

Picard-Lefschetz-Theorie der Anordnungen¹

HOSSEIN MOVASATI

1 Einführung

Eine Anordnung A ist eine Menge von Geraden in der Ebene. A heißt in allgemeiner Lage wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. Je zwei Geraden in A sind nicht parallel. 2. Je drei Geraden in A schneiden sich nicht in einem gemeinsamen Punkt. Zum Beispiel ist in Abbildung 1 die Anordnung A in allgemeiner Lage, aber B und C sind es nicht. In B gibt es drei Geraden durch einen Punkt und in C gibt es zwei parallele Geraden.

Sei A eine Anordnung in allgemeiner Lage von $d + 1$ Geraden $l_i, i = 0, 1, \dots, d$, I_1 die Menge ihrer Schnittpunkte und G^s eine Abelsche Gruppe, die durch $\delta_i, i \in I_1$ frei erzeugt wird. Zu jeder Geraden l in A assoziieren wir folgendermaßen ein Element von G^s : Seien $\delta_j, j = 1, \dots, d$ die Schnittpunkte von l mit den anderen Geraden in A . Wir nehmen an, daß die Reihenfolge der δ_i auf der Geraden l genauso ist (Es gibt zwei Möglichkeiten die Reihenfolge zu definieren, wir wählen eine davon). Wir definieren $\delta^l = \sum_{j=1}^d (-1)^j \delta_j \in G^s$.

Das Komplement von A in der Ebene hat viele Zusammenhangskomponenten. Sie sind Vielecke (endliche Bereiche in der Ebene) oder unendliche Bereiche. Sei I_2 die Menge aller Vielecke, $i \in I_2$ und seien $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ die Ecken von i . Man definiert $\delta^i = \sum_{i=1}^n \delta_i \in G^s$.

Satz 1. *Die Elemente $\delta^{l_i}, i = 1, 2, \dots, d$ und $\delta^j, j \in I_2$ erzeugen $d \cdot G$ und d ist die minimale Zahl mit dieser Eigenschaft.*

Wir bemerken, daß die Anzahl der Vielecke $\#I_2 = \frac{d(d-1)}{2}$ und die Anzahl der Schnittpunkte der Geraden $\#I_1 = \frac{d(d+1)}{2}$ ist. Deshalb die Anzahl der Elemente in dem Problem gerade $\#I_1$ ist.

Wir teilen die Menge aller Vielecke in Zwei: $I_2 = I_2^+ \cup I_2^-$ positive Vielecke und negative Vielecke, auf der weise, die in Abbildung 1 A beschrieben ist. Sei G^{c+} (bzw. G^{c-}) eine Abelsche Gruppe, die mit δ_i frei erzeugt ist, wobei i durch die positive (bzw. negative) Vielecke von A läuft, und $G^c := G^{c+} \oplus G^{c-}$, $G = G^c \oplus G^s$. Die Abelsche Gruppe G ist durch $\delta_i, i \in I := I_1 \cup I_2$ frei erzeugt. Wir definieren folgendermaßen ein anti-symmetrisches lineares Produkt in G : $\langle \delta_i, \delta_j \rangle = 1$, $i, j \in I$ genau dann i ein Vieleck und j ein Eck von j ist oder i ein positives und j ein negatives Vieleck mit einer gemeinsamen Seite sind, $\langle i, j \rangle = -1$ genau dann $\langle j, i \rangle = 1$, für alle andere Fälle $\langle i, j \rangle = 0$ gilt. Bei Linearität, definiert man $\langle \cdot, \cdot \rangle: G \times G \rightarrow \mathbb{Z}$. Sei

$$I := \{\delta \in G \mid \langle \delta, \delta' \rangle = 0, \forall \delta' \in G\}$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\delta^{l_i} \in I$, $i = 0, 1, 2, \dots, d$. Man kann δ^{l_i} so wählen, so daß $\sum_{i=0}^d \delta^{l_i} = 0$ (wir haben zwei möglichkeiten, entweder δ^{l_i} oder $-\delta^{l_i}$).

