SOBRE A DENSIDADE DE FOLHEAÇÕES SEM SOLUÇÕES ALGÉBRICAS

JORGE VITÓRIO PEREIRA

1. Introdução

O objetivo central destas notas é apresentar uma prova do célebre Teorema de Jouanolou:

Teorema 1. *Uma folheação genérica de grau maior ou igual a* 2 *em* $\mathbb{P}^2$ *não admite nenhuma curva algébrica invariante.*

A estratégia adoptada para a demonstração é a mesma de [CP05], onde o Teorema de Jouanolou é generalizado para folheações de dimensão um em variedades projetivas arbitrárias. Apesar da abordagem ser essencialmente a mesma, ao restringir-me a folheações em $\mathbb{P}^2$ uma série de dificuldades técnicas simplificam-se enormemente. Evito assim também as questões relacionadas a conjuntos algébricos invariantes de dimensão estritamente maior que um. Acredito que este texto possa ser uma útil primeira leitura para aqueles interessados nos resultados de [CP05].

2. Folheações holomorfas em $\mathbb{P}^2$

Seja $d \geq 0$ um inteiro e x, y, z coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^2$. Uma *folheação holomomorfa singular* $\mathcal{F}$ de grau d em $\mathbb{P}^2$ é definida por uma 1-forma

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz\,,$$

com $A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinômios homogêneos de grau $d+1$ satisfazendo a relação de Euler

$$\Omega\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) = xA + yB + zC = 0\,.$$

O conjunto singular de $\mathcal{F}$, denotado por $\mathrm{sing}(\mathcal{F})$, é o subconjunto de $\mathbb{P}^2$ formado pelos zeros comuns de A, B e C. Quando este conjunto é finito dizemos que a folheação $\mathcal{F}$ é *saturada.* Para folheações saturadas, segue de um Teorema de Darboux, que existem exatamente d^2+d+1 singularidades contadas com multiplicidades (ver [Br00], [LS97]).

Observe que ao restringir Ω à uma reta L de $\mathbb{P}^2$, por exemplo $L = \{z = 0\}$, vale a igualdade

$$i^*\Omega = H_d(x, y)(xdy - ydx)\,,$$

onde $i(x, y) = (x, y, 0)$ induz a inclusão da reta L em $\mathbb{P}^2$ e $H_d \in \mathbb{C}[x, y]$ é um polinômio homogêneo de grau d. Quando H_d é identicamente zero diz-se que L é $\mathcal{F}$-invariante. Caso contrário os zeros de H_d definem d pontos em L, os pontos de tangência entre a folheação $\mathcal{F}$ e a reta L. Eis portanto a definição geométrica do

2000 *Mathematics Subject Classification.* 32J18,32Q55,37F75.

Key words and phrases. Folheações Holomorfas.

Agradeço S. C. Coutinho pela leitura atenciosa de uma primeira versão destas notas.

grau de uma folheação de $\mathbb{P}^2$: o número de tangências (contadas com multiplicidades) de $\mathcal{F}$ com uma reta L não $\mathcal{F}$-invariante.

O $\mathbb{C}$-espaço vetorial das 1-formas descritas acima é usualmente denotado por $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(d+2))$. Com o intuito de *enxugar* a notação faremos $\Sigma_d = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(d+2))$. Um cálculo elementar mostra que

$$\dim_{\mathbb{C}} \Sigma_d = d^2 + 4d + 3$$

Duas formas Ω e Ω' definem a mesma folheação se, e somente se, diferem pela multiplicação por uma constante complexa não nula. Desta forma $\mathbb{F}ol(d)$, o espaço das folheações de grau d, identifica-se naturalmente com $\mathbb{P}(\Sigma_d)$.

Se denotamos por $S_k \subset \mathbb{C}[x,y,z]$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial formado pelos polinômios homogêneos de grau k vemos que para $1 \le k \le d$ temos uma aplicação natural

$$\begin{aligned} \varphi_k : \mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{F}ol(d-k) &\to \mathbb{F}ol(d) \\ ([P],[\Omega]) &\mapsto [P\Omega] . \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que o conjunto das folheções de grau d não saturadas é igual a

$$\bigcup_{1\le k\le d} \varphi_k(\mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{F}ol(d-k)) .$$

Em particular, após contar dimensões, vemos que *quase todas* as folheações de grau d são saturadas.

