Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica 2007, Lista 3

H. Bursztyn & J. P. Zubelli

10 de Novembro de 2007

Parte I

Sistemas integráveis e invariantes integrais

Problema 1: Seja (M^{2n}, ω) uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$ um hamiltoniano. Sejam $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M)$ integrais primeiras do fluxo de H (i.e., $\{H, f_i\} = 0$). Defina a função $F = (f_1, \ldots, f_k) : M \to \mathbb{R}^k$ e seja $c \in \mathbb{R}^k$ um valor regular. Sabemos que $M_c := F^{-1}(c)$ é uma subvariedade invariante de codimensão k. Veremos agora que M_c possui uma forma de volume invariante natural.

a) Tome $\mathcal{U}$ uma vizinhança de M_c onde $df_1, \ldots, df_k$ são linearmente independentes em cada ponto. Mostre que a forma de volume de Liouville, $\Lambda_\omega = \omega^n/n!$, pode ser escrita em $\mathcal{U}$ como $\Lambda_\omega = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k \wedge \sigma$, para algum $\sigma \in \Omega^{n-k}(M)$. Com isso, definimos a forma de volume $\Lambda_c := \iota^*\sigma \in \Omega^{n-k}(M_c)$, onde $\iota : M_c \hookrightarrow M$ é a inclusão.

   Dica: Mostre que σ pode ser escolhido localmente (por exemplo completando $f_1, \ldots, f_k$ a um sistema de coordenadas locais), depois use partição da unidade.

b) Mostre que $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k \wedge \mathcal{L}_{X_H}\sigma = 0$, e use este fato para concluir que podemos escrever $\mathcal{L}_{X_H}\sigma = \sum_{i=1}^k df_i \wedge \rho_i$. Conclua que Λ_c é invariante pelo fluxo de H.

c) Use um argumento análogo ao do ítem b) para mostrar que Λ_c não depende da escolha de σ.

Obs: As formas de volume Λ_c são importantes em mecânica estatística e teoria ergódica.

Problema 2: Seja (M, ω) uma variedade simplética e seja $H \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ um Hamiltoniano dependente do tempo. O Hamiltoniano H define um campo $X_H : \mathbb{R} \times M \to TM$ também dependente do tempo (i.e., para cada t fixo, $X_H(t, \cdot)$ é o campo hamiltoniano definido pela função $H_t(x) = H(t,x),\ x \in M$). Considere a 2-forma $\omega_H \in \Omega^2(\mathbb{R}\times M)$, $\omega_H = \pi^*\omega + dH \wedge dt$, onde $\pi : \mathbb{R}\times M \to M$ é a projeção natural, e o campo de vetores $\widetilde{X}_H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times M)$, $\widetilde{X}_H = \partial/\partial t + X_H$ (chamado de *suspensão* do campo Hamiltoniano tempo-dependente X_H).

a) Mostre que $\widetilde{c}(t)$ é curva integral de $\widetilde{X}_H$ passando pelo ponto $(0, x)$ (em $t = 0$) se e somente se $\widetilde{c}(t) = (t, c(t))$, onde $c(t)$ é curva integral de X_H passando por $x \in M$ (i.e., $c'(t) = X_H(t, c(t)),\ c(0) = x$).

b) Mostre que o núcleo de ω_H tem dimensão 1 em cada ponto, e que $\widetilde{X}_H$ é o único campo de vetores satisfazendo $i_{\widetilde{X}_H}\omega_H = 0$ e $i_{\widetilde{X}_H} dt = 1$. (Note ainda que, se $\omega = d\alpha$, então $\omega_H = d\alpha_H$, onde $\alpha_H = \pi^*\alpha + Hdt$.)

c) Verifique que ω_H é invariante por $\widetilde{X}_H$ (i.e., $\mathcal{L}_{\widetilde{X}_H}\omega_H = 0$). Segue que, se $\omega = d\alpha$, então α_H é *relativamente invariante* (i.e., $d(\mathcal{L}_{\widetilde{X}_H}\alpha_H) = 0$). Use estas observações (e o teorema de Stokes) para deduzir os teoremas nas seções 44-C e 44-D do livro do Arnold (invariantes de Poincaré-Cartan).

Problema 3: *(ref: Arnold, seção 51-D, primeiro problema na página 290)* Considere um movimento quase-periódico no toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)\}$ com frequência $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\theta(t) = \theta_0 + \alpha t$. Suponha que o movimento admita r relações independentes entre as frequências (gerando o subgrupo de relações), $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^n$, $\langle k_i, \alpha \rangle = 0$. Mostre que a trajetória $\theta(t)$ é densa num subtoro de dimensão $(n-r)$ e que, neste subtoro $\mathbb{T}^{n-r}$, o movimento é quase-periódico com $n-r$ frequências independentes.

