Classification des tissus exceptionnels quasilinéaires complètement décomposables

Jorge Vitório Pereira [a], Luc Pirio [b]

[a] *IMPA, Est. D. Castorina, 110, 22460-320, Rio de Janeiro, Brazil*

[b] *IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université Rennes 1, Campus de Beaulieu 35000 Rennes*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous présentons des résultats de classification des tissus CDQL exceptionnels sur $\mathbb{P}^2$ et sur les tores complexes de dimension 2. Ce sont les k-tissus exceptionnels formés de k feuilletages globaux dont $k-1$ sont linéaires.

Pour citer cet article : J.V. Pereira, L. Pirio, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I xxx (2008).

Abstract

Classification of exceptional CDQL webs.

We present two results on the classification of exceptional CDQL webs on $\mathbb{P}^2$ and on 2-dimensional complex tori. These are the exceptional k-webs formed by k global foliations, $k-1$ of which are linear.

To cite this article: J.V. Pereira, L. Pirio, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I xxx (2008).

Abridged English version

We work in the complex analytic setting.

A global k-web defined on a surface S is *completly decomposable* if it is formed by k global foliations on S. It is *linear* if its leaves are linear. A *CDQL web* on $\mathbb{P}^2$ or on a 2-dimensional complex tori is a web that is completly decomposable and *quasilinear*, that is composed by a completly decomposable linear web plus a non-linear foliation.

Theorem 0.1 *Up to projective automorphism, there are four countable families and thirteen sporadic examples of exceptional CDQL webs on the projective plane. These are the webs listed in Théorème 3.1.*

Two webs $\mathcal{W}_1$ and $\mathcal{W}_2$ defined on two complex tori T_1 and T_2 are *isogeneous* if there exist a torus T and two isogenies $\pi_i : T \to T_i$ (for $i = 1, 2$) such that $\pi_1^*(\mathcal{W}_1) = \pi_2^*(\mathcal{W}_2)$.

Using Theorem 0.1, we are able to classify the exceptional CDQL webs on complex tori.

Theorem 0.2 *Up to isogenies, there are three sporadic examples and one continuous family of exceptional CDQL webs on complex tori. These are the webs listed in Théorème 4.2 below.*

Detailled proofs of the two above theorems are given in [10].

Email addresses: `jvp@impa.br` (Jorge Vitório Pereira), `luc.pirio@univ-rennes1.fr` (Luc Pirio).

1. Introduction

Dans toute cette note, on se place dans un cadre analytique complexe et on pose $\xi = \exp(2i\pi/3)$.

Un *germe de k-tissu* $\mathcal{W}$ est la donnée de k (germes de) feuilletages dont les feuilles s'intersectent transversalement. Un tel objet est donc définit par des germes de 1-formes holomorphes $\omega_i \in \Omega^1$ pour $i = 1, \ldots, k$; on peut voir $\mathcal{W}$ comme un élément de $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^k(\Omega^1)$ que l'on note $[\omega_1 \cdots \omega_k]$. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des *relations abéliennes* de $\mathcal{W}$ peut alors être définit comme

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \Big\{ \big(\eta_i\big)_{i=1}^k \in \big(\Omega^1\big)^k \ \Big| \ \sum_{i=1}^k \eta_i = 0\,, \ \ \forall\, i\, :\, d\eta_i = 0\,,\ \eta_i \wedge \omega_i = 0 \Big\}.$$