3. Curvas algébricas invariantes

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau d definida pela 1-forma Ω e $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva algébrica irredutível. Analogamente ao caso de retas dizemos que C é $\mathcal{F}$-invariante se $i^*\Omega \equiv 0$, onde $i : C_{lisa} \to \mathbb{C}^3$ induz a inclusão da parte lisa de C em $\mathbb{P}^2$. Se C é definida pelo polinômio homogêneo irredutível $F \in \mathbb{C}[x,y,z]$ o fato de C ser $\mathcal{F}$-invariante traduz-se na existência de uma 2-forma polinomial Θ_F com coeficientes homogêneos de grau d tal que

$$\Omega \wedge dF - F\Theta_F = 0 . \tag{1}$$

Reciprocamente se vale a relação acima então a curva definida por $\mathcal{F}$ é invariante.

O interessante da relação (1) é que ela funciona igualmente bem para polinômios homogêneos não-reduzidos, i.e., se a decomposição em fatores primos de F é igual a $F_1^{n_1} \cdots F_i^{n_i}$ então a relação (1) é satisfeita se, e somente se, cada um dos F_j define uma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante.

Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k(d) &= \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d) | \text{ existe curva } \mathcal{F}\text{-invariante de grau } k\} \\ \mathcal{D}_k(d) &= \{(x,\mathcal{F}) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) | x \text{ pertence a uma curva } \mathcal{F}\text{-invariante de grau } k\} . \end{aligned}$$

Aqui por curvas $\mathcal{F}$-invariantes de grau k refiro-me a curvas não necessariamente reduzidas tais que **todas** as componentes irredutíveis são $\mathcal{F}$-invariantes.

Proposição 1. *Os conjuntos $\mathcal{C}_k(d)$ e $\mathcal{D}_k(d)$ são fechados algébricos.*

Demonstração. Denotarei por Λ_d o $\mathbb{C}$-espaço vetorial das 2-formas em $\mathbb{C}^3$ com coeficientes homogêneos de grau d. Considere

$$\mathcal{Z}_k(d) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}(\Sigma_d \times \Lambda_d) \times \mathbb{P}(S_k)$$

o subconjunto definido por

$$\mathcal{Z}_k(d) = \{(x, [(\Omega, \Theta)], [F]) \mid \Omega \wedge dF - F\Theta = 0 \text{ e } F(x) = 0\} .$$

Observe que o lugar de indeterminação da aplicação racional

$$\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}(\Sigma_d \times \Lambda_d) \times \mathbb{P}(S_k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \times \mathbb{P}(S_k)$$

não intersecta $\mathcal{Z}_k(d)$. Portanto a restrição de π à $\mathcal{Z}_k(d)$ é regular, i.e., holomorfa. Como $\mathcal{Z}_k(d)$ é claramente um fechado algébrico temos que $\pi(\mathcal{Z}_k(d))$ também é um fechado algébrico.

Para concluir basta observar que $\mathcal{C}_k(d)$ é a imagem de $\pi(\mathcal{Z}_k(d))$ via a projeção

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \times \mathbb{P}(S_k) \to \mathbb{F}ol(d)$$

e que $\mathcal{D}_k(d)$, por sua vez, é a imagem de $\pi(\mathcal{Z}_k(d))$ via a projeção

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \times \mathbb{P}(S_k) \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d).$$

□

4. O conjunto singular universal é irredutível

Seja $\mathcal{S}(d) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d)$ o subconjunto definido por

$$\mathcal{S}(d) = \{(x, \mathcal{F}) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \mid x \in \operatorname{sing}(\mathcal{F})\} .$$

Proposição 2. *Para qualquer $d \geq 0$, $\mathcal{S}(d)$ é uma subvariedade irredutível e de codimensão dois de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d)$.*

Demonstração. Considere a projeção $\pi : \mathcal{S}(d) \to \mathbb{P}^2$. A cada ponto $x \in \mathbb{P}^2$ a fibra $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade de $\{x\} \times \mathbb{F}ol(d)$ contida em $\mathcal{S}(d)$ isomorfa à um espaço projetivo (se duas formas Ω e Ω' anulam-se em x então o mesmo vale para qualquer combinação linear das mesmas). Como $\mathbb{P}^2$ é homogêneo (i.e., o grupo de biholomorfismos age transitivamente) segue que todas as fibras de π são lisas, irredutíveis, biholomorfas e, em particular, de mesma dimensão. Não é difícil ver que isto implica que $\mathcal{S}(d)$ é irredutível, cf. [Sh94, Theorem 8, página 77].

