Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica 2007, Lista 2

H. Bursztyn & J. P. Zubelli

7 de Outubro de 2007

Parte I

(ref. Arnold, capítulos 4 e 6)

Problema 1: Generalize o Teorema de Noether para o caso de Lagrangianos dependentes no tempo e obtenha o princípio da conservação de energia como corolário quando o Lagrangiano independe do tempo.

Problema 2: Considere uma partícula no espaco Euclideano satisfazendo as leis de Newton e um sistema de referência em rotação. Obtenha e interprete as componentes associadas à força centrífuga e força de Coriolis.

Problema 3: Considere o elipsóide de inércia definido em um sistema de coordenadas solidário ao movimento de um corpo rígido com um ponto fixo e sem forcas externas quando observado de um referencial de laboratório. Demonstre o Teorema de Poinsot que diz que o elipsóide de inércia rola sem deslizar em um plano fixo perpendicular ao vetor de momento angular quando observado do referencial do laboratório.

Parte II

(ref. Arnold, capítulos 7 e 8): *cálculo de Cartan em variedades e álgebra linear simplética.*

Problema 4: Considere uma variedade M e os operadores $d : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet+1}(M)$, $i_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet-1}(M)$ e $\mathcal{L}_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ (onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de vetores). Prove as identidades

$$\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X, \quad \mathcal{L}_X = i_X d + d i_X, \quad i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X.$$

Ref.: Arnold (cap. 7), ou Abraham-Marsden, "Foundations of Mechanics" (cap. 2), ou Spivak, "Differential Geometry" vol. 1 (cap. 7), ou Warner, "Foundations of differentiable manifolds..." (cap.2), ou ...

Problema 5: Seja V um espaço vetorial real ($\dim(V) = 2n$), e $\Omega \in \wedge^2 V^*$ uma forma bilinear anti-simétrica.

a) Mostre que Ω é não-degenerada (i.e., simplética) se e somente se $\Omega^n \neq 0$.

b) Seja $W \subseteq V$ um subespaço e suponha que Ω é simplética. Mostre que $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W)^\Omega$ e $(W^\Omega)^\Omega = W$ (onde W^Ω é o ortogonal simplético de W).

c) Suponha que Ω é simplética, e seja $L \subset V$ um subespaço lagrangiano. Mostre que toda base de L se estende a uma base simplética de V.

Problema 6: Sejam (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) espaços vetoriais simpléticos e $T : V_1 \to V_2$ um isomorfismo linear. Denote por Γ_T o gráfico de T, i.e.,

$$\Gamma_T = \{(v, T(v)) \mid v \in V_1\} \subset V_1 \times V_2.$$

Mostre que $\mathrm{pr}_1^*\Omega_1 - \mathrm{pr}_2^*\Omega_2$ é não-degenerada em $V_1 \times V_2$, e que T é um simplectomorfismo se e somente se Γ_T é subespaço lagrangiano em $(V_1 \times V_2, \mathrm{pr}_1^*\Omega_1 - \mathrm{pr}_2^*\Omega_2)$.

Problema 7: Seja (V, Ω) espaço vetorial simplético e $W \subseteq V$ subespaço qualquer.

a) Observe que o núcleo de $\Omega|_W$ (restrição de Ω a W) é $W \cap W^\Omega$ e mostre que

$$V_W := \frac{W}{W \cap W^\Omega}$$

herda uma estrutura simplética natural Ω_W unicamente caracterizada pela condição $\pi^*\Omega_W = \Omega|_W$ (onde $\pi : W \to W/(W \cap W^\Omega)$ é a projeção no quociente).

(*O espaço* (V_W, Ω_W) *é chamado espaço reduzido.*)

b) Assuma que W é *coisotrópico*, seja $L \subset V$ lagrangiano. Mostre que a imagem de $L \cap W$ via $\pi : W \to V_W$ é lagrangiano no espaço reduzido.

Parte III

Geometria do fibrado cotangente e eletromagnetismo

Problema 8: Considere o fibrado cotangente T^*Q, seja $\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$ a 1-forma tautológica. Vimos em sala que todo difeomorfismo $\varphi : Q \to Q$ define um simplectomorfismo $\widehat{\varphi} = (d\varphi^{-1})^* : T^*Q \to T^*Q$. Outros simplectomorfismos de T^*Q podem ser obtidos da seguinte maneira: Para $A \in \Omega^1(Q)$, considere o mapa $\varphi_A : T^*Q \to T^*Q$, $(x, \xi) \mapsto (x, \xi + A_x)$. Mostre que

$$\varphi_A^*\alpha - \alpha = \pi^*A,$$

onde $\pi : T^*Q \to Q$ é a projeção natural. Conclua que φ_A é um simplectomorfismo de T^*Q se e somente se A é uma 1-forma *fechada*.

Problema 9: Seja $\omega = -d\alpha$ a forma simplética canônica de T^*Q. Mostre que, se $B \in \Omega^2(Q)$ é fechada, então

$$\omega_B := \omega - \pi^*B$$

é simplética em T^*Q. *(π^*B é chamado "termo magnético", veja o próximo problema).*

Prove também que, se $B, B' \in \Omega^2(Q)$ são fechadas e tais que $B - B' = dA$, então φ_A (definido no problema anterior) é um simplectomorfismo de (T^*Q, ω_B) para $(T^*Q, \omega_{B'})$.

Problema 10: Seja Q uma variedade riemanniana, e tome $A \in \Omega^1(Q)$. Considere o lagrangiano "eletro-magnético"

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + A_x(\dot{x}) - V(x).$$

a) Mostre que o Hamiltoniano correspondente é $H : T^*Q \to \mathbb{R}$, $H(x, \xi) = \frac{1}{2}\|\xi - A_x\|^2 + V(x)$.

b) Mostre que a solução do sistema Hamiltoniano definido por H coincide com a solução do sistema com hamiltoniano $H'(x, \xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)$ (independente de A!), mas com respeito a forma simplética $\omega - \pi^*dA$ (*dica: use os problemas 8 e 9*).

c) Considere $Q = \mathbb{R}^3$ munido de seu produto interno canônico $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $A = A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 \in \Omega^1(Q)$, considere o campo de vetores $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \in \mathfrak{X}(Q)$ (i.e., $\vec{A}$ é caracterizado por $A(v) = \langle \vec{A}, v \rangle$). Prove que as equações de Hamilton (ou Euler-Lagrange) neste caso são equivalentes a

$$\ddot{x} = \dot{x} \times \mathrm{rot}(\vec{A}) - \nabla V, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

que é a equação (a menos de constantes físicas) de movimento de uma partícula em $\mathbb{R}^3$ sob ação de um campo eletro-magnético ($\vec{B} = \mathrm{rot}(\vec{A})$ é o campo magnético, onde $\mathrm{rot}(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A}$ é o rotacional do campo $\vec{A}$).