Satz 2. *Die Gruppe I ist durch $\delta^{l_i} \in I$, $i = 1, 2, \dots, d$ frei erzeugt.*

Sei \tilde{C} eine (nicht Abelsche) Gruppe, die mit γ_0 und $\gamma_i, i \in I_2$ frei erzeugt ist. Die Gruppe \tilde{C} wirkt auf G folgendermaßen: Die wirkung von $\gamma_i, i \in I_2$ ist durch

$$(1) \quad \delta \rightarrow \delta - \langle \delta, \delta_i \rangle \delta_i$$

¹Math. classification: 14D05

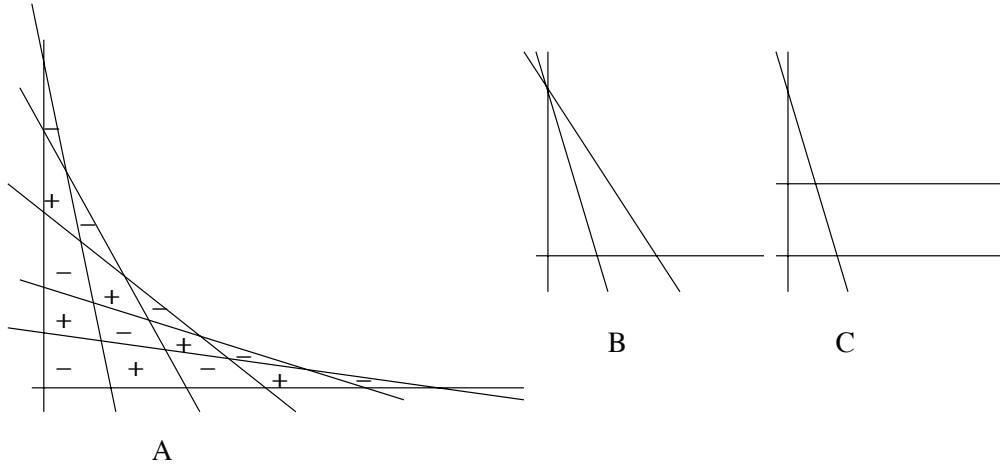


Figure 1: Anordnung

und die Wirkung von γ_0 ist durch

$$(2) \quad \delta \rightarrow \delta - \sum_{i \in I_1} \langle \delta, \delta_i \rangle \delta_i$$

gegeben. Das Element $\delta \in G$ heißt verschwindender Zyklus wenn es in der form $h \cdot \delta_i, i \in I, h \in \tilde{C}$ ist. Man kann Satz 1 in der folgenden form umschreiben.

Satz* 1. Für je verschwindener Zyklus $\delta \in G$ die Menge $\tilde{C} \cdot \delta$ erzeugt die ganze $d \cdot (G/I)$ und d ist die minimale Zahl mit dieser Eigenschaft.

Ich habe versucht, Satz 1 mit Hilfe der vollständigen Induktion über d oder mit Variationen der Geraden in der reelle Ebenen zu beweisen. Es scheint mir, daß der Beweis mit diesen Methoden sehr schwer sein muß (Satz 2 ist einfacher als Satz 1). Das Ziel dieser Arbeit ist nicht die Sätze 1,2 zu beweisen, sondern die Picard-Lefschetz Theorie hinter ihnen zu entdecken und zu beschreiben. Mit Hilfe dieser Theorie werden wir zeigen, daß die Sätze 1,2 für eine spezielle Anordnung die Sätze 1,2 für alle Anordnungen impliziert. Dann geben wir einen Hinweis auf den Beweis im besonderen Fall der Anordnung aus Abbildung 1 A mit beliebige d . Trotzdem bleibt die Herausforderung, die Sätze 1,2 mit elementaren Methoden zu beweisen, für den Leser. Für Anwendungen von Satz* 1 in gewöhnlichen Differentialgleichungen man vergleiche [Mo2].