Resta mostrar que $\mathcal{S}(d)$ tem codimensão dois. Para tanto basta analisar a fibra sobre $p = [0 : 0 : 1]$ e concluir que esta tem codimensão dois em $\{p\} \times \mathbb{F}ol(d)$. Se $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é um polinômio homogêneo de grau d que não se anula em p então as 1-formas $\Omega_1 = H(xdz - zdx)$ e $\Omega_2 = H(ydz - zdy)$ pertencem a Σ_d e são tais que

$$\lambda\Omega_1(p) + \mu\Omega_2(p) = -\lambda H(0, 0, 1)dx - \mu H(0, 0, 1)dy = 0$$

para números complexos λ, μ, implica que $\lambda = \mu = 0$. Verifica-se também que para qualquer forma $\Omega \in \Sigma_d$ tal que $\Omega(p) \neq 0$ pode-se escrever $\Omega(p)$ como uma combinação $\mathbb{C}$-linear de $\Omega_1(p)$ e $\Omega_2(p)$. Isto é suficiente para concluir que a fibra de π sobre $p = [0 : 0 : 1]$ tem codimensão dois em $\{p\} \times \mathbb{F}ol(d)$.[1] □

[1] O que está realmente por trás da prova apresentada de que a codimensão de $\mathcal{S}(d)$ é igual a dois é a isotropicidade de $\mathbb{P}^2$,i.e., o grupo de bihomolomorfismos de $\mathbb{P}^2$ induz uma ação transitiva em $\mathbb{P}(T\mathbb{P}^2)$, a projetivização do fibrado tangente.

5. Localização

Na prova do próximo resultado farei uso do seguinte:

Lema 1. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de $\mathbb{P}^2$ e C é uma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante então*

$$C \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset\,.$$

Demonstração. Vou supor que $C \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$ e que C é o conjunto de zeros do polinômio homogêneo reduzido $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$.

Ao observar que $\operatorname{sing}(C) \subset C \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ deduzo que C é lisa e, consequentemente que F é irredutível. Como C é $\mathcal{F}$-invariante e $\operatorname{sing}(\mathcal{F})$ não intersecta C então para todo $p \in \{F = 0\}$ existe $H(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $\Omega(p) = H(p) \cdot dF(p)$. Logo existe $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ satisfazendo

$$\Omega = H \cdot dF \mod F\,.$$

Em outros termos: existe η, uma 1-forma polinomial homogênea em $\mathbb{C}^3$, tal que

$$\Omega = H \cdot dF + F \cdot \eta\,. \tag{2}$$

Desta última equação deduzo que

$$\emptyset = C \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F}) = \{F = 0\} \cap \{H = 0\}.$$

Segue do Teorema de Bezout que o grau de H é zero, i.e., H é uma constante. Comparando graus em (2) deduzo também que $\eta = 0$. Finalmente ao fazer o produto interior de (2) pelo campo radial obtenho que

$$0 = \Omega\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) = HdF\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) = \operatorname{grau}(F)HF\,.$$

Um absurdo que assegura a validade do lema.[2] □

Proposição 3. *Se para algum inteiro $k \geq 0$ vale que $\mathcal{C}_k(d) = \mathbb{F}ol(d)$ então*

$$\mathcal{D}_k(d) \cap \mathcal{S}(d) = \mathcal{S}(d)\,.$$

Demonstração. Se $\mathcal{C}_k(d) = \mathbb{F}ol(d)$ então toda folheação de grau d admite uma curva algébrica invariante de grau k (eventualmente não-reduzida). Ao denotar por π a projeção natural

$$\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \to \mathbb{F}ol(d)$$

segue do lema 1 que

$$\pi(\mathcal{S}(d) \cap \mathcal{D}_k(d)) = \mathcal{C}_k(d)\,.$$

Como $\mathcal{S}(d)$ é irredutível e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F}ol(d)$ segue da igualdade acima que

$$\mathcal{D}_k(d) \cap \mathcal{S}(d) = \mathcal{S}(d)\,,$$

como queríamos demonstrar. □

Um minuto de reflexão é suficiente para ver que quando válida a conclusão da proposição acima temos que por toda singularidade de toda folheação $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d)$ passa uma curva $\mathcal{F}$-invariante (não necessariamente reduzida) de grau k.