Un k-tissu (global) sur une surface analytique complexe connexe S peut être vu comme un élément $\mathcal{W}$ de $\mathbb{P}H^0(S, \mathrm{Sym}^k(\Omega^1_S) \otimes L)$ pour un certain fibré en droites L sur S. On demande que sur le complémentaire d'un diviseur $\Delta(\mathcal{W}) \subset S$ appelé le *lieu singulier* de $\mathcal{W}$, celui-ci induise des germes de k-tissus au sens de la définition donnée plus haut. Dans ce cadre global, on montre que les espaces vectoriels $\mathcal{A}(\underline{\mathcal{W}}_u)$ ($u \notin \Delta(\mathcal{W})$) se recollent pour former un système local sur $S \setminus \Delta(\mathcal{W})$ noté $\mathcal{A}(\mathcal{W})$, qu'on appelle encore (quelque peu abusivement cette fois) *l'espace des relations abéliennes* de $\mathcal{W}$. Par définition, le *rang* $r(\mathcal{W})$ de $\mathcal{W}$ est le rang du système local $\mathcal{A}(\mathcal{W})$. Celui-ci vérifie $r(\mathcal{W}) \leq \pi_k := \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ d'après un résultat classique de Bol. Cette majoration est optimale comme le montre l'exemple des *tissus algébriques* qui sont les k-tissus linéaires sur $\mathbb{P}^2$ formés par les tangentes d'une courbe algébrique plane de classe k.

Un tissu est *exceptionnel* s'il est *de rang maximal* (*i.e* de rang π_k) mais n'est pas équivalent, via un changement de coordonnées locales, à un tissu algébrique. Un théorème classique de Lie implique qu'un tel tissu est composé d'au moins cinq feuilletages (localement). Une conséquence du théorème d'Abel-inverse est que les tissus exceptionnels sont exactement les tissus de rang maximal qui ne sont pas linéarisables.

Si un seul exemple de tissu exceptionnel fut connu pendant près de 70 ans, ce n'est plus le cas puisque de nombreux exemples (et même des familles infinies) ont été mis à jour récemment [6,11,12,14].

Dans cette note, nous présentons des résultats de classifications concernant certains tissus exceptionnels globaux sur les surfaces compactes connexes. Un k-tissu global définit sur une telle surface S est *totalement décomposable* s'il est formé de k-feuilletages globalement définis sur S. Un tissu sur $\mathbb{P}^2$ (resp. sur un tore T) est *linéaire* si ses feuilles sont des droites projectives (resp. se relèvent en des droites affines sur le revêtement universel $\mathbb{C}^2$ de T). Un tissu sur $\mathbb{P}^2$ ou sur un tore est *quasilinéaire* s'il est de la forme $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{L}$ où $\mathcal{F}$ est un feuilletage global non-linéaire et $\mathcal{L}$ un tissu linéaire. Un *tissu CDQL* est un tissu complètement décomposable quasilinéaire. Sur $\mathbb{P}^2$, un $(k+1)$-tissu CDQL $\mathcal{W}$ est déterminé par la donnée d'un feuilletage de $\mathbb{P}^2$ de degré plus grand que 1 et par l'ensemble $\mathcal{P}$ des sommets des k-pinceaux de droites tangents aux k feuilletages linéaires de $\mathcal{W}$. Sur un tore T, un tel tissu est déterminé par un feuilletage global non-linéaire sur T et par k 1-formes différentielles à coefficients constants sur le revêtement fondamental $\mathbb{C}^2$ de T.

1.1. *Courbure et Critère de Pantazi-Mihăileanu*

Soit $\mathcal{W}$ un k-tissu définit sur une surface S. Supposons que $k = 3$ et que $\mathcal{W}$ est définit par trois formes différentielles méromorphes ω_1, ω_2 et ω_3. Sans perdre en généralité, on peut supposer que celles-ci vérifient $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. On montre qu'il existe une 1-forme γ, bien définie modulo l'addition d'une forme logarithmique $d \log g$ avec g inversible, telle que $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$ pour $i = 1, 2, 3$. On définit alors la *courbure* de $\mathcal{W}$ comme étant la 2-forme $K(\mathcal{W}) = d\gamma$. Si $k > 3$, on définit $K(\mathcal{W})$ comme étant la somme des courbures des sous-3-tissus de $\mathcal{W}$ lorsque celui-ci est décomposable. On montre facilement que la courbure d'un tissu complètement décomposable ne dépend pas de la numérotation des 1-formes qui le définissent. Cela permet de définir la courbure d'un tissu $\mathcal{W}$ pas forcément décomposable et/ou régulier ; dans ce contexte, $K(\mathcal{W})$ est une 2-forme méromorphe globale sur S, canoniquement associée à $\mathcal{W}$.

