Introdução às folheações holomorfas 2013
Lista #1

---

1. Seja $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}^n$ o domínio de Poincaré. Mostre que o conjunto de

$$\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{P}; \lambda \text{ é ressonante. }\}$$

não é denso em $\mathcal{P}$. Em contrapartida, se $\mathcal{S} = \mathbb{C}^n - \mathcal{P}$ denota o domínio de Siegel então o conjunto

$$\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{S}; \lambda \text{ é ressonante. }\}$$

é denso em $\mathcal{S}$.

2. Seja $\lambda \in \mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$, i.e., λ pertence ao domínio de Siegel. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{C}$,

$$\Sigma = \{\lambda_j - < \alpha, \lambda > \; ; \; \alpha \in \mathbb{N}^n, j = 1, \ldots, n\} \; .$$

Mostre que ao menos uma das duas afirmações é verdadeira.

(a) O conjunto $\{(j, \alpha) \in \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{N}^n \; \big| \; \lambda_j =< \alpha, \lambda >\}$ é infinito.
(b) A origem $0 \in \mathbb{C}$ é um ponto de acumulação de Σ.

3. Seja $v = v_S + v_N \in \widehat{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}^2)$ um campo que anula-se na origem e está em forma normal, i.e., v_S é diagonal, v_N é nilpotente, e $[v_S, v_N] = 0$. Suponha $v_S = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$ com $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Mostre que

(a) se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q}_- \cup \mathbb{N} \cup 1/\mathbb{N})$ então $v_N = 0$;
(b) se $\lambda \in \mathbb{N}$ então $v_N = \mu x^\lambda \frac{\partial}{\partial y}$ com $\mu \in \mathbb{C}$;
(c) se $\lambda \in \mathbb{Q}_-$ e $\lambda = -p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si, então

$$v_N = \alpha(x^p y^q)\frac{\partial}{\partial x} + \beta(x^p y^q)\frac{\partial}{\partial y}$$

com $\alpha, \beta \in x \cdot \mathbb{C}[[x]]$.

4. Seja $v \in \widehat{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}^n)$ um campo de vetores com parte linear não nula. Mostre que existe $f \in \widehat{\mathfrak{m}} \subset \widehat{\mathcal{O}}$ tal que f divide $v(f)$. Em outras palavras, v admite uma hipersuperfície formal invariante.