2 Picard-Lefschetz-Theorie

Man kann Picard-Lefschetz-Theorie als komplexe Morse-Theorie einführen mit folgendem Unterschied: In Picard-Lefschetz-Theorie betrachtet man die Topologie einer regulären Faser, wenn sie um eine kritische Faser herumläuft, aber in Morse-Theorie wenn sie durch die kritische Faser läuft. Die Picard-Lefschetz-Theorie für jedes Polynom f beruht auf folgendem: Sei f ein Polynom in unbestimmten x und y und mit Koeffizienten aus den komplexen Zahlen. Dann gilt: f als eine Abbildung von \mathbb{C}^2 nach \mathbb{C} ist ein C^∞ lokal-triviales Faserbündel über $\mathbb{C} - C$, wobei C eine endliche Teilmenge von \mathbb{C} ist. Das heißt, zu jedem Punkt $b \in \mathbb{C} - C$ gibt es eine hinreichend kleine offene Umgebung von b und einen

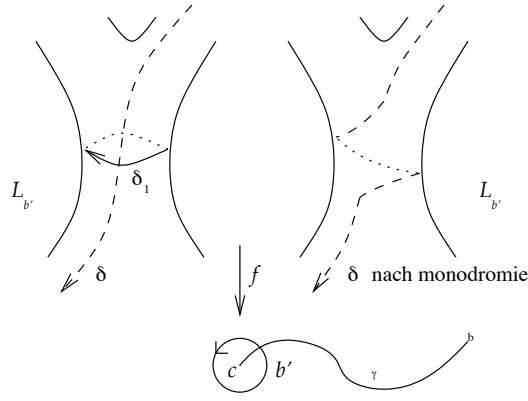


Figure 2: Monodromie

Diffeomorphismus $\pi : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times f^{-1}(b)$, der $f^{-1}(x), x \in U$, unter π auf $x \times f^{-1}(b)$ abbildet (Siehe [DN]).

Dieses Faktum sagt, daß alle Fasern der Abbildung f ähnlich sind außer einer endlichen Zahl von ihnen. Von jetzt ab heißen die Elemente der Menge $\mathbb{C} - C$ reguläre Werte der Abbildung f und schreiben wir $L_b := f^{-1}(b), b \in \mathbb{C}$. Es folgt, daß es für je zwei Punkte $b_1, b_2 \in U$ einen einzigen Isomorphismus $H_1(L_{b_1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(L_{b_2}, \mathbb{Z})$ gibt. Dieser Isomorphismus hängt nicht von Wahl von π ab. Jetzt können wir die Monodromie eines Weges in $\mathbb{C} - C$ definieren. Seien $b, b' \in \mathbb{C} - C$ und γ ein Weg mit dem Anfangspunkt b und Endpunkt b' . Sei $\{U_i\}_{i=1}^n$ eine Überdeckung von γ mit offenen Mengen U_i , die aus dem obigen Faktum kommen. Wir nehmen an, daß $b \in U_0$ und $b' \in U_n$ und $U_i \cap U_{i+1}$ nicht leer ist; wir wählen $b_i \in U_i \cap U_{i+1}$. Wir haben eine Folge von Isomorphismen

$$H_1(L_b, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_1(L_{b_1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_1(L_{b_2}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H_1(L_{b_n}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_1(L_{b'}, \mathbb{Z})$$

Sei $h_\gamma : H_1(L_b, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(L_{b'}, \mathbb{Z})$ die Komposition dieser Isomorphismen. Es ist nicht zu schwer zu beweisen, daß h_γ nur von der Homotopieklasse des Weges γ abhängt. Wenn $b = b'$ ist, dann haben wir einen Automorphismus von $H_1(L_b, \mathbb{Z})$. In anderen Worten, haben wir die Wirkung von $\pi_1(\mathbb{C} - C, b)$ auf $H_1(L_b, \mathbb{Z})$

$$h : \pi_1(\mathbb{C} - C, b) \times H_1(L_b, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(L_b, \mathbb{Z})$$

wobei $\pi_1(\mathbb{C} - C, b)$ die Homotopiegruppe von $\mathbb{C} - C$ mit dem Basispunkt b ist.

