Geometria algébrica II

Notas de aula

Reimundo Heluani

IMPA, Outono 2016

Capítulo 1

Definições básicas

1.1 Esquemas afins

Para um espaço topológico X temos o anel de funções contínuas $C(X)$. Para M uma variedade diferenciável temos o anel de funções suaves $C^\infty(M)$. Para V uma variedade algébrica temos $A(V)$ o anel de funções regulares em V. $C(X)$, $C^\infty(M)$ e $A(V)$ são todos anéis comutativos, e propriedades geométricas de X, M e V se refletem em propriedades algébricas dos anéis correspondentes. Nesta seção tentaremos construir um "*funtor inverso*" no sentido de tentar construir um "*espaço*" a partir do seu anel de funções.

1.1.1 seja R um anel comutativo e seja

$$X = \operatorname{Spec}(R) = \left\{ \mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ é um ideal primo} \right\}.$$

Para todo $x \in X$ seja $k(x)$ o corpo de frações do domínio integral $R/\mathfrak{p}$. Para cada $f \in R$ denotamos por $f(x) \in k(x)$ a imagem de f pela composição

$$R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{p} \to k(x).$$

Desta maneira temos definido, para cada anel comutativo R, um conjunto X, e para cada elemento $f \in R$ uma função em X, porém a valores em corpos variáveis (o corpo $k(x)$ depende de x).

1.1.2 Exemplo. *Seja k um corpo e $R = k[t]$ o anel de polinômios. Denotamos por $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(R)$. Para $x = tk[t] \in \mathbb{A}^1$ temos $k(x) \simeq k$. Como R é um domínio integral, $0 \subset R$ é primo, e por tanto $y = 0 \in \mathbb{A}^1$. Para este ponto y temos $k(y) \simeq k(t)$, o anel de frações de R, e $k(x) \not\simeq k(y)$.*

1.1.3 O passo seguinte em nossa construção é dar uma topologia para X. Para um conjunto $S \subset R$, seja $\sqrt{S}$ o radical do ideal gerado por S, e definimos

$$\begin{aligned} X \supset V(S) &= \{x \in X \mid f(x) = 0, \ \forall f \in S\}, \\ &= \left\{ \mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo e } \mathfrak{p} \supseteq S \right\}. \end{aligned}$$

1.1.4 Proposição. *A correspondência V satisfaz*

a) Se $\mathfrak{a} \subset R$ é o ideal gerado por S então $V(\mathfrak{a}) = V(S)$.

b) $S \supset T \Rightarrow V(S) \subset V(T)$.

c) Para toda família S_i *de* R *temos*

$$V\left(\cup_i S_i\right) = V\left(\sum_i S_i\right) = \cap_i V(S_i).$$

d) $V(0) = X, V(1) = \varnothing$.

e) $V(ST) = V(S) \cup V(T)$.

f) $V(S) = V\left(\sqrt{S}\right)$.

Demonstração. a) e f) seguem de b). b) c), d) são triviais. b) e $S, T \supset ST$ para dois ideais S, T implicam

$$V(ST) \supseteq V(S) \cup V(T).$$

Para a inclusão reversa, seja $x \in V(ST)$e suponha $x \notin V(S)$. Então existe $f \in S$ com $f(x) \neq 0$ e para todo $g \in T$ temos $(fg)(x) = f(x)g(x) = 0$. Ou seja $g(x) = 0\,\forall g \in T$, ou $x \in V(T)$. □

1.1.5 Definição. A topologia em X onde os conjuntos fechados são a família $V(S)$, $S \subset R$ é chamada de *topologia de Zariski.*

Notar que é de fato uma topologia pelas propriedades c), d) e e) na Proposição.

1.1.6 Para cada $Y \subset X$ definimos

$$I(Y) = \{f \in R \mid f(y) = 0 \forall y \in Y\} \subset R.$$

Para cada $x \in X$ denotamos por $\mathfrak{p}_x$ o ideal primo $x \subset R$. Temos que $I(Y)$ é a interseção de todos os ideais primos $\mathfrak{p}_y$ tais que $y \in Y$. Está claro que $I(Y) \subset R$ é um ideal radical e

$$V(I(Y)) = \overline{Y} \subseteq X,$$

é o fecho na topologia de Zariski. De fato, $V(I(Y))$ é fechado e contém Y, por outro lado, se $Y \subset V(S)$ temos que $f(y) = 0$ para todo $f \in S$, e todo $y \in Y$ então $S \subset \mathfrak{p}_y$ para todo $y \in Y$, Segue que $S \subseteq I(Y)$ e $V(S) \supseteq V(I(Y))$. Temos então o seguinte

1.1.7 Corolário. *As aplicações* $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \to V(\mathfrak{a})$ *e* $Y = \bar{Y} \to I(Y)$ *são inversas e geram uma correspondência bijectiva entre os conjuntos fechados de* X *e os ideais radicais de* R *revertendo a ordem parcial por inclusão.*

1.1.8 Corolário. *Seja* $x \in X$*, o conjunto* $\{x\}$ *é fechado em* X *se e somente se* $\mathfrak{p}_x$ *é maximal.*

1.1.9 Exemplo. *Seja* R *um domínio integral, de tal jeito que o ideal* 0 *é primo. Seja* $x \in X$ *o ponto correspondente. Temos que* $\overline{\{x\}} = X$*. Um ponto* $x \in X$ *com esta propriedade é dito* ponto genérico.

1.1.10 Definição. Um espaço topológico X é dito irredutível se não é a união de dois subespaços fechados próprios.

1.1.11 Proposição. *Seja* $\varnothing \neq S \subset X = \mathrm{Spec}(R)$ *um espaço fechado e irredutível, então* S *tem um único ponto genérico* η_S.

Demonstração. Exercício 1.1.4 □

1.1.12 Para cada $f \in R$ definimos $X_f := X \setminus V(f)$ e chamamos estes de *abertos distinguidos* de X. Os abertos distinguidos de X formam uma base da topologia de X, de fato: a) os abertos distinguidos são fechados por interseções finitas pois para uma família finita $\{f_i\}$ temos $\cap_i X_{f_i} = X_{\prod_i f_i}$. Por outro lado, todo aberto é da forma $U = X \setminus V(S)$. Utilizando que $V(S) = \cap_{f \in S} V(f)$ temos que $U = \cup_{f \in S} X_f$.

