Introdução às folheações holomorfas 2013
Lista #3

---

1. Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com multiplicidade algébrica m. Se o número de separatrizes de $\mathcal{F}$ é maior ou igual a $m+2$ então $\mathcal{F}$ possui uma infinidade de separatrizes.

2. Seja $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ um subgrupo finitemente gerado. Mostre que se G é solúvel então $[G, G]$ é abeliano.

3. Seja $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ um subgrupo finitemente gerado. Suponha que o grupo $G_{lin} = \{g'(0) \in \mathbb{C}^* \,|\, g \in G\}$ é denso em $\mathbb{C}^*$. Mostre que se $x \neq 0$ é suficientemente pequeno então o fecho da G-pseudo-órbita de x contém uma vizinhança aberta de 0.
Obs.: Para definir a G-pseudo-órbita de x considere D_ϵ aberto contendo 0 onde um conjunto $\Sigma = \{g_1, \ldots, g_k, g_1^{-1}, \ldots, g_k^{-1}\}$ de geradores de G e seus inversos admitem representantes, e $x \in D_\epsilon$ um ponto distinto de zero. A pseudo-órbita de x é definida como o menor subconjunto $O(G, x) \subset D_\epsilon$ (que de fato depende da escolha de D_ϵ e Σ) satisfazendo as seguintes propriedades:

- $x \in O(G, x)$; e
- se $y \in O(G, x)$ e $g(y) \in D_\epsilon$ para algum $g \in \Sigma$ então $g(y) \in O(G, x)$.

4. Seja $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ um subgrupo abeliano. Mostre que se existe $f \in G$ tal que $|f'(0)| \neq 1$ então G é linearizável.

5. Considere a folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ definida pela 1-forma holomorfa

$$\omega = a(x)dy + (b(x)y + c(x))dx \,,$$

onde a, b e c são funções holomorfas em $\mathbb{C}$. Mostre que

- a curva $L = \{y = \infty\}$ é invariante;
- a holonomia de $\mathcal{F}$ ao longo de $L - \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é solúvel;
- se existe uma curva holomorfa da forma $\{y = f(x)\}$, f holomorfa em $\mathbb{C}$, invariante por $\mathcal{F}$, então a holonomia de $\mathcal{F}$ ao longo de $L - \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é linearizável.
- se existe uma curva holomorfa da forma $\{y^2 + f(x)y + g(x) = 0\}$, f, g holomorfas em $\mathbb{C}$ satisfazendo $f^2 - 4g \neq 0$, invariante por $\mathcal{F}$, então a holonomia de $\mathcal{F}$ ao longo de $L - \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é trivial ou de ordem 2.

6. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{C}^2$. Mostre que toda folha de $\mathcal{F}$ é ilimitada (i.e. não está contida em nenhum compacto). Mais geralmente, mostre que o fecho topológico de uma folha de uma folheação em $\mathbb{P}^2$ intersecta toda curva algébrica de $\mathbb{P}^2$.

7. Dê um exemplo de uma folheação em uma superfície projetiva possuindo uma folha transcendente L_1 (i.e. não algébrica) e uma folha algébrica L_2 tal que o fecho topológico de L_1 não intersecta o fecho topológico de L_2.

Continua no verso

8. Seja $\mathcal{G}_d$ o conjunto de folheações polinomiais em $\mathbb{C}^2$ de grau afim $d \geq 2$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- a reta no infinito é invariante;
- a folheação possui $d+1$ singularidades no infinito distintas;
- o grupo de holonomia da reta no infinito possui órbitas densas.

Mostre que $\mathcal{G}_d$ contém um aberto denso.

9. Se $d \geq 2$ então toda folheação em $\mathcal{G}_d$ (ver questão anterior) é quasi-minimal, i.e., se $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_d$ e L é uma folha de $\mathcal{F}$ então L é algébrica ou L é densa em $\mathbb{C}^2$.

10. Construa um exemplo de folheação holomorfa em $\mathbb{C}^2$ com uma infinidade de curvas algébricas invariantes mas sem integral primeira meromorfa. Conclua que o Teorema de Darboux-Jouanolou não é válido em superfícies abertas.