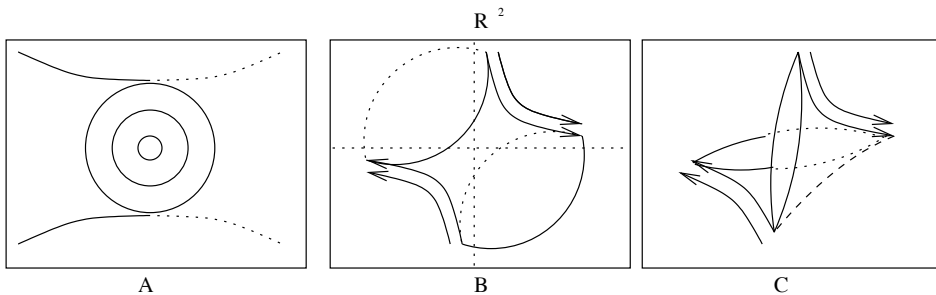


Figure 3: Verschwindener Zyklus

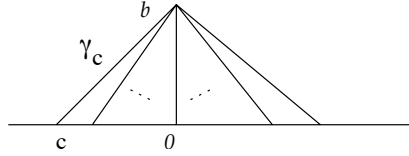


Figure 4: Hervorragendes system von Wege

Ein Punkt $p \in \mathbb{C}^2$ ist ein kritischer Punkt von f , wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$ ist. Dann ist $f(p)$ ein kritischer Wert von f . Alle kritischen Werte von f gehören zu C , aber C kann andere Werte haben (zum Beispiel $f = x(xy - 1)$ und der Wert 0). Ein kritischer Punkt heißt ein nicht entarteter kritischer Punkt wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 \neq 0$ ist. Es gibt eine Umgebung U von p mit neuen Koordinaten (x', y') , so daß in dieser Umgebung $f - f(p) = x'^2 + y'^2$ gilt. In dieser Umgebung sieht eine Faser L_b von f wie ein Schlauch aus. Also ist $H_1(L_b \cap U, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Das Bild des erzeugenden Elements von $H_1(L_b \cap U, \mathbb{Z})$ in $H_1(L_b, \mathbb{Z})$ heißt verschwindener Zyklus.

Sei b ein regulärer Wert des Polynoms f , γ ein Weg in $\mathbb{C} - C$ mit Anfangspunkt b' in der Nähe von $c \in C$ aber außerhalb von C und Endpunkt b . Die Monodromie dieses Weges auf dem verschwindener Zyklus in $H_1(L_{b'}, \mathbb{Z})$ heißt der verschwindener Zyklus in $H_1(L_b, \mathbb{Z})$ entlang des Weges γ . Jetzt sei γ' ein Weg, dessen Anfangs- und Endpunkt b ist und so daß γ' bis b' am Weg $-\gamma$ entlang läuft, sich dann um c gegen den Uhrzeigersinn dreht und dann am Weg γ entlang nach b zurückkommt. $h_{\gamma'}$ heißt die Monodromie entlang des Weges γ um c . Die Monodromie um ein nicht entarteter Werte ist in Abbildung 2 gezeigt.

Anordnungen: Seien x, y die Koordinaten der Ebene und $l_i = 0, i = 0, 1, \dots, d$ die Gleichungen der Geraden der Anordnung A , die in der Einführung betrachtet waren. Wir definieren das Polynom $f_A = f = l_0 l_1 \cdots l_d$. Das Polynom f hat d^2 verschiedene nicht entartete kritische Punkte. Zur Beweis dieses Faktum bemerken wir, daß die Schnittpunkte der Geraden sind schon $\frac{d(d+1)}{2}$ nicht entartete kritische Punkte von f . Die Einschränkung von f auf den Rand eines Vielecks ist Null. Also, muss f einen kritischen Punkt in dem Vieleck haben. Deshalb haben wir $d^2 = \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2}$ kritische Punkte.