Un tissu est *plat* si sa courbure est identiquement nulle. Outre qu'elle est invariante, l'intérêt de cette notion apparaît déjà pour les 3-tissus puisque dans ce cas la platitude est équivalente au fait d'être parallélisable. Cette notion est également pertinente du point de vue de la classification des tissus de rang maximal. En effet, rendant explicite une partie d'un critère qui caractérise les tissus de rang maximal obtenu par Pantazi [8], Mihăileanu [7] montre le

Théorème 1.1 *Un tissu de rang maximal est nécessairement plat.*

Hénaut a récemment établit (de façon indépendante) un critère caractérisant la maximalité du rang d'un tissu, *cf.* [4]. S'appuyant sur la construction de Hénaut, Ripoll [13] a retrouvé le critère nécessaire ci-dessus, et l'a redémontré dans le cas des k-tissus, pour $k = 3, 4, 5$. Une preuve du Théorème 1.1 dans le cas général $k \geq 3$ avec le formalisme de [4] doit paraître dans [5].

C'est la remarque triviale suivante qui est à l'origine du travail présenté dans cette note : *un tissu global sur* $\mathbb{P}^2$ *est plat si et seulement si sa courbure est holomorphe.* En toute généralité, le lieu des pôles de la courbure $K(\mathcal{W})$ d'un tissu global $\mathcal{W}$ sur une surface S est inclus dans le lieu singulier $\Delta(\mathcal{W})$ de $\mathcal{W}$. L'un de nos résultat principal est un critère simple qui caractérise l'holomorphie de $K(\mathcal{W})$ au point générique d'une composante irréductible de $\Delta(\mathcal{W})$. Il s'énonce en terme de la notion de *transformation barycentrique d'un tissu par rapport à un feuilletage* que l'on va maintenant introduire.

2. Transformation $\mathcal{F}$-barycentrique d'un tissu et holomorphie de la courbure

Le critère caractérisant la régularité de la courbure d'un tissu étant local, il convient de se placer dans ce cadre pour l'énoncer : on travaille donc sur un domaine fixé $U \subset \mathbb{C}^2$ dans cette section. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage et $\mathcal{W}$ un tissu tout deux définis sur U et dont les feuilles s'intersectent transversalement au point générique u de U. Les directions tangentes $L_1, \ldots, L_k$ des feuilles de $\mathcal{W}$ passant par u sont toutes distinctes de $T\mathcal{F}_u$. Celles-ci peuvent donc être considérées comme k points dans $\mathbb{P}T_uU \setminus T\mathcal{F}_u$ qui admet une structure affine canonique. On peut donc considérer leur barycentre dans cette droite affine, que l'on note $\beta_{T\mathcal{F}_u}(L_1, \ldots, L_k)$. On construit ainsi un champs de directions tangentes sur U qui s'intègre (pour des raisons de dimension) en un feuilletage qui se prolonge en un feuilletage holomorphe singulier sur U tout entier : par définition, c'est le *transformé $\mathcal{F}$-barycentrique du tissu* $\mathcal{W}$. On le note $\beta_{\mathcal{F}}(\mathcal{W})$.

Théorème 2.1 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage et $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$ un k-tissu complètement décomposable, tout deux définis sur U. Soit C une composante irréductible de* $\mathrm{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_1)$ [1] *qui n'est pas contenue dans le lieu singulier $\Delta(\mathcal{W})$ de $\mathcal{W}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) la courbure $K(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{W})$ est holomorphe au point générique de C ;

ii) la courbe C est invariante par $\mathcal{F}_1$ ou par $\beta_{\mathcal{F}_1}(\mathcal{F}_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k)$.