1.1.13 Proposição. *Para todo $f \in R$, X_f é quase-compacto.*

Demonstração. Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de X_f. Sem perda de generalidade podemos assumir que $U_i = X_{f_i}$ para algum $f_i \in R$ (pois X_f formam uma base da topologia). Seja $\mathfrak{a}$ o ideal gerado pelos $\{f_i\}_{i \in I}$. Como $V(f) \supset V(\mathfrak{a})$ (já que os U_i cobrem $X \setminus V(f)$) então temos que $\sqrt{f} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ e como $f \in \sqrt{f}$ temos que $\exists f^n \in \mathfrak{a}$, ou seja, f^n se escreve como combinação linear *finita* de alguns f_i. Seja J o conjuntos desses i tal que $f^n = \sum_{i \in J \subset I} \lambda_i f_i$ e seja $\mathfrak{a}'$ o ideal gerado pelos $\{f_j\}_{j \in J}$. Claramente temos $V(f) \supset V(\mathfrak{a}')$ e por tanto os U_j formam uma sub-cobertura finita de X_f. □

1.1.14 Corolário. $X = \operatorname{Spec}(R)$ *é quase-compacto.*

1.1.15 Observação. Notar que $X_f = X_g$ implica que $\sqrt{f} = \sqrt{g}$. Este é o caso por exemplo quando $f = ug$ com $u \in R^*$ uma unidade. Mais geralmente, segue-se da prova da Prop. 1.1.13 que se $X_f \subset X_g$ então $f^n = \lambda g$ para algum $\lambda \in R$ e $n \geq 1$ e logo temos um morfismo canônico de anéis $R_g \to R_f$. Por tanto se $X_f = X_g$ temos que $R_f \simeq R_g$ e podemos identificar ambas localizações.

1.1.16 Proposição. *Para todo ideal* $\mathfrak{a} \subset R$ *temos uma identificação canônica* $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{a}) \simeq V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec}(R)$ *de espaços topológicos.*

Demonstração. Como os ideais (resp. ideais primos) de $R/\mathfrak{a}$ se correspondem biunivocamente a ideais (resp. ideais primos) de R que contêm $\mathfrak{a}$, obtemos um mapa $f : \operatorname{Spec}(R/\mathfrak{a}) \to V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec}(R)$ e uma correspondência entre fechados de $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{a})$ e fechados de $\operatorname{Spec}(R)$ contidos em $V(\mathfrak{a})$, provando que f é um mergulho contínuo e, por tanto, um homeomorfismo na sua imagem. □

1.1.17 Para cada $f \in R$ definimos o anel $\mathcal{O}_X(X_f) := R_f$. Devido a 1.1.15 o anel $\mathcal{O}_X(X_f)$ só depende de X_f e não de $f \in R$. Mais ainda, para cada $X_f \subset X_g$ temos um morfismo canônico de anéis $\mathcal{O}_X(X_g) = R_g \to R_f = \mathcal{O}_X(X_f)$ e para $X_f \subset X_g \subset X_h$ temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X_h) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{O}_X(X_f) \\
& \mathcal{O}_X(X_g) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{1.1.17.1}$$

1.1.18 Gostaríamos de identificar $\mathcal{O}_X(X_f)$ como o *anel de funções regulares em* X_f. Devido a 1.1.17 para cada $X_f \subset X_g$ podemos *restringir* uma função regular em X_g para X_f, e para cada $X_f \subset X_g \subset X_h$ e k uma função regular em X_h, as restrições sucessivas de k para X_g e logo a X_f coincide com a restrição a X_f. Para podermos definir o *anel de funções regulares em um aberto qualquer* $U \subset X$ devemos primeiro provar o seguinte resultado:

Lema. *Seja* $\left\{X_{f_i}\right\}_{i \in I}$ *uma cobertura de* X_f.

a) Seja $h \in \mathcal{O}_X(X_f)$ *tal que as restrições para cada* $X_f \cap X_{f_i}$ *são zero, então* $h = 0$.

b) Sejam $h_i \in \mathcal{O}_X(X_{f_i})$ *tais que a restrição de* h_i *a* $X_{f_j} \cap X_{f_i}$ *coincide com a restrição de* h_j *a* $X_{f_j} \cap X_{f_i}$. *Então existe* $h \in \mathcal{O}_X(X_f)$ *tal que a restrição de* h *para cada* $X_{f_i} \cap X_f$ *coincide com a restrição de* h_i.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir $X_{f_i} \subset X_f$. Por 1.1.13 existe um conjunto finito $J \subset I$, $\lambda'_j \in R$ e $n' \geq 1$ tal que $f^{n'} = \sum_{j \in J} \lambda'_j f_j$. Elevando a uma potência arbitrariamente alta vemos que para todo $m \geq 1$ existe um $n \geq 1$ tal que

$$f^n = \sum_{j \in J} \lambda_j f_j^m, \qquad \lambda_j \in R. \tag{1.1.18.1}$$

a) Seja $af^{-k} \in R_f$ tal que $f_j^n \cdot a = 0$ para todo $j \in J$ (a hipótese em a)). Então $f^n a = \sum \lambda_j f_j^m \cdot a = 0$ e logo $af^{-k} = 0$ em R_f.

b) Devido a a) podemos assumir sem perda de generalidade que I é finito. Sejam $h_i = a_i f_i^{-n_i} \in R_{f_i}$ para todo $i \in I$. Por hipótese temos $h_i = h_j$ em $R_{f_i f_j}$, ou seja

$$(f_i f_j)^{m_{ij}} f_j^{n_j} a_i = \left(f_i f_j\right)^{m_{ij}} f_i^{n_i} a_j.$$

Seja m o máximo entre todos os $m_{ij} + n_i$ e sejam n e λ_i satisfazendo (1.1.18.1). Defina $a = \sum_i \lambda_i a_i f_i^{m-n_i}$. Agora temos que af^{-n} é igual a h_i em R_{f_i}. De fato

$$af_i^{n_i} = \sum_j \lambda_j a_j f_j^{m-n_j} f_i^{n_i} = \sum_j \lambda_j a_i f_j^m = a_i f^n$$

□

1.1.19 O Lema diz que as funções são definidas localmente, ou seja, para testar se duas funções são iguais, basta checar que coincidam em uma cobertura por abertos arbitrariamente pequenos. Mais ainda, o Lema diz que podemos colar funções definidas em pequenos abertos, sempre e quando as definições coincidam nas interseções. Isso nos levará ao conceito de *feixe* o qual discutiremos nas próximas aulas depois de explicar preliminares em categorias. Veremos que $\mathcal{O}_X$ *é um feixe de anéis comutativos* e que o par $(X, \mathcal{O}_X)$ será chamado de um *esquema afim.*

Exercícios

1.1.1. Mostre que os pontos fechados de $X = \operatorname{Spec}(R)$ correspondem com os ideais maximais de R.

1.1.2. Seja $f^\sharp : R \to S$ um morfismo de anéis. Mostre que ele induz uma aplicação continua $f : \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R)$ de espaços topológicos. Segue que a aplicação $R \to \operatorname{Spec}(R)$ é um funtor contravariante da categoria de anéis comutativos na categoria de espaços topológicos.

1.1.3. Se R é um anel Noetheriano, mostre que $X = \operatorname{Spec}(R)$ é um espaço Noeteriano (ou seja para toda família $X \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ de fechados de X, existe um n tal que $Y_m = Y_n$ para todo $m \geq n$). Mostre que a recíproca não é certa. Descreva um anel R tal que $Spec(R)$ não seja um espaço Noetheriano.

