
- [14] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer (1998).
- [15] R. HARTSHORNE, *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*. Lecture Notes in Mathematics **156**, Springer-Verlag (1970).
- [16] D. HUYBRECHTS, *Complex Geometry: An Introduction*. Springer (2005).
- [17] R. LAZARSFELD, *Positivity in Algebraic Geometry*. University of Michigan (2001).
- [18] A. LINS-NETO, *Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two*. Lectures Notes in Mathematics, **1345**, Springer-Verlag, New York (1988) 192-232.
- [19] A. LINS-NETO, *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*. J. Differential Geometry, **26** (1987) 1-31.
- [20] A. LINS-NETO, B. SCÁRDUA, *Introdução à Teoria das Folheações Algébricas Complexas*. Monografias de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2011.
- [21] W. S. MASSEY, *Algebraic topology, an introduction*. Graduate Texts in Mathematics **56**, Springer (1977).

- [22] J.-F. MATTEI, R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières*. Ann. Sci., ENS, **13** (1980), 469-523.
- [23] A. NEEMAN, *Ueda Theory: Theorems and problems*. AMS Memoires, **415** (1989).
- [24] T. OHSAWA, *Vanishing theorems on complete Kahler manifolds*. Publ RIMS, Kyoto Univ., **20** (1984), 21-38.
- [25] J. V. PEREIRA, G. COUSIN, *Transversely affine foliations on projective manifolds*. Mathematical Research Letters, **21** (2014), no. 5, 989-1014.
- [26] J. V. PEREIRA, *Fibrations, divisors and transcendental leaves. With an appendix by Laurent Meersseman*. J. Algebraic Geom., **15** (2006), no. 1, 87-110.
- [27] J.V. PEREIRA, P.F SANCHEZ, *Transformation groups of holomorphic foliations*. Commun. Anal. Geom. **10**(5), 1115-1123 (2002).
- [28] E. A. SANTOS, *Positive rational nodal leaves in surfaces*. Braz Math Soc, New Series (2016). doi:10.1007/s00574-016-0011-y
- [29] M. SEBASTIANI, *Sur l'existence de séparatrices locales des feuilletages des surfaces*. An. Acad. Bras. Ci., **69** (1997), 159-162.
- [30] M. G. SOARES, R. S. MOL, *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*. Monografias de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001.
- [31] O. SUZUKI, *Neighborhoods of a Compact Non-Singular Algebraic Curve Imbedded in a 2-Dimensional Complex Manifold*. Publ RIMS, Kyoto Univ., **11** (1975), 185-199.
- [32] M. TOMA, *A short proof of a theorem of Camacho and Sad*. Enseign. Math., **45** (1999), 311-316.
- [33] T. UEDA, *Neighborhood of a Rational Curve with a Node*. Publ RIMS, Kyoto Univ., **27** (1991), 681-693.
- [34] C. VOISIN, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I*. Cambridge studies in advanced mathematics **76**, Springer (2002).