FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS – LISTA DE EXERCÍCIOS # 2

1. Aplicações meromorfas entre variedades complexas lisas

Sejam X e Y variedades complexas lisas e conexas. Uma aplicação meromorfa $f : X \dashrightarrow Y$ é, por definição, uma aplicação holomorfa definida no complementar de um subconjunto fechado analítico $I \subset X$ tal que o fecho topológico do gráfico de $f_{|X-F}$ em $X \times Y$, o qual denotaremos por Γ_f, i.e.

$$\Gamma_f = \overline{\{(x,y) \in (X-I) \times Y \,|\, y = f(x)\}} \subset X \times Y,$$

é um fechado analítico de $X \times Y$ e a projeção natural $\Gamma_f \to X$ é uma aplicação própria.

Como Γ_f é irredutível, podemos supor que o conjunto I onde a aplicação f não está definida possui codimensão maior ou igual à 2. Este fato segue de propriedades básicas de conjuntos analíticos e pode ser formulado mais precisamente como abaixo.

Proposição 1.1. *Se $\pi : X \times Y \to X$ é a projeção natural então o conjunto*

$$U = \{x \in X \,|\, \#\Gamma_f \cap \pi^{-1}(x) < +\infty\}$$

é um aberto de X e a restrição de π à $\pi^{-1}(U) \cap \Gamma_f$ é um bihomolomorfismo, ou seja, as fibras de $\pi_{|\Gamma_f}$ quando não se reduzem a um ponto, possuem cardinalidade infinita.

O complemento do aberto U posto em evidência pela proposição acima é o chamado conjunto de indeterminação de f que denotaremos por $\mathrm{Indet}(f)$. Na proposição acima é essencial que X seja lisa, ou ao menos normal, hipóteses sobre Y não são de fato necessárias, Y pode ser arbitrariamente singular.

Quando a aplicação f possui imagem densa em Y dizemos que f é uma aplicação dominante.

1.1. Ação no grupo de divisores e no grupo de Picard.

Se $f : X \dashrightarrow Y$ é uma aplicação meromorfa dominante então temos uma aplicação induzida entre os grupos de divisores de Y e X

$$f^* : \mathrm{Div}(Y) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)\,.$$

De fato, por um lado temos aplicação usual $\mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X - \mathrm{Indet}(f))$ definida tomando o pull-back de equações locais para os divisores de Y. Por outro lado, como $\mathrm{Indet}(f)$ possui codimensão maior ou igual à 2 o Teorema de Extensão de Remmert-Stein nos dá isomorfismo natural entre $\mathrm{Div}(X - \mathrm{Indet}(f))$ e $\mathrm{Div}(X)$. Compondo estas duas aplicações naturais obtemos $f^* : \mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X)$.

É tentador utilizar a mesma estratégia para definir o pull-back de $\mathrm{Pic}(Y)$ para $\mathrm{Pic}(X)$, mas é preciso atentar para o fato de que $\mathrm{Pic}(X)$ e $\mathrm{Pic}(X - \mathrm{Indet}(f))$ podem ser radicalmente diferentes. Por exemplo, o grupo $H^1(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ é trivial, enquanto

$H^1(\mathbb{C}^2 - \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2-\{0\}})$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão infinita. Segue da sequência exponencial que $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}^2)$ é trivial, enquanto

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{C}^2 - \{0\}) \simeq H^1(\mathbb{C}^2 - \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2-\{0\}}) ,$$

já que $H^i(\mathbb{C}^2 - \{0\}, \mathbb{Z}) \simeq H^i(S^3, \mathbb{Z}) = 0$ para $i = 1, 2$.

Não conheço método completamente elementar para definir a aplicação

$$f^* : \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

mas existem várias formas equivalentes de faze-lo utilizando um pouco mais de geometria complexa do que o até aqui discutido. Uma das formas é considerar as projeções $\pi_X : \Gamma_F \to X$ e $\pi_Y : \Gamma_F \to Y$ e definir através da fórmula

$$f^*\mathcal{L} = (\pi_{X*}(\pi_Y^*\mathcal{L}))^{**} .$$

O resultado é um feixe reflexivo de posto um, e portanto localmente livre de posto um (feixe de seções de um fibrado linear) já que X é lisa.