1.1.4. Prove a Proposição 1.1.11.

1.1.5. Descreva o espaço topológico $\operatorname{Spec} k[x]_{(x)}$.

1.1.6. Verifique que $(y - x^2) \in \mathbb{A}^2$ é um ponto genérico para $V(y - x^2)$.

1.1.7. Seja $\mathfrak{p} = (wz - xy, wy - x^2, xz - y^2) \subset k[w, x, y, z]$. Prove que $\operatorname{Spec} k[w, x, y, z]/\mathfrak{p} \subset \mathbb{A}^4$ é irredutível provando que $\mathfrak{p}$ é primo. [Uma forma é provar que o quociente é isomorfo ao sub-anel de $k[x, y]$ contendo só monomios com grau divisível por 3 e que este anel é um domínio]

1.1.8. Prove que as componentes irredutíveis de $\operatorname{Spec}(R)$ estão em correspondência 1−1 com os ideais primos minimais de R.

1.2 Preliminares em Categorias

Nesta seção coletamos alguns conceitos básicos de categorias como limites e colimites que têm como exemplos particulares os produtos, coprodutos, núcleos, conúcleos, etc. Mencionamos o lema de Yoneda e damos alguns exemplos destes conceitos.

1.2.1 Uma categoria C consiste de uma coleção de objetos $Ob(C)$ (que usualmente denotaremos simplesmente por C) e para cada par de objetos $X, Y \in C$ um conjunto de morfismos ou setas $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$. Para cada objeto $X \in C$ temos $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_C(X, X)$ Para cada três objetos $X, Y, Z \in C$ temos um mapa de conjuntos

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Hom}_C(Y,Z) & \times \mathrm{Hom}_C(X,Y) & \to \mathrm{Hom}_C(X,Z) \\ \quad\phi & \times \quad \psi & \mapsto \phi \circ \psi. \end{array}$$

Estes dados devem satisfazer os seguintes axiomas:

a) $\phi \circ \mathrm{Id}_X = \phi$ e $\mathrm{Id}_X \circ \psi = \psi$ para cada $\phi \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ e $\psi \in \mathrm{Hom}_C(Y, X)$.

b) A composição é associativa, ou seja o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_C(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_C(X,Y) \times \mathrm{Hom}_C(W,X) \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\circ"] \arrow[d, "\circ\times\mathrm{Id}"'] & \mathrm{Hom}_C(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_C(W,Y) \arrow[d, "\circ"] \\ \mathrm{Hom}_C(X,Z) \times \mathrm{Hom}_C(W,X) \arrow[r, "\circ"'] & \mathrm{Hom}_C(W,Z) \end{tikzcd}$$

comuta. Dada uma categoria C e um objeto $X \in C$ temos a noção de um *isomorfismo* de X em Y, ou seja, um morfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ tal que existe um $\psi \in \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ com a propriedade $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$ e $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_X$. O conjunto de automorfismos de X denotado $\mathrm{Aut}(X)$ é naturalmente um grupo (Exer. 1.2.2)

1.2.2 Exemplo. *O exemplo prototípico de categoria é a categoria* **Set** *de conjuntos. Os morfismos são as funções entre conjuntos.*

1.2.3 Exemplo. *Talvez a categoria mais simples é a categoria $\emptyset$ sem objetos.*

1.2.4 Exemplo. *Seja k um corpo. Definimos por* $\mathbf{Vect}_k$ *a categoria onde os objetos são k-espaços vetoriais de dimensão finita e com morfismos as transformações lineares. Dado um espaço vectorial $V \in \mathbf{Vect}_k$, o grupo de automorfismos de V é denotado por $GL(V)$.*

1.2.5 Exemplo. **Top** *é a categoria com espaços topológicos como objetos e funções contínuas como morfismos. Os isomorfismos são também chamados de* homeomorfismos.

1.2.6 Exemplo. *Estruturas algébricas geralmente formam categorias, assim temos categorias* **Ab** *de grupos abelianos e morfismos de grupos,* **Ring** *de anéis e morfismos de anéis, etc.*

1.2.7 Exemplo. *Uma categoria onde todo morfismo é um isomorfismo é chamada de* grupoide. *Um grupoide com só um objeto é o mesmo que um grupo. Similarmente, uma categoria com só um objeto é um* monoide.

1.2.8 Exemplo. *Dada uma categoria C definimos outra categoria C° com os mesmos objetos e com morfismos* $\mathrm{Hom}_{C^\circ}(X, Y) := \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ *e com as composições obvias. Essa categoria é a categoria* oposta *a C.*

1.2.9 Exemplo. *Um conjunto parcialmente ordenado P produz uma categoria onde os objetos são os elementos de P e dado dois objetos $x, y \in P$ temos um único morfismo*[1] $x \to y$ *quando* $x \geq y$ *e nenhum morfismo no caso contrario. Alguns destes casos são fáceis de desenhar. Por exemplo,*

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.2.9.1}$$

é um diagrama com três objetos. Omitimos as identidades e somente desenhamos as setas entre objetos diferentes. Um outro diagrama é

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.2.9.2}$$

onde omitimos as identidades e as composições desde a esquina superior esquerda para a inferior direita. Note, porém, que ambas composições devem coincidir pois em nossa categoria dado dois objetos temos no máximo um morfismo entre eles. Outros diagramas são (notar que composições são omitidas)

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd} \tag{1.2.9.3}$$

$$\ldots \to \bullet \to \bullet \to \bullet \tag{1.2.9.4}$$

1.2.10 Exemplo. *Um caso particular do exemplo anterior é quando X é um espaço topológico e P é o conjunto de todos os abertos de X. Dizemos que $V \geq U$ se $V \subseteq U$.*

1.2.11 Muitas vezes os morfismos em uma categoria tem mais estruturas além daquelas por serem simplesmente conjuntos. Por exemplo, os morfismos de anéis formam um grupo Abeliano, e os morfismos de espaços vetoriais são espaços vetoriais. Neste caso, dizemos que uma categoria é *enriquecida* sobre outra. Deixamos a definição formal para mais adiante, mas notemos então que **Ring** é enriquecida sobre **Ab** e $\mathbf{Vect}_k$ é enriquecida sobre $\mathbf{Vect}_k$!

1.2.12 Dada duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, um funtor $F \to \mathcal{D}$ é uma atribuição que para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ produz $F(X) \in \mathcal{D}$ e para cada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ produz $F(\phi) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$. Este mapa deve satisfazer $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ e ser compatível com as composições,ou seja, $F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$.

1.2.13 Exemplo. *Para toda categoria $\mathcal{C}$ temos o funtor identidade* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ *que para cada objeto X tem* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ *e é a identidade em morfismos.*

1.2.14 Exemplo. *Uma atribuição tal que dado um grupo abeliano A* esquece *a estrutura de grupo é um funtor* $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$. *Já vimos que o mapa* $R \mapsto \mathrm{Spec}(R)$ *é um funtor* $\mathbf{Ring}^\circ \to \mathbf{Top}$.

