INTRODUÇÃO ÀS FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS 2022
LISTA #3

1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com um número finito N de separatrizes. Mostre que $N \leq m_{alg}(\mathcal{F}, 0) + 1$. (Dica: fórmula de van den Essen + indução)

2. Mostre que existe folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com número de Milnor arbitrário, e apenas uma separatriz convergente. (Dica: comecem com o exemplo de Euler e tentem altera-lo via pull-backs através de aplicações não invertíveis.)

3. Considere as possíveis formas normais formais de uma singularidade reduzida em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e determine, em cada caso, as separatrizes com seus índices de Camacho-Sad e o número de Milnor.

4. Dê um exemplo de folheação de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, 0)$ que não admite integral primeira holomorfa.

5. Considere a folheação em $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ definida pela 1-forma holomorfa

$$\omega = a(x)dy + (b(x)y + c(x))dx$$

onde a, b e c são funções holomorfas em $\mathbb{C}$. Mostre que

(1) a curva $C = \{y = \infty\}$ é invariante por $\mathcal{F}$;
(2) a holonomia de $\mathcal{F}$ ao longo de $C - \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é solúvel;
(3) se existe uma curva holomorfa invariante por $\mathcal{F}$ da forma $\{y = f(x)\}$, f função meromorfa em $\mathbb{C}$, invariante por $\mathcal{F}$ então a holonomia de $\mathcal{F}$ ao longo de $L - \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é linearizável (em particular abeliana);
(4) se existe uma curva holomorfa da forma $\{y^2 + f(x)y + g(x) = 0\}$, f, g meromorfas em $\mathbb{C}$ tais que $f^2(x) - 4g(x)$ não se anula identicamente, então a holonomia ao longo de $L - \mathrm{sing}(F)$ é trivial ou de ordem 2.

6. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}^2$ definida por uma 1-forma polinomial homogênea ω com singularidade isolada na origem.

(1) Mostre que $\mathcal{F}$ é definida por uma 1-forma racional fechada.
(2) Mostre que se os coeficientes de ω são de grau maior ou igual à 2 então o divisor excepcional E do blow-up $\pi : Bl_0(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{C}^2$ é invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.
(3) Mostre que a holomonomia de $\pi^*\mathcal{F}$ ao longo de $E - \mathrm{sing}(\pi^*\mathcal{F})$ é abeliana.

7. Seja $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ um subgrupo finitamente gerado. Mostre que se G é solúvel então $[G, G]$ é abeliano.

8. Seja $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ um subgrupo abeliano. Mostre que se existe $f \in G$ com $|f'(0)| \neq 1$ então G é linearizável.