FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS – LISTA DE EXERCÍCIOS # 3

1. Classes de Chern de fibrados vetoriais complexos

Se M é uma variedade diferenciável então denotaremos por C^∞_M o feixe das funções (com valores complexos) de classe C^∞, por $C^{\infty\,*}_M$ o feixe das funções invertíveis, e por $\mathcal{A}^i_M$ o feixe de i-formas diferenciáveis (com valores complexos) em i.

1.1. **Definição axiomática.** Para cada fibrado vetorial complexo sobre uma variedade diferenciável M é possível associar um elemento

$$c(V) \in H^\bullet(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^{\dim M} H^i(M,\mathbb{R})$$

no anel de cohomologia de M que possui as três propriedades listadas abaixo.

(1) **Functorialidade.** Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável entre e E é um fibrado vetorial sobre N então

$$c(f^*E) = f^*c(E)\,.$$

(2) **Aditividade.** Se $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ é uma sequência exata de fibrados vetorias então

$$c(E) = c(E') \smile c(E'').$$

(3) **Normalização.** Se E é um fibrado linear (i.e. fibrado vetorial complexo posto 1) sobre M então

$$c(E) = 1 + c_{\mathbb{R}}(E) \in H^0(M,\mathbb{R}) \oplus H^2(M,\mathbb{R}) \subset H^\bullet(M,\mathbb{R})$$

com $c_{\mathbb{R}} : H^1(M, C^{\infty\,*}_M) \to H^2(M,\mathbb{R})$ igual ao homomorfismo induzido pela composição do operador de cobordo $H^1(M, C^{\infty\,*}_M) \to H^2(M,\mathbb{Z})$ da sequência exponencial

$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow C^\infty_M \longrightarrow C^{\infty\,*}_M \to 1$$

com o homomorfismo em cohomologia induzido pela inclusão $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

É possível mostrar (através do chamado *splitting principle*) que estas 3 propriedades caracterizam completamente $c(E)$ que é chamada a classe de Chern total de E. Nessas notas não provaremos este fato. Nos contentaremos em apresentar uma construção de classes de Chern utilizando formas diferenciais complexas.

1.2. **Conexões.** Seja E um fibrado vetorial complexo sobre uma variedade diferenciável M e $\mathcal{E}$ o feixe de seções de classe C^∞ de E. Uma conexão ∇ em E é um morfismo de $\mathbb{C}$-feixes

$$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}^1_M \otimes \mathcal{E}$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$\nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f\nabla(s)\,.$$

Se $\tilde{\nabla}$ é uma outra conexão em $\mathcal{E}$ segue da regra de Leibniz que o morfismo

$$\nabla - \tilde{\nabla} : \mathcal{E} \to \mathcal{A}^1_M \otimes \mathcal{E}$$

não é apenas $\mathbb{C}$-linear, mas também C^∞_M-linear.

Se E é um fibrado trivial de posto k munido de uma conexão ∇ então uma vez que identificamos $\mathcal{E}$ com $(C^\infty_M)^{\oplus k}$ podemos escrever ∇ como $d + \theta$, onde d é a derivada exterior agindo em cada um dos somandos de $(C^\infty_M)^{\oplus k}$ na forma usual, e θ é uma matriz $k \times k$ de 1-formas diferenciais complexas agindo à esquerda em $(C^\infty_M)^{\oplus k}$. Mais explicitamente, se $e_1, \ldots, e_k$ é a base natural de $(C^{infty}_M)^k$ e $\theta = (\theta_{ij})$ então

$$\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} e_j\,.$$

Se tomamos outra base $e'_1, \ldots, e'_n$ para $(C^\infty_M)^k$ tal que

$$e'_i = \sum_j g_{ij} e_j \quad \text{e} \quad \nabla(e'_i) = \sum \theta'_{ij} e'_j$$

para uma matriz $G = (g_i j)$ de funções e uma matriz $\theta' = (\theta'_{ij})$ de 1-formas então estas duas equações nos dão, respectivamente, as identidades

$$\nabla(e'_i) = \sum_j \theta'_{ij} e'_j = \sum_j \theta'_{ij} \sum_k g_{jk} e_k$$
$$\nabla(e'_i) = \sum_j dg_{ij} e_j + \sum_j g_{ij} \sum_k \theta_{jk} e_k\,.$$