Uma alternativa, talvez mais elementar, mas que supõe Y projetiva é lembrar que neste caso $\mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Div}(Y)/\mathrm{PDiv}(Y)$, onde $\mathrm{PDiv}(Y)$ denota o subgrupo de divisores linearmente equivalentes a zero. Após observar que $f^*(\mathrm{PDiv}(Y)) \subset P\,\mathrm{Div}(X)$ podemos construr morfismo de grupos $f^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$ via a composição

$$\mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \frac{\mathrm{Div}(Y)}{\mathrm{PDiv}(Y)} \longrightarrow \frac{\mathrm{Div}(X)}{\mathrm{PDiv}(X)} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) .$$

1.2. **Ramificação.** Se X e Y possuem a mesma dimensão então temos uma divisor em X naturalmente associado à f que chamaremos de divisor de ramificação de f e denotaremos por Δ_f. No complemento do conjunto $\mathrm{Indet}(f)$, ele é localmente definido pelo anulamento do determinante da aplicação Jacobiana de f. Este divisor permite relacionar dois fibrados naturalmente definidos em X: o fibrado canônico de X e o pull-back por f do fibrado canônico de Y.

Proposição 1.2. *Se $f : X \dashrightarrow Y$ é uma aplicação meromorfa dominante entre variedades complexas lisas de mesma dimensão então*

$$KX = f^*KY \otimes \mathcal{O}_X(\Delta_f) .$$

Demonstração. Apresentaremos uma prova apenas no caso em que Y é projetiva. O caso geral fica como um desafio para leitor. Se Y é projetiva de dimensão n então podemos tomar Ω uma n-forma racional em Y. Segue $KY = \mathcal{O}_Y((\Omega)_0 - (\Omega)_\infty)$. O pull-back de Ω via a restrição de f ao aberto $X - \mathrm{Indet}(f)$ nos define uma n-forma meromorfa $f^*\Omega$ em $X - \mathrm{Indet}(f)$. Para descrever o divisor associado à $f^*\Omega$ na vizinhança de um ponto $x \in X\ \mathrm{Indet}(f)$, tome coordenadas locais $(y_1, \ldots, y_n)$ em $f(x) \in Y$, coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ em $x \in X$. Nestas coordenadas $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$, e $\Omega = h \cdot dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$, $h \in \mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Logo $f^*\Omega = f^*h \cdot df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = h \circ f \det(Df) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Temos que $KX_{|X-\mathrm{Indet}(f)}$ é o fibrado associado ao divisor

$$f * ((\Omega)_0 - (\Omega)_\infty) + \Delta_f .$$

Como $\mathrm{Indet}(f)$ posui codimensão maior ou igual à dois o resultado segue. □

1.3. **O caso de superfícies.** As considerações gerais da seção anterior, adquirem forma particularmente concreta quando tratamos de aplicações meromorfas definidas em superfícies lisas.

Proposição 1.3. *Se* $f : X \dashrightarrow Y$ *é uma aplicação meromorfa com* $\dim X = 2$ *então uma superfície* Z *munida de um morfismo bimeromorfo* $\pi : Z \to X$ *obtida via uma sucessão localmente finita de blow-ups de pontos, e um morfismo* $g : Z \to Y$ *que fazem o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

comutar. Além disso, se f *é bimeromorfa então o morfismo* g *também é obtido via uma sucessão localmente finita de blow-ups.*

De posse desse resultado, vemos que para entender o morfismo $f^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$ basta entendermos como são as aplicações induzidas por explosões e inversas de explosões. Se $\pi : Y \to X$ é a explosão de um ponto p em X então

$$\mathrm{Pic}(Y) \simeq \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$$

com o fator $\mathbb{Z}$ correspondendo a múltiplos do fibrado $\mathcal{O}_Y(E)$. A aplicação induzida por π é simplesmente a inclusão

$$\mathcal{L} \longmapsto \pi^*\mathcal{L} \in \pi^* \mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{Pic}(Y)\,.$$

A aplicação induzida pela inversa $\pi^{-1} : X \dashrightarrow Y$ simplesmente esquece o fator correspondente à $\mathcal{O}_Y(E)$. Note que

$$(\pi^{-1})^* \circ \pi^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$$

é a identidade, enquanto

$$\tau = \pi^* \circ (\pi^{-1})^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(Y)$$

satisfaz $\tau^2 = \tau$ (é uma projeção) e $\ker \tau$ é o subgrupo gerado por $\mathcal{O}_Y(E)$.