Sei a ein Schnittpunkt von zwei Geraden in A und b ein kritischer Punkt von f in einem Vieleck von A . In einer Umgebung von a (bzw. b) gibt es neue Koordinaten (x', y') , so daß in diesen Koordinaten $x'(a) = y'(a) = 0$ und $f = f(a) + x'^2 - y'^2$ (bzw. $f = f(a) + x'^2 + y'^2$) gilt. Von einem komplexen Standpunkt aus gibt es keinen Unterschied zwischen a und b . In der reellen Ebene können wir den Unterschied in der Abbildung 3 A, C sehen. Die Abbildung B ist nicht die richtige intuition einer regulärer Faser um a . Der verschwindener Zyklus um b liegt in der reellen Ebene, aber der um a liegt nicht in der reellen Ebene.

Es gibt drei typen kritische Werte von f : 1. $0 \in \mathbb{C}$, f bildet alle Schnittpunkte der Geraden von A auf 0 ab. 2. Positive kritische Werte 3. Negative kritische Werte. Wir nehmen an, daß die kritische Werte ungleich Null des Polynoms f unterschiedlich sind. Das ist eine generische Hypothese.

Sei b ein regulärer Wert von f mit positiven Realteil und γ_c eine Gerade in \mathbb{C} , die b mit c , ein kritischer Wert von f , verbindet (Siehe Abb. 4). Die Menge Γ aller γ_c heißt ein hervorragendes System von Wege. Seien $\delta_i, i = 1, 2, \dots, d^2$ die verschwindene Zyklen entlang der Wege in Γ . Wir bemerken, daß entlang des Wegs γ_0 es $\frac{d(d+1)}{2}$ verschwindene Zyklen gibt. Jetzt haben wir eine Korrespondenz zwischen 1. $\delta_i, i = 1, 2, \dots, d^2$

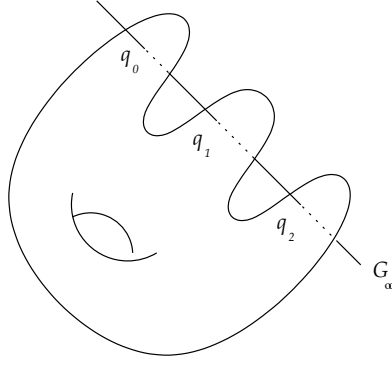


Figure 5: Unendlich, $d = 2$

2. Schnittpunkte der Geraden und Vielecke, d.h. $I_1 \cup I_2$ 3. Kritische Punkte der f . Es ist bekannt, daß die Zyklen $\delta_i, i = 1, 2, \dots, d^2 H_1(L_b, \mathbb{Z})$ frei erzeugen (Siehe z.B. [DN]). Nach einem geeigneten Orientation der Zyklen $\delta_i, i \in I$, das Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der Einführung genau das Schnittprodukt von $H_1(L_b, \mathbb{Z})$ ist (Siehe [Gu1], [AC]). Deshalb, realisieren wir die Gruppe G in der Einführung als die Homology Gruppe einer regulärer Faser L_b von f und die gruppe \tilde{C} als $\pi_1(\mathbb{C} - C, b)$. Die Monodromie entlang γ_0 um 0 ist durch die Formel (2) und die Monodromie entlang γ_c um einem verschieden von nulls kritische Punkt c ist durch die Formel (1) gegeben. Beide (2) und (1) sind die Folge des Picard- Lefschetz Formel (Siehe [La]).