C'est l'implication $i) \Rightarrow ii)$ qui nous intéresse. Pour l'utiliser de façon effective, il est nécessaire d'expliciter le plus possible ce que signifie, pour une courbe, d'être $\beta_{\mathcal{F}_1}(\mathcal{F}_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k)$-invariante. Dans la pratique, nous considérerons le cas le plus simple, lorsque les feuilletages $\mathcal{F}_i$ sont tous globaux et linéaires.

3. Classification des tissus CDQL exceptionnels sur le plan projectif

Si $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^2$ est un ensemble fini de cardinal k, on note $\mathcal{W}(\mathcal{P}) = \mathcal{L}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}_k$ le tissu linéaire formé des feuilletages tangents aux pinceaux de droites de sommet les points de $\mathcal{P}$. Un tissu CDQL sur $\mathbb{P}^2$ est de la forme $\mathcal{W}(\mathcal{P}) \boxtimes \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est un feuilletage global sur le plan projectif, de degré plus grand que 1.

[1] Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux feuilletages sur U, on note $\mathrm{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ le diviseur effectif localement découpé par les fonctions holomorphes $\frac{\omega \wedge \omega'}{dx \wedge dy}$, où ω et ω' sont des (germes de) 1-formes définissant localement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ (respectivement) et s'annulant sur un ensemble de codimension plus grande que 2.

Via un calcul explicite, on montre que, en général, $\widehat{\mathcal{L}_1} := \beta_{\mathcal{L}_1}(\mathcal{L}_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}_k)$ est une équation de Ricatti relativement au pinceau $\mathcal{L}_1$ de sommet p_1, qui jouit de propriétés particulières : ses séparatrices passant par p_1 sont en fait les courbes algébriques $\widehat{\mathcal{L}_1}$-invariantes passant par ce point, à savoir les droites $\ell_p = \overline{p_1 p}$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ distinct de p_1 ; les singularité de $\widehat{\mathcal{L}_1}$ sont les p_1-barycentres, sur chaque droite ℓ_p, des sous-ensembles $\mathcal{P} \cap \ell_p \setminus \{p_1\}$, et, si $\widehat{\mathcal{L}_1}$ admet une courbe invariante distincte d'une des droites ℓ_p, ses singularités sont nécessairement alignées, etc..

Les propriétés vérifiées par la transformée barycentrique, par rapport à un pinceau de droites, d'un tissu linéaire totalement décomposable nous permettent d'utiliser le Théorème 2.1 de façon effective pour classifier les tissus CDQL exceptionnels sur le plan projectif.

Théorème 3.1 *À transformations projectives près, il existe quatre familles infinies et treize exemples sporadiques de tissus CDQL exceptionnels sur* $\mathbb{P}^2$.

Les quatre familles infinies sont (avec k un entier tel que $\mathcal{A}_*^k$ soit composé de $k + * \geq 5$ feuilletages) :

$$\mathcal{A}_I^k = \big[(dx^k - dy^k)\big] \boxtimes \big[d(xy)\big] \qquad \mathcal{A}_{II}^k = \big[(dx^k - dy^k)\,(xdy - ydx)\big] \boxtimes \big[d(xy)\big]$$
$$\mathcal{A}_{III}^k = \big[(dx^k - dy^k)\,dx\,dy\big] \boxtimes \big[d(xy)\big] \qquad \mathcal{A}_{IV}^k = \big[(dx^k - dy^k)\,dx\,dy\,(xdy - ydx)\big] \boxtimes \big[d(xy)\big]\,.$$