Ainda supondo que $\pi : Y \to X$ é a explosão de um ponto p em X vamos agora descrever a aplicação $\pi^* : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(Y)$. Nesse caso temos $\mathrm{Div}(Y) \simeq \mathrm{Div}(X) \oplus \mathbb{Z}$ com o fator $\mathbb{Z}$ correspondendo à múltiplos inteiros do divisor excepcional $E = \pi^{-1}(p)$.

Se $C \subset X$ é uma curva irredutível definimos a transformada estrita de C como sendo o fecho de $\pi^{-1}(C - \{p\})$. Se $\overline{C}$ denota a transformada estrita de C em Y então

$$\pi^* C = \overline{C} + m_{alg}(C,p)E$$

onde $m_{alg}(C,p)$ é a multiplicidade algébrica de C em p que é, por definição, a menor potência do ideal maximal de p em X contendo equação que define C.

2. Folheações e aplicações racioanais

2.1. Seja $F/G : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ uma aplicação racional de grau k, i.e. F, G são polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^3$ de grau k. Para cada $\lambda = (s : t) \in \mathbb{P}^1$ denotaremos por F_λ o divisor $\{sF - tG = 0\}$, e por $F_{\lambda,red}$ o divisor reduzido com o mesmo suporte. Se $\mathcal{F}$ é a folheação induzida por esta aplicação, mostre que

$$N\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\left(2k - \sum_{\lambda \in \mathbb{P}^1} \deg(F_\lambda - F_{\lambda,red})\right).$$

2.2. A aplicação de Cremona padrão é a aplicação racional

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x : y : z) &\mapsto (x^{-1} : y^{-1} : z^{-1}) = (yz : xz : xy). \end{aligned}$$

Quando uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$ satisfaz

$$\deg(\varphi^* \mathcal{F}) \leq \deg(\mathcal{F})?$$

2.3. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2$ invariante por uma aplicação holomorfa $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Como φ é holomorfa então φ não possui pontos de indeterminação e também não contrai curvas. Se $\deg(\varphi) > 1$ então $\deg(\mathcal{F}) \leq 1$.

2.4. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau 2. Mostre que $\mathcal{F}$ é birracionalmente equivalente à uma folheação $\mathcal{G}$ em um $\mathbb{P}^1$-bundle $\pi : S \to \mathbb{P}^1$ tal que a tangência de $\mathcal{G}$ com uma fibra genérica de π é menor ou igual à 1. Sugestão: examine a tangência de $\mathcal{F}$ com o pencil de retas passando por uma de suas singularidades.

3. Seções do fibrado canônico

3.1. Mostre que se $\mathcal{F}$ é uma folheação com todas as singularidades reduzidas em uma superfície projetiva Y e $\mathcal{G}$ é uma folheação birracionalmente equivalente à $\mathcal{F}$ então para todo inteiro $n \geq 1$ temos um isomorfismo

$$H^0(Y, T^*\mathcal{F}^{\otimes n}) = H^0(X, T^*\mathcal{G}^{\otimes n}).$$

3.2. Mostre que se $\mathcal{F}$ é uma folheação de grau $d \geq 2$ em $\mathbb{P}^2$ então a aplicação canônica

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^2, T^*\mathcal{F})^* \\ x &\mapsto [\{\sigma \in H^0(\mathbb{P}^2, T^*\mathcal{F}) \mid \sigma(x) = 0\}] \end{aligned}$$

nada mais é que o mergulho de Veronese de ordem $(d-1)$. Suponha que $\mathcal{F}$ possui uma singularidade p com $\ell(\mathcal{F}, p) = d$ e seja $\mathcal{G}$ a folheação obtida ao explodir esta singularidade. Mostre que a dimensão da imagem da aplicação canônica de $\mathcal{G}$ é igual à 1.

3.3. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau 2. Suponha que todas as singularidades de $\mathcal{F}$ são reduzidas com exceção de uma singularidade p que é localmente equivalente à $x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$. Seja $\mathcal{G}$ uma folheação reduzida em uma superfície projective X bimeromorficamente equivalente à $\mathcal{F}$. Calcule $h^0(X, T^*\mathcal{G}^{\otimes n})$ para todo $n \geq 1$.