1.2.15 Exemplo. *Temos o funtor* $\mathbf{Top}^\circ \to \mathbf{Ring}$ *que para cada espaço topológico X dá o anel $C(X)$ de funções contínuas em X, e para cada $f : X \to Y$ contínua produz o morfismo $f^\sharp : C(Y) \to C(X)$ dado por composição $g \mapsto g \circ f$.*

[1] Desenhamos uma zeta para denotar o único elemento de $\mathrm{Hom}(x, y) = \{*\}$ neste caso.

1.2.16 Exemplo. *Dada uma categoria $\mathcal{C}$, para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ temos um funtor $h_X : \mathcal{C}^\circ \to$ **Set** dado por $Y \mapsto h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ e para cada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ definimos*

$$h_X(\phi) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

como a composição $\psi \mapsto \psi \circ \phi$.

1.2.17 Exemplo. *Um exemplo algébrico de limite na categoria de anéis comutativos, de um diagrama como em* (1.2.9.4). *Consideremos o diagrama*

$$\ldots \to \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

*O limite deste diagrama na categoria de anéis comutativos é denotado por $\mathbb{Z}_p$ e é chamado do anel dos inteiros p-*ádicos.

1.2.18 Dados dois funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Uma transformação natural $\alpha : F \to G$ é um mapa, tal que para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ temos um morfismo $\alpha_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ que satisfaz a seguinte propriedade: para cada morfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\phi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

comuta e além disso é compatível com composições. Em muitas situações de interesse[2] a coleção de funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ forma uma categoria $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ com transformações naturais entre funtores como morfismos. Dado três funtores $F, G, H \in \mathbf{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ e duas transformações naturais $\alpha : F \to G$, $\beta : G \to H$. A composição é definida por $(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X$.

1.2.19 Um isomorfismo na categoria **Funct** é dito um *isomorfismo de categorias*[3]. Porém muitas vezes encontramos a situação que existe um par de funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ respectivamente nas categorias $\mathbf{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ e $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Nesta situação é dito que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ *são equivalentes* e F e G *são equivalências de categorias*. Notar a diferencia entre equivalência é isomorfismo de categorias, neste último caso requeremos $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (igual em lugar de isomorfos).

1.2.20 Definição. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito *fiel* (resp. *completo, e completamente fiel*) se o mapa $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é injetivo (resp. sobrejetivo, bijetivo) para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$.

1.2.21 Lema (Lema de Yoneda). *Seja $X \in \mathcal{C}$ e $F : \mathcal{C}^\circ \to$ **Set** um funtor. Então existe uma bijeção natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})}(h_X, F) \simeq F(X),$$

onde o conjunto da esquerda é o conjunto de transformações naturais. Esta bijeção é funtorial em X, ou seja para cada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ temos que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(h_Y, F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & F(Y) \arrow[d, "F(\phi)"] \\ \mathrm{Hom}(h_X, F) \arrow[r, "\sim"] & F(X) \end{tikzcd}$$

[2] Neste curso não entraremos em detalhes de teoria de conjuntos, os interessados são referidos á bibliografia, por exemplo SGA IV.

[3] Mesmo se **Funct** não está definida como categoria, um isomorfismo entre dois funtores é uma transformação natural que admite inversas.

e é compatível com composições.

Demonstração. Exercício 1.2.6. ☐

1.2.22 Corolário. *Seja C uma categoria e considere $Funct(C^\circ, \mathbf{Set})$ a categoria de functores $C^\circ \to \mathbf{Set}$ com transformações naturais como morfismos. Seja $h : C \to Funct(C^\circ, \mathbf{Set})$ o functor $X \mapsto h_X$. Então h é um functor completamente fiel, ou seja podemos pensar em C como uma subcategoria* plena *de $Funct(C^\circ, \mathbf{Set})$. Similarmente, podemos trocar functores contravariantes por covariantes considerando $\tilde{h}_Y = \mathrm{Hom}(Y, \cdot)$.*

Demonstração. Que h é um functor é simplesmente seguir a definição de transformação natural, note porém que h é um functor *covariante*!. Considere o lema de Yoneda 1.2.21 com o funtor F sendo da forma h_Y com $Y \in C$. Neste caso temos

$$Hom_{Funct(C^\circ, \mathbf{Set})}\left(h_X, h_Y\right) = h_Y(X) = \mathrm{Hom}_C(X, Y).$$

☐

1.2.23 Definição. Seja C uma categoria e $F : C^\circ \to \mathbf{Set}$ (resp. $G : C^\circ \to \mathbf{Set}$). F (resp. G) é dito *representável* (resp. *corepresentável*) se existe um objeto $X \in C$ e um isomorfismo $\tilde{h}_X \simeq F$ (resp. $h_X \simeq G$). O corolário 1.2.22 diz que C é equivalente á categoria de functores representáveis em C.

1.2.24 Seja I uma categoria, e seja $F : I \to C$ um funtor. Dizemos que (Y, α_i) é um *cone* de F se $Y \in C$ e para todo $i \in I$ temos um morfismo $\alpha_i : Y \to F(i)$, para cada morfismo $\phi : i \to j$, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & F(i) \arrow[d, "F(\phi)"] \\ & F(j) \end{tikzcd} \tag{1.2.24.1}$$

comuta.

Quando existe um Y que é *universal* com essa propriedade, ou seja, se existe Y', α_i' com as mesmas propriedades, então existe um único morfismo $Y' \to Y$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[ddrr, bend left, "\alpha_i'"] \arrow[dddrr, bend right, "\alpha_j'"'] & & \\ & Y \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & \\ & & F(i) \arrow[d, "F(\phi)"] \\ & & F(j) \end{tikzcd} \tag{1.2.24.2}$$

comuta, então é dito que Y é o *limite* de F e é denotado por $\varprojlim_I F$. Neste caso Y é único salvo isomorfismo único.

1.2.25 Exemplo. *No caso que $I = \varnothing$ é a categoria sem objetos de 1.2.3, então o limite (de qualquer funtor a C) é chamado um* objeto final *de C.*

1.2.26 Exemplo. *Seja I a categoria com dois objetos e os únicos morfismos são as identidades. Um funtor $F : I \to C$ equivale a dar dois objetos $X_1, X_2 \in C$. O limite, se existir, s será denotado por $X_1 \times X_2$ e chamado de* produto. *De fato a propriedade universal diz agora que para cada objeto $Y \in C$ e dois mapas $\phi_i : Y \to X_i$, existe um único mapa $Y \to X_1 \times X_2$ usualmente denotado de $\phi_1 \times \phi_2$. Quando este limite existe para qualquer funtor (ou quaisquer dois objetos) é dito que C admite produtos finitos.*

1.2.27 Exemplo. *Para I a categoria do diagrama (1.2.9.1), um funtor F corresponde a dar três objetos e dois morfismos $\phi_i : X_i \to Y$, $i = 1, 2$. O limite (se existir) é chamado de* produto fibrado *e normalmente denotado por $X_1 \times_Y X_2$ onde os mapas ϕ_i são sobre-entendidos. Notar que neste caso, temos duas projeções $\pi_i : X_1 \times_Y X_2 \to X_i$ e ambas composições $X_1 \times_Y X_2 \to Y$ coincidem. Quando o limite existe para qualquer funtor é dito que C admite produtos fibrados finitos.*

1.2.28 Revertendo as setas obtemos a noção de *colimite*. Ou seja dado um funtor $F : I \to C$ o colimite denotado $\varinjlim_I F$ é um objeto de C e uma coleção de morfismos $\alpha_i : F(i) \to \varinjlim_I F$ fazendo comutar um diagrama análogo a (1.2.24.1) e com a propriedade universal análoga a (1.2.24.2).

