Análise Complexa 2016
Lista de Exercícios

0. Exercícios 1, 2, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 22 do Capítulo 3 do livro texto.

1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Seja $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{1}{f(z) - f(z_0)}\, dz$$

desde que $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$.

2. Seja $r < 1$ um real positivo e $A_r = D_1(0) - \overline{D_r(0)}$. Seja $f : A_r \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Mostre que existe $n \in \mathbb{Z}$ e $g : A_r \to \mathbb{C}$ holomorfa tais que

$$f(z) = z^n \exp(g(z)).$$

3. Seja p um polinômio de grau n. Para $r > 0$, defina

$$M(r,p) = \sup_{|z|=r} |p(z)|\,.$$

Mostre que a função $r \mapsto M(p,r)$ é crescente e que a função $r \mapsto \frac{M(p,r)}{r^n}$ é decrescente.

4. Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma função meromorfa. Mostre que f possui um ponto fixo, i.e. um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $f(z) = z$. O que podemos dizer quando f possui um único ponto fixo ?

5. Seja $\lambda > 1$ um número real. Mostre que a equação $z \exp(\lambda - z) = 0$ possui uma única solução com módulo menor do que um.

6. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Suponha que Ω contém o disco fechado $\overline{D} = \{|z| \leq 1\}$. Se $f(\overline{D}) \subset D$ então f possui um ponto fixo em D.

7. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Suponha que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ e que $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. Mostre que $f(-z) = -f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

8. Mostre que um aberto convexo é simplesmente conexo. Mostre que se Ω é um aberto simplesmente conexo ento para qualquer $z \in \Omega$, o aberto $\Omega - \{z\}$ no é simplesmente conexo.