FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS 2012
SEGUNDA PROVA

1. (2,0 pontos) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em uma superfície complexa compacta S. Mostre que se $\mathcal{F}$ possui uma infinidade de superfícies de Riemman compactas invariantes então $\mathcal{F}$ possui integral primeira meromorfa. (Dica: Existe um artigo de Étienne Ghys provando este Teorema. O objetivo do exercício é que vocês leiam, entendam e reescrevam a prova. Podem usar que as cohomologias de feixes coerentes em variedades complexas compactas e a cohomologia de De Rham em variedades diferenciáveis compactas são de dimensão finita, não é necessário provar.)

2. (2,0 pontos) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em uma superfície complexa compacta S. Suponha que $\mathcal{F}$ possui uma superfície de Riemann compacta invariante com auto-intersecção zero e que $\mathcal{F}$ é definida por uma 1-forma holomorfa global. Mostre que $\mathcal{F}$ possui integral primeira meromorfa. Apresente um exemplo em que $\mathcal{F}$ é definida por 1-forma holomorfa global, possui curva invariante de auto-intersecção -1, mas possui folhas transcendentes (transcendente = não contida em nenhuma superfície de Riemann compacta). (Dica: Comece mostrando que em superfícies complexas compactas toda 1-forma holomorfa é fechada utilizando o Teorema de Stokes.)

3. (2,0 pontos) Seja $S_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, $n \geq 0$, a n-ésima superfície de Hirzebruch. Calcule a dimensão de $H^0(S_n, TS_n)$. (Dica: Se tudo mais falhar descreva S_n por meio de mudanças de cartas e estude as condições para que um campo polinomial em uma carta afim $\mathbb{C}^2 \subset S_n$ estenda-se holomorficamente nas outras três cartas)

4. (2,0 pontos) Construa/apresente exemplos(um para cada item abaixo) com as seguintes propriedades.

- Uma superfície projetiva que não possui folheações lisas.
- Uma superfície projetiva que só possui uma folheação lisa.
- Uma superfície projetiva que possui exatamente duas folheações lisas.
- Uma superfície projetiva que possui uma infinidade de folheações lisas.

5. (4,0 pontos) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau 2. Suponha que $\mathcal{F}$ possui exatamente duas singularidades não reduzidas e estas possuem número de Milnor 1 e são linearizáveis com quociente de autovalores iguais à 2. Mostre que:

(a) se a reta ℓ passando pelas duas singularidades não reduzidas não é invariante por $\mathcal{F}$ então $\mathcal{G}$, a resolução minimal de $\mathcal{F}$, é uma folheação de Riccati. (Dica: Encontre primeiro a fibração. Esta fibração pode ter fibras singulares).

(b) se a reta ℓ passando pelas duas singularidades reduzidas é $\mathcal{F}$ invariante então existe uma terceira singularidade $p \in sing(\mathcal{F}) \cap \ell$ e o índice de Camacho-Sad desta singularidade com respeito à ℓ é igual à $-3/2$, -3 ou 0.

(c) (nas hipóteses do item anterior) se a terceira singularidade possui índice igual à zero então $\mathcal{G}$ é Riccati.

(d) (nas hipóteses do item (b)) se a terceira singularidade possui índice igual à -3 então $\mathcal{G}$ é uma folheação de tipo geral. Em particular, $\mathcal{G}$ não é uma folheação de Riccati.

(e) (nas hipóteses do item (b)) o que acontece se a terceira singularidade possui índice igual à $-3/2$?

Observações

1. É permitido trabalhar nas questões em colaboração. Quando for o caso favor indicar na redação. Não haverá penalização para colaborações.

2. Mesmo no caso em que questões forem feitas em colaboração, a redação deve ser feita individualmente.

3. Não é permitido comunicar soluções obtidas individualmente aos colegas.

4. Não é permitido pedir ajuda aos monitores.

5. A clareza da exposição será levada em conta na correção.

6. Sim, o número total de pontos da prova é 12. A nota final será calculada tomando o mínimo entre 10 e a soma das notas das duas provas dividida por 2.