1.2.29 Exemplo. *Para $I = \emptyset$ o colimite é chamado de* objeto inicial. *Para I a categoria com dois objetos e únicas setas as identidades o colimite é chamado de* coproduto. *No caso do diagrama (1.2.9.3) chamamos o colimite de* coproduto fibrado.

1.2.30 Exemplo. *Um exemplo importante de* coproduto fibrado *acontece na categoria de anéis comutativos. Sejam R, S e T anéis comutativos e considere dois morfismos de anéis $T \to S$ e $T \to R$. Então S e R são T-álgebras e em particular T-módulos. Considere o T-módulo $R \otimes_T S$ e a sua estrutura de anel dada por $r \otimes s \cdot r' \otimes s' := rr' \otimes ss'$. Claramente temos mapas $R \to R \otimes_T S$ e $S \to R \otimes_T S$ dados por $r \mapsto r \otimes 1$ e $s \mapsto 1 \otimes s$ (exercício: quando esses mapas são injetivos?). Obtemos um diagrama:*

$$\begin{tikzcd} R \otimes_T S & S \arrow[l] \\ R \arrow[u] & T \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

que satisfaz a propriedade universal do coproduto fibrado, ou seja $R \otimes_T S$ é o coproduto fibrado de $T \to R$ e $T \to S$ na categoria de anéis comutativos.

Exercícios

1.2.1. Prove que produtos fibrados existem na categoria de abertos num espaço topológico X 1.2.10.

1.2.2. Prove dada uma categoria C e um objeto $X \in C$ o conjunto $\mathrm{Aut}(X)$ é naturalmente um grupo.

1.2.3. Prove que produtos e coprodutos fibrados existem na categoria de conjuntos e espaços topológicos. Mostrar que os produtos e coprodutos não necessariamente são isomorfos.

1.2.4. Provar que na categoria $\mathbf{Vect}_k$ produtos e coprodutos existem e são naturalmente isomorfos.

1.2.5. Provar que objetos finais e iniciais existem nas categorias **Top**, **Set**, **Vect** e que as vezes estes são isomorfos e outras não.

1.2.6. Prove o Lema 1.2.21.

1.2.7. Seja $X \in C$. Prove que $\mathrm{Hom}(X, \cdot)$ comuta com limites, ou seja para cada categoria I e funtor F admitindo um limite $\varprojlim_I F$ então temos

$$\mathrm{Hom}(X, \varprojlim_I F) \simeq \varprojlim_I \mathrm{Hom}(X, F_i).$$

1.3 Feixes

1.3.1 Nesta seção que é puramente motivacional, queremos abstrair as propriedades das funções diferenciáveis numa variedade suave, ou das funções holomorfas numa variedade complexa, etc. Primeiramente notamos que para cada aberto $U \subset X$ temos o anel correspondente de funções $\mathcal{O}_X(U)$. Esta coleção de anéis satisfaz algumas propriedades com respeito a restrições e interseções como já vimos em (1.1.17.1) e 1.1.18. Uma outra propriedade destes anéis é que podemos falar em *germes de funções suaves ou holomorfas* perto de um ponto $x \in X$. Estes são pares (f, U) onde $x \in U \subset X$ é um aberto e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, módulo a relação de equivalência $(f, U) \sim (g, V)$ se existe um aberto $W \subset U \cap V$ e $f|_W = g|_W$. Claramente germes formam um anel chamado de $\mathcal{O}_x$, e para cada $x \in U$ obtemos um morfismo de anéis $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_x$. De fato, podemos ver que $\mathcal{O}_x$ é um colimite. Consideramos o conjunto de abertos de X contendo x com a relação de ordem dada por inclusões. Isto da lugar a uma categoria I como em 1.2.10. Temos um funtor de I° em anéis comutativos dado por $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$. O colimite deste funtor é o anel de germes de funções $\mathcal{O}_x$.

1.3.2 Notemos que $\mathcal{O}_x$ é um anel local, de fato seja $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ aqueles germes de funções que são zero em x. Este é um ideal e qualquer elemento que não esteja em $\mathcal{O}_x$ é invertível (Exer. 1.3.1) pelo que resulta que $\mathfrak{m}_x$ é maximal e o corpo $k_x = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ é canonicamente isomorfo a $\mathbb{R}$ no caso suave ou $\mathbb{C}$ no caso holomorfo e o isomorfismo está dado pelo valor do germe em x.

1.3.3 No caso de variedades suaves ou holomorfas, o quociente $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ é um módulo sobre $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x = k_x$ que naturalmente se identifica com o espaço cotangente a X em x.

1.3.4 Definição. Seja X um espaço topológico, C uma categoria e I a categoria 1.2.10. Um *pré-feixe* em X com valores em C é um funtor $F : I^\circ \to C$.

1.3.5 Normalmente trabalharemos com $C = \mathbf{Ab}$ ou $\mathbf{Set}$. Se omitimos C então entenderemos por pré-feixe um pré-feixe de conjuntos.

Simplesmente expandindo a definição de funtor e da categoria I vemos que a definição 1.3.4 é equivalente a seguinte. Um prefeixe (de conjuntos) é uma atribuição que

a) para cada aberto $U \subset X$ dá um conjunto $F(U)$.

b) para cada $V \subset U$ aberto temos um mapa de restrição $F(U) \to F(V)$, $f \mapsto f|_V$.

c) para cada $W \subset V \subset U$ e cada $f \in F(U)$ temos que $f|_W = (f|_V)|_W$.

1.3.6 prefeixes em X formam uma categoria $Funct(I_X^\circ, C)$, os morfismos são transformações naturais.

1.3.7 A categoria I tem uma subcategoria I_x de abertos contendo o ponto $x \in X$. Dado um prefeixe F temos por restrição um funtor $I_x^\circ \to C$. Definimos o talo F_x de F em x como o colimite $\varinjlim_{I_x^\circ} F \in C$ se existe.

1.3.8 No caso de prefeixes de conjuntos (onde colimites sempre existem) podemos dar uma definição explícita. F_x consiste de pares (f, U) onde $x \in U \subset X$ é um aberto e $f \in F(U)$, módulo a relação de equivalência $(f, U) \sim (g, V)$ se existe um $x \in W \subset V \cap U$ tal que $f|_W = g|_W$.

1.3.9 Observação. Notar que se F é um prefeixe em X com valores em C e colimites existem em C então por definição o talo F_x é um objeto de C. Assim se F é um prefeixe de anéis, F_x é um anel e a mesma coisa acontece para espaços vetoriais, etc. Porém, o conceito de *valor de uma seção em x* não faz sentido em geral. De fato, sequer podemos falar de um germe $f \in F_x$ em geral!