Se necessário, aqui vão dicas. Podemos assumir que $\theta_0 = 0$. O movimento $\theta(t)$ no recobrimento $\mathbb{R}^n$ (antes da projeção $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$) está restrito ao plano P ortogonal aos vetores $k_1, \ldots, k_r$. Mostre que existe uma base do plano P, $v_1, \ldots, v_r$, tal que $v_i \in \mathbb{Z}^n$. Para tal, voce pode, por exemplo, completar $k_1, \ldots, k_n$ a uma base de $\mathbb{R}^n$ com vetores da base canônica e aplicar o método de ortogonalização da base (sem normalizar os vetores). Com isso P se projeta por $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ num subtoro $\mathbb{T}^{n-r}$. Escreva a frequência na base v_i, $\alpha = \sum_i a_i v_i$. Mostre que $(a_1, \ldots, a_{n-r})$ não admite relações, caso contrário existiria uma relação de α independente de $k_1, \ldots, k_r$, o que não é possível.

Problema 4: Considere em $T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$, com coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2), o hamiltoniano

$$H(q,p) := \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{(q_1 - q_2)^2}.$$

(Tomamos $\mathbb{R}^4$ por simplicidade, o que segue pode ser adaptado para o $\mathbb{R}^{2n}$.) O sistema correspondente é

$$\dot{q}_j = p_j, \quad \dot{p}_j = 2(q_j - q_k)^{-3}, \ \ k \neq j, \ \ j = 1, 2. \tag{1}$$

O objetivo desse problema é construir integrais primeiras do sistema usando a teoria dos *pares de Lax* (esse sistema é integrável e chamado sistema de *Calogero-Moser*).

a) Considere as matrizes 2×2, $L(t)$ e $A(t)$, definidas por

$$L_{jj} = p_j, \ \ L_{kj} = i(q_k - q_j)^{-1}, \quad A_{jj} = -i(q_j - q_k)^{-2}, \ \ A_{jk} = i(q_j - q_k)^{-2}.$$

para $j = 1, 2$ e $k \neq j$ (aqui $i = \sqrt{-1}$). Mostre que o sistema (1) é equivalente a equação matricial:

$$L'(t) = [A(t), L(t)] = (AL - LA)(t). \tag{2}$$

b) Vamos considerar sistemas da forma (2) de forma mais geral. Sejam $L(t)$ e $A(t)$ famílias suáves de matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ tal que a equação (2) (*equação de Lax*) é satisfeita. Seja $U(t)$ a solução da equação

$$U'(t) = A(t)U(t), \quad U(0) = \mathrm{Id}.$$

(Pela teoria de eqs diferenciais, a solução existe, é única, e $U(t)$ é invertível - voce pode assumir isso.) Se $V = U^{-1}$, mostre que $V(t)$ satisfaz $V'(t) = -V(t)A(t)$.

c) Mostre que $(V(t)L(t)U(t))' = 0$, e conclua que a evolução de L é dada por $L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}$.

(*Portanto, os autovalores de L (ou suas combinações, como os coeficientes do polinômio característico) são n integrais primeiras do sistema. É também usual tomar os traços das potencias de L como quantidades conservadas. Achar uma representação de Lax é uma técnica importante para se mostrar a integrabilidade de sistemas – veja Apêndice 13 no Arnold para um exemplo em dimensão infinita (KdV)*)

Parte II

Grupos de Lie e simetrias

Problema 5: Considere o grupo de rotações $SO(3)$ (matrizes ortogonais com determinante 1). Vimos em sala que $\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$. Considere o isomorfismo de espaços vetoriais $\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ dado por

$$v = (v_1, v_2, v_3) \mapsto \hat{v} := \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que $\hat{v}(u) = v \times u$, e que $[\hat{u}, \hat{v}](w) = (\widehat{u \times v})(w)$ (ou seja, a identificação $v \mapsto \hat{v}$ é um isomorfismo de álgebras de Lie, onde em $\mathbb{R}^3$ temos $[u, v] := u \times v$).

b) Considere a ação adjunta de $SO(3)$ em $\mathfrak{so}(3)$, $\mathrm{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$ (multiplicação de matrizes). Mostre que $\mathrm{Ad}_g(\hat{v}) = \widehat{g(v)}$ (ou seja, com a identificação $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$, a ação adjunta em $\mathfrak{so}(3)$ se torna a ação canônica de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$).