Parmi les exemples sporadiques, sept sont invariants par une action linéaire de $\mathbb{C}^*$. Ce sont les tissus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_5^a &= \big[dx\,dy\,(dx+dy)\,(xdy-ydx)\big] &&\boxtimes \big[d\big(xy(x+y)\big)\big]\,;\\
\mathcal{A}_5^b &= \big[dx\,dy\,(dx+dy)\,(xdy-ydx)\big] &&\boxtimes \Big[d\big(\tfrac{xy}{x+y}\big)\Big]\,;\\
\mathcal{A}_5^c &= \big[dx\,dy\,(dx+dy)\,(xdy-ydx)\big] &&\boxtimes \Big[d\big(\tfrac{x^2+xy+y^2}{xy\,(x+y)}\big)\Big]\,;\\
\mathcal{A}_5^d &= \big[dx\,(dx^3+dy^3)\big] &&\boxtimes \big[d\big(x(x^3+y^3)\big)\big]\,;\\
\mathcal{A}_6^a &= \big[dx\,(dx^3+dy^3)\,(xdy-ydx)\big] &&\boxtimes \big[d\big(x(x^3+y^3)\big)\big]\,;\\
\mathcal{A}_6^b &= \big[dx\,dy\,(dx^3+dy^3)\big] &&\boxtimes \big[d(x^3+y^3)\big]\,;\\
\mathcal{A}_7 &= \big[dx\,dy\,(dx^3+dy^3)\,(xdy-ydx)\big] &&\boxtimes \big[d(x^3+y^3)\big]\,.
\end{aligned}$$

Quatre des six derniers exemples sporadiques de tissus CDQL exceptionnels sur $\mathbb{P}^2$ ont en commun le même feuilletage non-linéaire : le pinceau des coniques passant par quatre points en position générale dans le plan projectif. L'un est le tissu de Bol

$$\mathcal{B}_5 = \Big[dx\,dy\,d\big(\frac{x}{1-y}\big)\,d\big(\frac{y}{1-x}\big)\Big] \boxtimes \Big[d\big(\frac{xy}{(1-x)(1-y)}\big)\Big]$$

et les trois autres sont

$$\mathcal{B}_6 = \mathcal{B}_5 \boxtimes \big[d\,(x+y)\big]\,, \qquad \mathcal{B}_7 = \mathcal{B}_6 \boxtimes \Big[d\big(\frac{x}{y}\big)\Big] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_8 = \mathcal{B}_7 \boxtimes \Big[d\big(\frac{1-x}{1-y}\big)\Big]\,.$$

Les deux derniers exemples sporadiques ont eux aussi en commun le même feuilletage non-linéaire : le pinceau de Hesse[2] *. Ces deux tissus sont :*

[2] Le pinceau de Hesse est le pinceau de cubiques planes engendré par une cubique lisse et sa hessienne. Il est unique à automorphisme projectif près. Il est classiquement présenté comme le pinceau engendré par $x^3 + y^3 + z^3$ et xyz.

$$\mathcal{H}_5 = \Big[(dx^3+dy^3)\,d\Big(\frac{x}{y}\Big)\Big] \boxtimes \Big[d\Big(\frac{x^3+y^3+1}{xy}\Big)\Big]$$

$$\text{et} \quad \mathcal{H}_{10} = \Big[(dx^3+dy^3)\prod_{k=0}^{2} d\Big(\frac{y-\xi^k}{x}\Big)\prod_{k=0}^{2} d\Big(\frac{x-\xi^k}{y}\Big)\Big] \boxtimes \Big[d\Big(\frac{x^3+y^3+1}{xy}\Big)\Big] .$$

Les tissus noté avec la lettre calligraphiée $\mathcal{A}$ sont ceux qui admettent un automorphisme infinitésimal. Leurs relations abéliennes peuvent toutes être explicitement déterminées en utilisant les résultats de [6]. Les composantes des relations abéliennes non-élémentaires des tissus $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{H}_l$ (pour $k = 5, 6, 7, 8$ et $l = 5, 10$) sont toutes des intégrales itérées de poids plus petit que 2 (voir [10] pour des détails).

Si $\mathcal{B}_5$ est connu depuis plus de 70 ans, les tissus $\mathcal{B}_k$ (pour $k = 6, 7, 8$) n'ont été considérés et étudiés que récemment (*cf.* [11,14]). À notre connaissance, les tissus $\mathcal{H}_5$ et $\mathcal{H}_{10}$ apparaissent ici pour la première fois.