1.3.10 Seja $\mathfrak{B}$ uma base da topologia de X. Notar que $\mathfrak{B}$ é uma sub-categoria de I. Seja C uma categoria que admite limites arbitrários e $F' : \mathfrak{B}^\circ \to C$ um funtor. Então existe um prefeixe F em X tal que a restrição a $\mathfrak{B}$ coincide com F'. De fato definimos para cada $U \in I$

$$F(U) := \varprojlim_{\mathfrak{B} \ni V \subset U} F'(V) \quad \in C.$$

Os mapas de restrição são definidos como segue. Sejam $U \subset U'$ abertos de X. Para cada $\mathfrak{B} \ni V \subset U$ temos $V \subset U'$ e por tanto pela propriedade universal do limite um morfismo $F(U') \to F'(V)$. Para cada $V' \subset V \subset U$ com $V' \in \mathfrak{B}$ temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & F(U') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F'(V) \arrow[rr] & & F'(V') \end{tikzcd} .$$

Como $F(U)$ é um limite, pela propriedade universal existe um único morfismo $F(U') \to F(U)$. A compatibilidade com composição é evidente.

1.3.11 O prefeixe F associado a F' é universal no sentido que para todo outro prefeixe G com restrição F' em $\mathfrak{B}$, então existe um único morfismo $G \to F$. De fato o morfismo $G(U) \to F(U)$ existe para cada U pela propriedade universal do limite projetivo.

1.3.12 Seja A um conjunto, ele define uma categoria $\mathscr{A}$ diagramaticamente descrita por

$$\bullet \longrightarrow A \rightrightarrows A \times A.$$

e com objetos $\{*\} \cup A \cup A \times A$ e os morfismos óbvios, ou seja,

a) temos as identidades,

b) $*$ tem um único morfismo para todo outro objeto (e.g. $*$ é um objeto inicial da categoria $\mathscr{A}$).

c) O objeto $a \in A$ tem um único morfismo para $(a, b) \in A \times A$ e um único morfismo para (b, a)

1.3.13 Seja X um espaço topológico, $U \subset X$ um aberto, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura por abertos de U e F um prefeixe de conjuntos em X. F define um funtor $\mathscr{F} = \mathscr{F}_U : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ simplesmente por $\mathscr{F}(*) = F(U)$, $\mathscr{F}(\alpha) = F(U_\alpha)$ e $\mathscr{F}(\alpha, \beta) = F(U_\alpha \cap U_\beta)$. Em morfismos utilizamos as restrições. F é dito um *feixe* se para todo $U \subset X$ aberto e toda cobertura $\{U_\alpha\}$:

a) $F(U) \to \prod_{\alpha \in A} F(U_\alpha)$ é injetivo

b) $F(U) = \varprojlim_{\mathscr{A}} \mathscr{F}_U$.

1.3.14 Explicitamente, a) significa que dados $f_\alpha \in F(U_\alpha)$ para todo $\alpha \in A$ existe no máximo uma única $f \in F(U)$ com $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$. b) significa que se as seções f_α coincidem em interseções, então f existe, ou seja, se $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \in F(U_\alpha \cap U_\beta)$ então existe $f \in F(U)$ com $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$.

1.3.15 Notar que uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$de U é um funtor $\mathscr{A} \to I^\circ$ e simplesmente $\mathscr{F}_U$ e a composição com F.

1.3.16 Na definição em 1.3.13 podemos trocar **Set** por grupos Abelianos, anéis, espaços vetoriais etc.. simplesmente pedindo que cada $F(U)$ pertença á categoria correspondente, e as restrições $F(U) \to F(V)$ sejam morfismos de grupos Abelianos, anéis, etc. para cada $V \subset U$.

1.3.17 Notamos porem que a definição em 1.3.13 não permite falar em feixes a valores em qualquer categoria C. O problema é a) na definição pois numa categoria arbitrária podemos não ter produtos e/ou não ter a noção de *injetivo*! Para resolver esse problema, utilizamos o lema de Yoneda 1.2.21 ou seu corolário 1.2.22. Lembramos que o corolário de Yoneda nos permite pensar na categoria C dentro da categoria $Funct(C, \mathbf{Set})$, trocando o objeto $Y \in C$ pelo objeto $\tilde{h}_Y \in Funct(C, \mathbf{Set})$. Seja F um prefeixe em X a valores em C e $Y \in C$ um objeto de C. Então a composição $\tilde{h}_Y \circ F$ é um prefeixe em X a valores em conjuntos, e para cada morfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_C(Y, Y')$ obtemos um morfismo de prefeixes $\tilde{h}_{Y'} \circ F \to \tilde{h}_Y \circ F$. Concretamente, para cada Y em C temos o prefeixe de conjuntos

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_C(Y, F(U)). \tag{1.3.17.1}$$

Dizemos que F é um *feixe em X á valores em C* se para cada $Y \in C$ os prefeixes de conjuntos (1.3.17.1) são feixes.

1.3.18 Lema. *Seja X um espaço topológico, I a categoria de abertos 1.2.10 e $\mathfrak{B}$ a subcategoria dada por uma base da topologia. Seja C uma categoria com limites (por exemplo* **Set***). Seja $F' : \mathfrak{B}^\circ \to C$ um funtor e F o prefeixe definido em 1.3.10. Então F é um feixe se e somente se para toda cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $U \in \mathfrak{B}$ por abertos $U_\alpha \in \mathfrak{B}$ contidos em U e todo objeto $Y \in C$ temos*

a) O mapa natural $\mathrm{Hom}_C(Y, F(U)) \to \prod \mathrm{Hom}_C(Y, F(U_\alpha))$ é injetivo.

b) A imagem de $\mathrm{Hom}_C(Y, F(U))$ pelo mapa em a) consiste em famílias de morfismos $\phi_\alpha \in \mathrm{Hom}_C(Y, F(U_\alpha))$ tais que as restrições de ϕ_α e ϕ_β á $\mathrm{Hom}_C(Y, F(V))$ coincidem para todo $\mathfrak{B} \ni V \subset U_\alpha \cap U_\beta$.

Demonstração. Claramente a condição é necessária. Vamos a provar que é suficiente. Sem perda de generalidade por Yoneda podemos supor que F toma valores em conjuntos.