Kompaktifizierung der Ebene: Zu einem besseren Verständnis von Picard-Lefschetz-Theorie und Folgerung 1 brauchen wir eine gute Kompaktifizierung von \mathbb{C}^2 . Die Kompaktifizierung $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ ist durch F. Hirzebruch mit folgenden Worten in [Hi] S. 49 beschrieben: *Wir wollen auch die Ebene projektiv abschließen, d.h. auf jeder Geraden liegt ein "unendlich-ferner" Punkt, zwei parallele Geraden gehen durch denselben unendlich-fernen Punkt.*

Sei $\mathbb{P}^2 = \{[x : y : z] \mid (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\}$ der projektive Raum der Dimension zwei. Wir setzen \mathbb{C}^2 mit $\{[x : y : 1] \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$ gleich und schreiben $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$. $G_\infty := \mathbb{P}^2 - \mathbb{C}^2 = \{[x : y : 0] \mid x, y \in \mathbb{C}\}$ ist ein projektiver Raum der Dimension eins und heißt die Gerade am Unendlichen. Seien $\{[u : 1 : v] \mid (u, v) \in \mathbb{C}^2\}$ und $\{[1 : r : s] \mid (r, s) \in \mathbb{C}^2\}$ andere affin Koordinaten von \mathbb{P}^2 . Die Gerade am Unendlichen in diesen Koordinaten ist durch $v = 0$ bzw. $s = 0$ gegeben. Die Abbildungen $(u, v) \rightarrow (u/v, 1/v) = (x, y)$ und $(r, s) \rightarrow (1/s, r/s) = (x, y)$ sind Koordinaten wechsel.

Sei $f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) + \dots + f_d(x, y) + f_{d+1}(x, y)$ das Polynom in letztes Abschnitts, wobei f_i der Homogen Anteil vom Grad i von f ist. Das erfüllt die folgende Bedingung: (*) $f_{d+1}(x, y) = 0$ hat $d + 1$ verschiedene Punkte in der projektiven Geraden. Sei $\mathcal{R} = \{[x : y : 0] \in G_\infty \mid f_{d+1}(x, y) = 0\} := \{q_0, q_1, \dots, q_d\}$, wobei q_i der Schnittpunkt von l_i mit G_∞ ist, und $S_b := \overline{L_b}$ die abgeschlossene Hülle der Faser L_b in \mathbb{P}^2 . Wir haben $S_b = L_b \cup \mathcal{R}$, und die Eigenschaft (*) impliziert, daß alle S_b in den Punkten \mathcal{R} glatt sind, daß die Menge C nur die kritischen Werte von f enthält und daß $S_b, b \in \mathbb{C} - C$, eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\frac{d(d-1)}{2}$ ist (Siehe Abb. 5). Der Zyklus δ^{q_i} in $L_t, t \in \mathbb{C}$ um eines Punkts q_i heißt der Zyklus am Unendliche. Solch ein Zyklus hat nicht Schnittpunkte mit den Verschwindenen Zyklen. Deshalb er unter die Monodromie fest ist und deshalb gehört zur I . Die Gruppe I ist durch $\delta^{q_i}, i = 1, 2, \dots, d$ frei erzeugt (Nach einem geeigneten

Orientation der Zyklen δ^{q_i} haben wir $\sum_{i=0}^d \delta^{q_i} = 0$). Man vermutet, daß der Zyklus δ^{l_i} ist genau der Zyklus δ^{q_i} . Jetzt weist man, daß G/I in Satz* 1 die Homologie Gruppe $H^1(S_b, \mathbb{Z})$ ist. Satz* 1 sagt, daß die Wirkung von Monodromie auf einem verschwindenden Zyklus die ganze Homologie erzeugt.