De forma mais sucinta, podemos escrever

$$\theta' G = dG + G \cdot \theta$$

ou equivalentemente

$$\theta' = dG \cdot G^{-1} + G \cdot \theta \cdot G^{-1}\,.$$

1.3. **Curvatura.** A conexão ∇ induz morfismos naturais entre $\mathcal{A}^i_M \otimes \mathcal{E}$ e $\mathcal{A}^{i+1}_M \otimes \mathcal{E}$, que também denotaremos por ∇, definidos pela relação

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^i \omega \wedge \nabla(s)\,.$$

Compondo o morfismo ∇ original com o morfismo induzido de $\mathcal{A}^1_M \otimes \mathcal{E}$ em $\mathcal{A}^2_M \otimes \mathcal{E}$, obtemos

$$\nabla^2 : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}^2_M \otimes \mathcal{E}\,.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\nabla^2(f \cdot s) &= \nabla(df \otimes s + f\nabla(s)) = \\
&= \nabla(df \otimes s) + \nabla(f\nabla(s)) = \\
&= (-df \wedge \nabla(s)) + \big(df \wedge \nabla(s) + f\nabla^2(s)\big) = f\nabla^2(s)\,,
\end{aligned}$$

e portanto ∇^2 é um morfismo de C^∞_M-módulos.

Em uma trivialização de E, podemos exprimir ∇^2 através de uma matriz $k \times k$ de 2-formas $\Theta = (\Theta_{ij})$, isto é

$$\nabla^2(e_i) = \sum \Theta_{ij} e_j \,.$$

Como ∇^2 é C^∞_M-módulos, de exprimimos ∇^2 em uma outra base $e'_1, \ldots, e'_k$ temos que

$$\Theta = G \cdot \Theta' \cdot G^{-1} \,,$$

onde G é a matriz de mudança de bases. Uma conta simples nos mostra que

$$\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta \,,$$

onde θ é matriz de conexão da seção anterior.

1.4. **Classes de Chern.** Seja $\mathrm{Mat}(n,n)$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ e $P : \mathrm{Mat}(n,n) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \to \mathbb{C}$ um polinômio invariante pela ação de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ em $\mathrm{Mat}(n,n)$ por conjugação, i.e.,

$$P(GAG^{-1}) = P(A) \,.$$

Se P possui grau k então podemos calcular $P(\Theta)$ para obter uma $2k$-forma. Podemos demonstrar que $P(\Theta)$ é uma $2k$-forma fechada. Além disso, se Θ e Θ' são curvaturas de duas conexões ∇ e ∇' definidas em um mesmo fibrado E então $P(\Theta)$ e $P(\Theta')$ determinam o mesmo elemento em $H^{2k}(M,\mathbb{C})$.

O conjunto dos polinômios invariantes pela ação de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ por conjugação é uma subálgebra de $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}(n,n)]$, a álgebra de polinômios em n^2 variáveis. Se escrevemos

$$\det(\mathrm{Id} + tA) = 1 + t\sigma_1(A) + \ldots + t^n \sigma_n(A)$$

então é possível demonstrar que esta subálgebra é isomorfa à $\mathbb{C}[\sigma_1, \ldots, \sigma_k]$. Note que $\sigma_1(A)$ nada mais é que o traço de A, e que $\sigma_k(A)$ é a n-ésima função elementar nos autovalores de A.

A j-ésima classe de Chern de um fibrado vetorial E é dada pela fórmula

$$c_j(E) = \left[\frac{\sigma_j(\Theta)}{(2\pi i)^j} \right] \in H^{2j}(M,\mathbb{R}) \,,$$

onde Θ é a matriz de curvatura de uma conexão arbitrária em E.