[2] Cabe observar que este lema é uma consequência imediata do Teorema do Índice de Camacho-Sad. A prova *elementar* aqui apresentada me foi sugerida por S.C. Coutinho. Uma variante desta pode ser encontrada em [Jo79, Proposition 4.1, página 126].

6. Existência de singularidades sem separatriz algébrica

Seja $\Omega \in \Sigma_d$, $d \geq 2$, dada por

$$\Omega = x^{d-1}yz(x+y+z)\left(\lambda\frac{dx}{x} + \mu\frac{dy}{y} + \gamma\frac{dz}{z} - (\lambda+\mu+\gamma)\frac{d(x+y+z)}{x+y+z}\right).$$

As singularidades de Ω são:

$$[0:0:1],\ [0:1:0],\ [1:0:0],\ [0:1:-1],\ [1:0:-1],\ [1:-1:0] \text{ e } [\lambda:\mu:\gamma],$$

além da reta $\{x=0\}$ quando $d \geq 3$.

É útil observar que a folheação induzida por Ω admite uma integral primeira multi-valuada, a saber,

$$F(x,y,z) = \frac{x^\lambda y^\mu z^\gamma}{(x+y+z)^{\lambda+\mu+\gamma}}.$$

Lema 2. *Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d)$, $d \geq 2$, a folheação induzida por Ω. Se λ, μ e γ são $\mathbb{Z}$-linearmente independentes então não passa nenhuma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante pela singularidade $p = [\lambda : \mu : \gamma]$.*

Demonstração. Como λ, μ e γ são $\mathbb{Z}$-linearmente independentes temos que p não pertence a nenhuma das quatro retas $\{x=0\}, \{y=0\}, \{z=0\}, \{x+y+z=0\}$. Supondo que existe uma curva $\mathcal{F}$-invariante C que passa por p vou considerar a sua interseção com uma das quatro retas supra-citadas, por exemplo, $\{z=0\}$.

Claramente os pontos de interseção entre C e $\{z=0\}$ estão contidos nas singularidades de $\mathcal{F}$ e, portanto encontram-se na interseção entre $\{z=0\}$ e uma das três outras retas. Seja q um destes pontos de interseção entre C e $\{z=0\}$. Podemos supor sem perda de generalidade que q também pertence a $\{y=0\}$ (os outros casos são completamente análogos).

Em uma vizinhança de q a integral primeira F escreve-se como

$$F(x,y,1) = u(x,y)x^\lambda y^\mu,$$

onde u é uma função não nula e sem ramificação em uma vizinhança de $q=(0,0)$. Novamente pela $\mathbb{Z}$-independência linear de λ, μ e γ temos que $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$. Não é difícil verificar que isto implica que as únicas separatrizes holomorfas que passam por q são $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$. Concluo assim a prova de lema. □

Corolário 1. *Se $d \geq 2$ então $\mathcal{C}_k(d) \neq \mathbb{F}ol(d)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{C}_k(d) = \mathbb{F}ol(d)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ então segue da proposição 3 que por toda singularidade de toda folheação $\mathcal{F}$ de grau d passa ao menos uma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante contradizendo o lema 2. □

7. Conclusão

Como $\mathcal{C}_k(d)$ é um fechado algébrico de $\mathbb{F}ol(d)$ e, para $d \geq 2$, $\mathcal{C}_k(d) \neq \mathbb{F}ol(d)$ vale que, para todo $k \in \mathbb{N}$, o complementar de $\mathcal{C}_k(d)$ em $\mathbb{F}ol(d)$ é um aberto denso desde que $d \geq 2$. Concluo a prova do Teorema de Jouanolou aplicando o Teorema de Baire: uma interseção enumerável de abertos densos é denso.

Referências

[Br00] M. Brunella, *Birational geometry of foliations.* Publicações do IMPA, 2000.

[CP05] S. C. Coutinho and J. V. Pereira, *On the density of foliations without algebraic invariant sets.* aparecerá no Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.

[Jo79] J. P. Jouanolou, *Equations de Pfaff Algébriques.* Lecture Notes in Math. **708**, Springer, 1979

[LS97] A. Lins Neto e B. Scárdua, *Folheações Algébricas Complexas.* IMPA, 21^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1997.

[Sh94] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

E-mail address: `jvp@impa.br`

IMPA Estrada Dona Castorina,110 22460-320 Jardim Botânico Rio de Janeiro Brasil