Suponha que $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ é uma base da topologia de X contida em $\mathfrak{B}$. Em particular gera uma subcategoria de $\mathfrak{B}$. Seja F'' o prefeixe em X associado á restrição de F' para $\mathfrak{B}'$. Pela observação temos um morfismo único $F \to F''$ pois a restrição de F para $\mathfrak{B}'$ coincide com a de F''. Em particular para cada $U \subset X$ aberto temos um morfismo canônico $F(U) \to F''(U)$. Este morfismo é um isomorfismo se $U \in \mathfrak{B}$. De fato, para cada $\mathfrak{B}' \ni V \subset U \in \mathfrak{B}$ temos que o morfismo canônico $F''(U) \to F'(V)$ se factoriza em $F''(U) \to F'(U) \to F'(V)$ pois a condição b) traduz em que $F'(U)$ é o limite projetivo dos $F'(V)$ com $U \supset V \in \mathfrak{B}'$, dando em particular um morfismo $F''(U) \to F(U)$. É fácil ver que as composições destes morfismos são identidades e pelo tanto $F(U) \simeq F''(U)$ para todo $U \in \mathfrak{B}$. Mas agora segue que $F \simeq F''$ pela propriedade universal do limite projetivo pois as restrições $F''(U) \to F''(V) \simeq F(V)$ para todo $U \subset X$ aberto e $V \in \mathfrak{B}$ definem o morfismo $F'' \to F$ inverso.

Para provar que é suficiente seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de U por abertos contidos em U e seja $\mathfrak{B}'$ a subfamilia de $\mathfrak{B}$ definida por abertos que estão contidos em pelo menos um U_α. Claramente $\mathfrak{B}'$ é uma base da topologia de X e pela observação em 1.3.11 $F(U)$ (resp. $F(U_\alpha)$) está definido como o limite projetivo de abertos de $\mathfrak{B}'$ contidos em U (resp. U_α). A definição em 1.3.17 é satisfeita em virtude das propriedades universais do limite projetivo e o exercício 1.2.7. □

1.3.19 Corolário. *Seja R um anel comutativo e $X = \mathrm{Spec}(R)$ o espectro primo como definido em 1.1. Para cada $f \in R$ temos $X_f \subset X$ aberto e o conjunto desses abertos forma uma base $\mathfrak{B}$ da topologia de X. Definimos o functor $\mathcal{O}_X : \mathfrak{B}^\circ \to$* **Commu** *a valores em anéis comutativos por $X_f \to \mathcal{O}_X(X_f) = R_f$ como em 1.1.12. Abusando notação temos um prefeixe $\mathcal{O}_X$ definido em X a valores em anéis comutativos. O Lema prova que $\mathcal{O}_X$ é um feixe.*

Exercícios

1.3.1 (Este exercício é opcional). Seja X uma variedade suave (ou complexa) e $\mathcal{O}_x$ o anel de germes de funções suaves (ou holomorfas) perto de $x \in X$. Prove que todo germe $f \notin \mathfrak{m}_x$ é invertível.

1.3.2. Provar que a relação de equivalência em 1.3.8 é de fato uma relação de equivalência e que o talo F_x assim definido é o colimite $\varinjlim_{I_x} F$ como em 1.3.7.

1.3.3. Seja $\phi : \mathscr{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes ou feixes em X (a valores em conjuntos ou grupos abelianos)

a) Prove que para cada $x \in X$ temos um morfismo induzido $\phi_x : \mathscr{F}_x \to \mathcal{G}_x$.

b) Prove que ϕ é um isomorfismo se e somente se ϕ_x é um isomorfismo para todo $x \in X$.

1.3.4. Sejam $\mathscr{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes de grupos abelianos em X e definimos

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{F}, \mathcal{G})(U) := \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

Prove que $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{F}, \mathcal{G})$ é um feixe de grupos abelianos. (Nota: o feixe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{F}, \mathcal{G})$ está bem definido como feixe de conjuntos quando $\mathscr{F}$ é um prefeixe e $\mathcal{G}$ é um feixe de conjuntos, e como feixe de grupos abelianos se $\mathcal{G}$ é um feixe de grupos abelianos, é dizer, a estrutura de grupo de $\mathcal{G}$ é a única importante).

1.3.5. Seja $\mathscr{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes de grupos abelianos. Prove que o núcleo é um feixe (e não só um prefeixe).

1.3.6. Seja $X = \mathbb{C}$ com a topologia usual, $\underline{\mathbb{Z}}_X$ o feixe localmente constante com grupo $\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_X$ o feixe de funções holomorfas em X e $\mathscr{F}$ o prefeixe de funções que admitem um logaritmo holomorfo.

a) Prove que $\mathscr{F}$ não é um feixe.

b) Prove que a sequencia de prefeixes

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}}_X \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{f \mapsto e^{2\pi i f}} \mathscr{F} \to 0,$$

é exata, onde o primeiro mapa é a inclusão natural.

1.3.7. De um exemplo de um morfismo sobrejetor de feixes $\mathscr{F} \to \mathcal{G}$ e um aberto $U \subset X$ tal que o morfismo induzido $\mathscr{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ não é sobrejetor.

1.3.8. Seja $f : Y \to X$ um mapa contínuo de espaços topológicos. Para cada $U \subset X$ definimos $F(U)$ como o conjunto de seções contínuas $s : U \to Y$ tal que $f \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Prove que F assim definido é um feixe. Note (mas não escreva) que se as fibras de f tem estrutura extra, o feixe F recebe extra estrutura, por exemplo se as fibras de Y são grupos, o feixe F é um feixe em grupos. Fibrados vetoriais são outros exemplos deste tipo.

1.4 Operações com feixes. Esquemas

Nesta seção definimos algumas operações com feixes e a noção de *espaços anelados* e *esquemas*.

1.4.1 A pergunta de Clarissa Uma categoria é dita concretizável se admite um functor fiel para a categoria de conjuntos **Set**. Neste caso, podemos pensar nos objetos da categoria como conjuntos com extra estrutura. Similarmente os morfismos entre os objetos são mapas entre estes conjuntos satisfazendo axiomas extras. Existem, porém, categorias que não são concretizáveis. Um exemplo devido a Freyd é a categoria **hTop** que tem como objetos espaços topológicos e como morfismos classes de homotopias entre espaços topológicos. Notar que a atribuição **hTop** → **Set** que a cada espaço X atribui o conjunto de pontos de X não dá lugar a um functor fiel. A prova de Freyd não é simples, mas a ideia principal é que numa categoria concretizável, dado um objeto $X \in \mathcal{C}$ a quantidade de *subobjetos* está limitada pela quantidade de subconjuntos de X. Para construir uma categoria que não seja concretizável, basta então construir categorias com objetos X admitindo *muitos* subobjetos (mais do que subconjuntos de X). O teorema de Freyd está dizendo que o tipo de homotopia de um espaço topológico é muito complicado para ser codificado por um conjunto com estrutura.

Exemplos essencialmente equivalentes ao de Freyd são obtidos em álgebra homologica. Por exemplo a categoria homotópica de complexos de grupos abelianos. A categoria de complexos consiste de sequencias de grupos abelianos

$$\dots A^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} A^i \xrightarrow{d_i} A^{i+1} \xrightarrow{\dots}, \qquad d_i \circ d_{i-1} = 0,$$

com morfismos dados por sequencias $f^i : A^i \to B^i$ fazendo o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & A^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_i"'] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d"] & B^i \arrow[r, "d"] & B^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

comutar. A categoria homotópica consiste em identificar dois morfismos $(f^i) \sim (g^i)$ se existem morfismos $\alpha^i : A^{i+1} \to B^i$:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] \arrow[dl] & A^i \arrow[r, "d"] \arrow[d] \arrow[dl, "\alpha_{i-1}"'] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "\alpha_i"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d"] & B^i \arrow[r, "d"] & B^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Tais que $\alpha_i \circ d_i^A + d_{i-1}^B \circ \alpha_{i-1} = f_i - g_i$ para todo i.