Remarque : les résultats de [10] permettent en fait de classifier les tissus CDQL plats sur $\mathbb{P}^2$ de degré[3] *strictement plus grand que 1. Outre les treize exemples sporadiques exceptionnels décris dans le Théorème 3.1, il n'y a que trois autres tels tissus (à équivalence projective près), à savoir*

$$\Big[dx\,dy\,d(x+y)\,d\Big(\frac{x}{y}\Big)\,d\Big(\frac{xy}{x+y}\Big)\Big] , \qquad \Big[dx\,dy\,d(x+y)\,d\Big(\frac{x}{y}\Big)\,\big((2x+y)^2dx+(2y+x)^2dy\big)\Big]$$

$$\text{et} \quad \Big[d(x-y)\prod_{k=0}^{2} d\Big(\frac{2\,x+\xi^k}{2\,y+\xi^k}\Big)\Big((1+x^3+6\,x\,y^2+y^3)\,dx-(1+x^3+6\,x^2y+y^3)\,dy\Big)\Big] .$$

4. Classification des tissus CDQL exceptionnels sur les tores complexes

En utilisant le Théorème 2.1 ainsi que la classification des tissus CDQL de rang maximal sur $\mathbb{P}^2$, on peut obtenir une classification des tissus CDQL exceptionnels sur les tores. Pour l'énoncer, il convient de poser la définition suivante : deux tissus $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ définis respectivement sur deux tores complexes T_1 et T_2 sont *isogènes* s'il existe un tore T et deux isogénies $\pi_i : T \to T_i$ (pour $i = 1, 2$) tels que $\pi_1^*(\mathcal{W}_1) = \pi_2^*(\mathcal{W}_2)$.

On commence par montrer la

Proposition 4.1 *Un tore portant un tissu CDQL exceptionnel est isogène au carré d'une courbe elliptique.*

Pour τ dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, on pose $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\,\mathbb{Z})$ et l'on note $\wp(\cdot,\tau)$ la fonction $\wp$ de Weierstrass ainsi que $\vartheta_i(\cdot,\tau)$ les fonctions thétas (avec les notations de Jacobi) associées au réseau $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$.

Théorème 4.2 *À isogénies près, il existe exactement trois exemples sporadiques et une famille continue de tissus CDQL exceptionnels sur les tores complexes.*

La famille infinie est paramétrée par un quotient d'indice 2 de la courbe modulaire $X_0(2)$. Ses éléments sont les 5-tissus

$$\mathcal{E}_\tau = \big[\,dx\,dy\,(dx^2-dy^2)\,\big] \boxtimes \Big[d\Big(\frac{\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_1(y,\tau)}{\vartheta_4(x,\tau)\vartheta_4(y,\tau)}\Big)\Big]$$

respectivement définis sur $E_\tau \times E_\tau$, avec $\tau \in \mathbb{H}$ arbitraire.

Les trois exemples sporadiques sont définis sur le carré d'une courbe elliptique à multiplication complexe. Plus précisément, ce sont

[3] Par définition, le *degré* d'un k-tissu plan $\mathcal{W} \in \mathbb{P}H^0\big(\mathbb{P}^2, \mathrm{Sym}^k(\Omega^1_{\mathbb{P}^2})\otimes L\big)$ est l'entier $deg(L)-2\,k$. Il peut aussi être définit comme étant le nombre de points de tangence d'une droite générique de $\mathbb{P}^2$ avec les feuilles de $\mathcal{W}$.