Problema 6: (Sobre a topologia do grupo $SO(3)$) Lembre que o espaço projetivo $\mathbb{RP}^3$ é o espaço das retas no $\mathbb{R}^4$ passando pela origem ou, equivalentemente, S^3 com os pontos antipodais identificados (esse espaço tem uma estrutura diferenciável para a qual $S^3 \to \mathbb{RP}^3$ é uma submersão).

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ a bola unitária (fechada), e considere a aplicação $D \to \mathrm{SO}(3)$ que leva $u = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ na rotação de $\mathbb{R}^3$ ao redor do vetor u de um ângulo $\theta = \pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (e $(0, 0, 0)$ é levado na identidade). Mostre que esta aplicação induz um difeomorfismo entre $SO(3)$ e o espaço projetivo $\mathbb{RP}^3$. *Dica: Identifique D com o hemisfério superior da esfera S^3 via*

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z, \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}),$$

Consideraremos agora um outro grupo de Lie, topologicamente mais simples, mas com a mesma álgebra de Lie de $SO(3)$.

Problema 7: Considere o grupo de Lie $SU(n) = \{A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \mid AA^* = \mathrm{Id},\ \det(A) = 1\}$, onde $A^* = \bar{A}^T$.

a) Mostre que $\mathfrak{su}(n) = \{A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \mid A = -A^*,\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$, e conclua que a dimensão (real) de $SU(n)$ é $n^2 - 1$.

b) Mostre que a aplicação $\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2)$,

$$v \mapsto \tilde{v} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -iv_3 & -iv_1 - v_2 \\ -iv_1 + v_2 & iv_3 \end{pmatrix},$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie, i.e., $[\tilde{u}, \tilde{v}] = \widetilde{(u \times v)}$ (observe que basta verificar que os colchetes são preservados numa base). Conclua que $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$.

c) Mostre que todo elemento de $SU(2)$ pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix},$$

onde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, e que isto nos dá um difeomorfismo $SU(2) \cong S^3$.

Os espaços S^3 e $\mathbb{RP}^3$ não são homeomorfos (e.g., têm grupos fundamentais diferentes), portanto $SU(2) \ncong SO(3)$.

d) Considere o $\mathbb{R}^4$ com a estrutura dos quaternions $\mathbb{H}$: vetores (x_1, x_2, x_3, x_4) são escritos como $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, e podem ser multiplicados de acordo com a regra $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. O conjugado de $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ é $\bar{x} := x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$, e $\|x\|^2 := x\bar{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Mostre que S^3, visto como quaternions de norma 1, herda de $\mathbb{H}$ uma estrutura de grupo, fazendo da identificação em c) um isomorfismo de grupos.

Com esse exercício, vemos que existe uma aplicação natural 2:1 de $SU(2) \cong S^3$ para $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$. Cada elemento $g \in SO(3)$ possui duas pre-imagens $\pm g' \in SU(2)$, definindo a chamada "representação spin" de $SO(3)$, fundamental na mecânica quântica.

Problema 8: Considere a matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

onde I é a matriz identidade n por n. Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ é chamada *simplética* se $A^t J A = J$. Seja $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ o conjunto das transformações simpléticas.

a) Mostre que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ é um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$. Verifique também que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ não é compacto. *(Dica: para todo n, temos $\begin{pmatrix} I & nI \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$).*

b) Mostre que sua álgebra de Lie é $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n}) \mid A^t J + JA = 0\}$, e prove que sua dimensão é $2n^2 + n$.

c) Mostre que $\mathrm{Sp}(2)$ é o grupo de matrizes 2×2 reais com determinate 1, e que esse conjunto pode ser identificado com o interior de um toro sólido.

Problema 9: Considere o grupo $SO(3)$ agindo em $T^*\mathbb{R}^3$ pelo levantamento cotangente da ação usual de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Para $u \in \mathfrak{so}(3)$, calcule o gerador infinitesimal $u_{T^*\mathbb{R}^3} \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R}^3)$ correspondente.

b) Identifique $\mathfrak{so}(3)$ com $\mathbb{R}^3$ como no problema 5. Mostre que, com essa identificação, temos $u_{T^*\mathbb{R}^3}(q, p) = (u \times q, u \times p)$.

c) Identificando $\mathfrak{so}(3)^* \cong (\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3$ usando o produto interno usual, mostre que a aplicação momento para a ação de $SO(3)$ em $T^*\mathbb{R}^3$ é $\mu(q, p) = q \times p$. Conclua, usando o teorema de Noether, que se $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ é uma função $SO(3)$-invariante, então o fluxo do hamiltoniano $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ preserva o "momento angular" $q \times p$.