Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica - 2007
H. Bursztyn & J.P.Zubelli

Lista de Exercícios # 1

22 de Agosto de 2007

1. Seja $((g_{ij}))$ uma métrica (pseudo)-Riemanniana em uma variedade diferenciável e $L(q,\dot{q}) = \sum_{i,j} g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$. Obtenha as equações de Euler-Lagrange para este Lagrangiano em termos dos chamados símbolos de Christoffel Γ^i_{kl}. Interprete estas equações.

2. Considere $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\Bbbk$. Seja $\{\cdot, \cdot\cdot\} : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ o colchete de Poisson canônico dado por

$$\{F,G\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) .$$

   Mostrar que:

   (a) $\{\cdot, \cdot\cdot\}$ é bilinear, anti-simétrica, e satisfaz a identidade de Jacobi

$$\{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} = 0$$

   (b) Mostrar que $f \mapsto \{f,h\}$ é uma derivação em M.

   (c) Mostrar que se definirmos $\mathbb{X}_h : f \mapsto \{f,h\}$ então $(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \{,\})$ é uma álgebra de Lie isomorfa a algebra de Lie dos campos vetoriais em $(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [,])$ onde $[,]$ é o comutador.

3. Considere $M = \{(p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}$ e defina a 2-forma diferencial:

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq^i$$

   Mostre que ω é forma simplética.

4. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo com $<,>$ produto interno e considere a 2-forma $\omega = \mathbb{I}m(<,>)$ (identificando $\mathcal{H}$ com seu espaço tangente). Mostre que $(\mathcal{H}, \mathbb{I}m(<,>)$ é variedade simplética.

5. Mostre que o espaço projetivo sobre $\mathcal{H}$ com $\mathbb{I}m(<,>)$ onde agora $<,>$ é a métrica de Fubini-Study é variedade simplética.

6. Mostrar que toda transformação de Galileu pode ser decomposta de forma única como produto de uma rotação, de uma translação e de um movimento uniforme. (Ex. par.2 cap 1 do Arnold) Concluir que todas os espaços de Galileu são isomorfos entre si.

7. Obter as equações do movimento do bi-pêndulo usando as leis de Newton e introduzindo as variáveis do angulo com relação à horizontal simplificar as equações do movimento. Obter as mesmas equações usando o formalismo Lagrangiano.

8. Mostrar que as soluções do problema da braquistócrona são dadas por ciclóides.

9. Liste suas três definições favoritas de derivadas de Lie de um campo de vetores em uma variedade, compare-as e interprete-as. Caso o conceito de "derivada do pescador"não esteja entra as suas definições, complemente-as e explique porque seria natural pensar na derivada de Lie como tal. Extenda definição de derivada de Lie para campos de formas diferenciais e campos de tensores.