1. le 5-tissu définit sur $E_\xi \times E_\xi$:

$$\mathcal{E}_5' = \big[dx\,dy\,(dx-dy)\,(dx+\xi^2\,dy)\big] \boxtimes \left[d\Big(\frac{\vartheta_1(x,\xi)\vartheta_1(y,\xi)\vartheta_1(x-y,\xi)\vartheta_1(x+\xi^2\,y,\xi)}{\vartheta_2(x,\xi)\vartheta_3(y,\xi)\vartheta_4(x-y,\xi)\vartheta_3(x+\xi^2\,y,\xi)}\Big)\right];$$

2. le 6-tissu définit sur $E_\xi \times E_\xi$:

$$\mathcal{E}_6 = \big[\,dx\,dy\,(dx^3+dy^3)\big] \boxtimes \left[\frac{dx}{\wp(x,\xi)} + \frac{dy}{\wp(y,\xi)}\right];$$

3. le 7-tissu définit sur $E_{1+i} \times E_{1+i}$:

$$\mathcal{E}_7 = \big[dx^2+dy^2\big] \boxtimes \mathcal{E}_{1+i} = \big[\,dx\,dy\,(dx^4-dy^4)\,\big] \boxtimes \left[d\Big(\frac{\vartheta_1(x,1+i)\,\vartheta_1(y,1+i)}{\vartheta_4(x,1+i)\,\vartheta_4(y,1+i)}\Big)\right].$$

Les tissus $\mathcal{E}_\tau$ ont été considérés en premier lieu dans [2], sans que l'auteur ne s'intéresse à leur rang. Ils ont été redécouverts dans [12] où il est démontré que ceux-ci sont exceptionnels. À notre connaissance, les autres tissus du théorème ci-dessus n'ont jamais été considérés auparavant.

Les composantes des relations abéliennes non-élémentaires des tissus CDQL "elliptiques" du Théorème 4.2 sont toutes de la forme $\frac{d\vartheta}{\vartheta-\lambda}$ où ϑ désigne une fonction theta et λ une constante.

Des preuves détaillées des résultats présentés dans cette note sont données dans [10].

Remerciements

Le premier auteur remercie Jorge Pastore pour les discussions lumineuses qu'ils ont eut l'occasion d'avoir ces derniers mois. Les deux auteurs remercient le *Réseau Franco-Brésilien pour les Mathématiques* qui a rendu possible leur collaboration.

Références

[1] W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe.* Die Grundlehren der Math. **49**, Springer, Berlin, 1938.

[2] P. Buzano, *Tipi notevoli di 5-tessuti di curves piane.* Boll. Un. Mat. Ital. **1** (1939) 7–11.

[3] S.-S. Chern, P. Griffiths, *Corrections and addenda to our paper :"Abel's theorem and webs".* Jahr. Deutsch. Math.-Ver. **83** (1981) 78–83.

[4] A. Hénaut, *Planar web geometry through abelian relations and connections.* Annals of Math. **159** (2004) 425–445.

[5] A. Hénaut, O. Ripoll, G. Robert, *Formule de la trace pour la connexion d'un tissu du plan.* En préparation.

[6] D. Marín, J.V. Pereira, L. Pirio, *On planar webs with infinitesimal automorphisms.* Inspired by Chern, Nankai Tracts in Mathematics **11** (2006) 351-364.

[7] N. Mihăileanu, *Sur les tissus plans de première espèce.* Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **43** (1941) 23–26.

[8] A. Pantazi, *Sur la détermination du rang d'un tissu plan.* Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40** (1940) 197–204.

[9] J.V. Pereira, *Algebraization of Codimension one Webs.* Séminaire Bourbaki 2006-2007, exposé n^0 **974**, à paraître.

[10] J.V. Pereira, L. Pirio, *The classification of exceptional CDQL webs.* Prépublication 2008, arXiv :0806.3290.

[11] L. Pirio, *Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus.* Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 2004.

[12] L. Pirio, J.-M. Trépreau, *Tissus plans exceptionnels et fonctions thêta.* Ann. Inst. Fourier **55** (2005) 2209-2237.

[13] O. Ripoll, *Properties of the connection associated with planar webs and applications.* Arxiv :math.DG/0702321 (2007).

[14] G. Robert, *Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans.* Prépublication **146** Université Bordeaux 1 (2002).

[15] J.-M. Trépreau, *Algébrisation des Tissus de Codimension* 1 *– La généralisation d'un Théorème de Bol.* Inspired by Chern, Nankai Tracts in Mathematics **11** (2006) 399-433.