1.5. **Interpretação da classe de Chern top.** Se M é uma variedade compacta orientada de dimensão n e E é um fibrado vetorial complexo de posto r então a r-ésima classe de Chern de E admite a seguinte interpretação. Seja $\sigma : M \to E$ uma seção transversal à seção nula. A intersecção do gráfico de σ com a seção nula determina um elemento $(\sigma)_0$ no grupo de homologia $H_{n-2r}(M,\mathbb{R})$. o A r-ésima classe de Chern de E nada mais é que o dual de Poincaré de $(\sigma)_0$.

Em particular, se M é variedade complexa compacta de dimensão complexa n (e portanto dimensão real $m = 2n$), E é um fibrado vetorial holomorfo de posto n e $\sigma : M \to E$ é uma seção holomorfa com zeros isolados então $c_n(E)$ conta os zeros de σ com multiplicidades dadas pela codimensão do ideal gerado pelas coordenadas locais de σ no anel local de M.

2. Singularidades

2.1. Seja M uma variedade diferenciável. Se E é um fibrado vetorial complexo de posto r sobre M e L é um fibrado vetorial complexo de posto 1 sobre M, mostre que

(1) $c_1(E \otimes L) = c_1(E) + rc_1(L)$.
(2) $c_2(E \otimes L) = c_2(E) + (r-1)c_1(E) \cdot c_1(L) + \binom{r}{2} c_1(L)^2$.

2.2. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau d com singularidades isoladas então a soma dos números de Milnor das singularidades de $\mathcal{F}$ é $d^2 + d + 1$.

3. Baum-Bott

3.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, de grau d definida por $\omega \in H^0(\mathbb{P}^3, \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(d+2))$. Se $i : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3$ é a inclusão de um hiperplano genérico, mostre que $i^*\omega$ se anula em um número finito de pontos. (Dica: Teorema de Sard.)

3.2. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^3$. Mostre que o conjunto singular de $\mathcal{F}$ possui alguma componente de codimensão 2.

4. Teorema da Separatriz

4.1. Mostre que existem exatamente dois germes de funções $y : (\mathbb{C}, 1) \to (\mathbb{C}, 1)$ satisfazendo a equação

$$x \exp(y(x)) = y(x) \exp(x).$$

Mostre também que um destes germes nao é algébrico, i.e., nao existe polinômio $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $g(x, y(x)) = 0$ para todo $x \in (\mathbb{C}, 1)$. (Dica: Derive e divida para obter uma folheação em $\mathbb{P}^2$.)

5. Folheações de Riccati

5.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2$. Assuma que $\mathcal{F}$ possui uma singularidade p com multiplicidade algébrica d. Mostre que após explodir p obtemos uma folheação de Riccati.

5.2. Seja $S_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, $n \geq 0$, a n-ésima superfície de Hirzebruch. Calcule a dimensão de $H^0(S_n, TS_n)$. (Dica: Se tudo mais falhar descreva S_n por meio de mudanças de cartas e estude as condições para que um campo polinomial em uma carta afim $\mathbb{C}^2 \subset S_n$ estenda-se holomorficamente nas outras três cartas)

5.3. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau 2. Suponha que $\mathcal{F}$ possui exatamente duas singularidades não reduzidas e estas possuem número de Milnor 1 e são linearizáveis com quociente de autovalores iguais à 2. Mostre que:

(a) se a reta ℓ passando pelas duas singularidades não reduzidas não é invariante por $\mathcal{F}$ então $\mathcal{G}$, a resolução minimal de $\mathcal{F}$, é uma folheação de Riccati. (Dica: Encontre primeiro a fibração. Esta fibração pode ter fibras singulares).
(b) se a reta ℓ passando pelas duas singularidades reduzidas é $\mathcal{F}$ invariante então existe uma terceira singularidade $p \in sing(\mathcal{F}) \cap \ell$ e o índice de Camacho-Sad desta singularidade com respeito à ℓ é igual à $-3/2$, -3 ou 0.
(c) (nas hipóteses do item anterior) se a terceira singularidade possui índice igual à zero então $\mathcal{G}$ é Riccati.