Hinweis auf Beweise: Sei $\check{\mathbb{C}}^2$ die Menge aller Geraden in \mathbb{C}^2 und $M \subset \mathcal{A} := \check{\mathbb{C}}^2 \times \check{\mathbb{C}}^2 \times \dots \times \check{\mathbb{C}}^2$ ($d+1$)-mal, die Menge aller Anordnungen A , die entweder nicht in allgemeiner Lage sind oder die kritische Werte ungleich null des Polynoms f_A nicht unterschiedlich sind. Die Menge M eine analytische Varietät ist, und deshalb, das Komplement $U := \mathcal{A} - M$ zusammenhängend und offen ist. Sei A und A' zwei Anordnungen in U und Γ ein Weg mit dem Anfangspunkt A und Endpunkt A' . Entlang Γ bekommen wir eine bijektive Abbildung zwischen A und A' , kritische Punkte der f_A und kritische Punkte der $f_{A'}$, C und C' (0 ist auf 0 abgebildet), $\{\delta^{q_i} \mid i = 0, 1, 2, \dots, d\}$ und $\{\delta^{q'_i} \mid i = 0, 1, 2, \dots, d\}$ und ein Gruppen Isomorphismus α zwischen \check{C} und \check{C}' . Außerdem, gilt die parametrisierte Version von dem Faktum, das in der Anfang vom Abschnitt 2 war. Deshalb bekommen wir ein Isomorphismus β zwischen den Gruppen G und G' . Der isomorphismus β bildet das Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, und deshalb, I auf I' ab. Durch α und β , stimmt die Wirkung von \check{C} auf G mit der Wirkung von \check{C}' auf G' überein. Vor allem Satz* 1 und Satz 2 sind gültig für A genau dann wenn sie es für A' sind.

Hinweis auf Satz 1 Satz 2 im Fall der Abbildung 1 A: Seien $l_i = (d-i)x + iy - i(d-i) = 0, i = 0, 1, \dots, d$ (l_i ist die Gerade durch $(i, 0), (0, d-i)$). Man schreibt $d\delta_{l_i \cap l_{i+1}}$ als Summe von δ^{l_i} und $\delta^{l_{i+1}}$ und δ^k mit ganzzahlige Koeffizienten, wobei k durch die Vielecke zwischen (in dem Winkel kleiner als 90°) l_i und l_{i+1} läuft und man beweist, daß d ist die minimale Zahl mit dieser Eigenschaft.

Für Satz 2 wir gehen so: Das Produkt zwischen ein beliebiges Element $\delta \in I$ und $\delta_{l_0 \cap l_1}$ muss Null sein. Deshalb taucht δ^k in δ nicht auf, wobei k das einziges Vieleck mit einem Eck in i ist. Man geht weiter (das Produkt zwischen δ und $\delta_{l_0 \cap l_i}, i = 1, 2, \dots$) und beweist, daß $I \subset G^s$. Jetzt $\delta = \sum_{i \in I_1} m_i \delta_i \in I$ genau dann wenn $\sum_i \text{Eck von } k m_i = 0 \forall k \in I_2$. Man addiert $\pm m_{l_0 \cap l_1} \delta^{l_0}$ in δ und bekommt ein neues Element δ ohne $\delta_{l_0 \cap l_1}$. Jetzt $m := m_{l_0 \cap l_2} = -m_{l_1 \cap l_2} = 0$ und kann man δ mit $\pm m \delta^{l_1}$ addieren und bekommt ein neues Element δ von I_1 ohne $\delta_{l_0 \cap l_1}, \delta_{l_0 \cap l_2}$ und $\delta_{l_1 \cap l_2}$. Man geht weiter und bekommt das null Element von I_1 .

References

- [AC] A'Campo, N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. I. Math. Ann. 213 (1975), 1–32.
- [DN] Dimca, A.; Némethi, A. On the monodromy of complex polynomials. Duke Math. J. 108 (2001), no. 2, 199–209.
- [Gu1] Gusein-Zade, S. M. Dynkin diagrams of the singularities of functions of two variables. Funkcional. Anal. i Priložen. 8 (1974), no. 4, 23–30.
- [La] Lamotke, K. The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. Topology 20 (1981), no. 1, 15–51.

[**Mo2**] H. Movasati, Center conditions: Rigidity of logarithmic differential equations, Preprint math.AG/0205068, preprints of MPIM, To appear in Journal of differential equations.

[**Hi**] F. Hirzebruch, Max-Planck-Gesellschaft Berichte und Mitteilungen, Heft 5/87, Max-Planck-Institut Für Mathematik.