1.4.2 A pergunta de Valdir Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer com objeto final $*$, $C \in \mathcal{C}$ um objeto arbitrário e seja X um espaço topológico. A atribuição que a cada aberto não vazio $U \subset X$ da $F(U) = C$ e $F(\varnothing) = *$ e para cada $\varnothing \neq V \subset U$ tem como restrição $F(U) \to F(V)$ a identidade de C e $F(U) \to F(\varnothing) = *$ o único morfimo, é um feixe. De fato seja $D \in \mathcal{C}$ um objeto arbitrário, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de U (podemos assumir $\varnothing \neq U_\alpha$), claramente

$$\mathrm{Hom}(D, C) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(D, C),$$

é injetivo e a imagem satisfaz b) em 1.3.13. Se $\mathcal{C}$ não é concretizável, então as seções de F não podem ser vistas como funções de U em algum espaço Y pois este último é um conjunto.

Notar porém que para cada $D \in \mathcal{C}$ temos o feixe de conjuntos $U \mapsto \mathrm{Hom}(D, F(U))$ e as seções deste podem sim ser vistas como funções em U!.

1.4.3 Definição. Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dois funtores entre duas categorias. F é dito *adjunto a esquerda de* G denotado por $F \dashv G$ se para todo $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$ temos isomorfismos funtoriais:

$$\alpha_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY).$$

Funtorialidade se refere a que para cada morfismo $Y \to Y'$ e $X \to X'$ obtemos diagramas comutativos que deixamos para o leitor achar.

1.4.4 Sejam $F \dashv G$ dois funtores adjuntos como em 1.4.3. Considerando os casos $Y = FX$ e $X = GY$ obtemos imediatamente morfismos funtoriais para todo $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$:

$$X \to GFX, \qquad FGY \to Y.$$

Funtorialidade quer dizer que temos tranformações naturais

$$h : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF, \qquad g : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}. \tag{1.4.4.1}$$

Notar em particular que uma equivalência de categorias precisa de dois functores adjuntos! (ver exercício 1.4.2).

1.4.5 Proposição. *Seja X um espaço topológico e seja $sh_X = sh_X$ a categoria de feixes de conjuntos em X (morfismos são morfismos de prefeixes). Temos um funtor obvio*

$$sh_X \to Funct(I_X^\circ, \mathbf{Set}),$$

que para cada feixe F retorna o prefeixe F. Esse functor admite um adjunto a esquerda $F \to F^+$. F^+ é dito o feixe associado *ao prefeixe F.*

Demonstração. Seja F um prefeixe e $U \subset X$ um aberto. Definimos $F^+(U)$ como um subconjunto de $(s_x) \in \prod_{x \in X} F_x$ tais que para cada $x \in U$ existe um aberto $x \in V \subset U$ e um elemento $t \in F(V)$ tal que para todo $y \in V$ o germe $t_y \in F_y$ coincide com s_y. As propriedades citadas são obvias. □

1.4.6 No caso que o prefeixe F seja um prefeixe em grupos abelianos, anéis, espaços vetoriais, etc. O feixe associado F^+ toma valores na mesma categoria. Porém, em categorias generais a situação é mais sutil.

1.4.7 Restrição Seja X um espaço topológico e F um feixe a valores numa categoria $\mathcal{C}$. Seja $Y \subset X$ um aberto de X, consideramos ele como espaço topológico com a topologia induzida. Para cada aberto $U \subset Y \subset X$ definimos $F|_Y(U) = F(U)$. Claramente $F|_Y$ é um feixe em Y chamado a *restrição de F á Y*.

1.4.8 Imagem direta Seja $f : X \to Y$ um mapa contínuo de espaços topológicos. f induz um funtor $f^{-1} : I_Y \to I_X$. Seja F um prefeixe em X a valores numa categoria $\mathcal{C}$. A composição $f_* : f^{-1} \circ F$ é um prefeixe em Y. Concretamente, para cada $U \subset Y$, temos $f_*(U) = F(f^{-1}(U))$. Se F é um feixe em X segue automáticamente que $f_*(F)$ é um feixe em Y. De fato Seja $U \subset Y$ aberto e (U_α) uma cobertura de U, então $(f^{-1}U_\alpha)$ é uma cobertura de $f^{-1}U$. Sem perda de generalidade podemos assumir que F é um feixe de conjuntos. O morfismo

$$(f_*F)(U) = F(f^{-1}U) \to \prod_\alpha F(f^{-1}U_\alpha) = \prod_\alpha (f_*F)(U_\alpha),$$

é claramente injetivo e a imagem consiste em aquelas famílias $(s_\alpha) \in F(f^{-1}(U_\alpha))$ tal que as restrições $s_\alpha|_{f^{-1}U_\alpha} = s_\beta|_{f^{-1}U_\beta}$. Dito de outra forma: $s_\alpha \in (f_*F)(U_\alpha)$ e a restrição de s_α e s_β a $U_\alpha \cap U_\beta$ coincidem (notando que $f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) = f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$).

Sejam F, G dois prefeixes (resp. feixes) em X e $\phi : F \to G$ um morfismo (e.g. uma transformação natural). A composição $\phi_{(f^{-1})}$ é um morfismo $f_*\phi : f_*F \to f_*G$, essa atribuição é compatível com composição e pelo tanto obtemos funtores

$$f_* : sh_X^{\mathcal{C}} \to sh_Y^{\mathcal{C}}, \qquad f_* : Funct(I_X^\circ, \mathcal{C}) \to Funct(I_Y^\circ, \mathcal{C}).$$

1.4.9 Suponha agora que $\mathcal{C}$ admite colimites, então os talos F_x e $(f_*F)_{f(x)}$ estão bem definidos como objetos de $\mathcal{C}$ em 1.3.7. Para cada $f(x) \in U \subset Y$ temos um morfismo dado $F(f^{-1}(U)) \to F_x$ pois $x \in f^{-1}U$ e F_x é um colimite. A propriedade universal dos colimites produz um único morfismo $(f_*)_x : (f_*F)_{f(x)} \to F_x$. Este morfismo é funtorial (deixamos a definição para o leitor).

1.4.10 Imagem inversa Seja $f : X \to Y$ um mapa contínuo de espaços topológicos. Temos o functor f_* de prefeixes (resp. feixes) de conjuntos em X em prefeixes (resp. feixes) em Y. O funtor f_* admite um adjunto a esquerda f^{-1}. Seja F um prefeixe em Y, definimos o prefeixe $f^{-1}F$ em X por

$$(f^{-1}F)(U) = \varinjlim_{f(U)\subset V\in I_Y} F(V).$$

No caso de feixes, abusamos[4] a notação e definimos $f^{-1}F$ como o feixe associado ao prefeixe $f^{-1}F$. Provemos que f^{-1} assim definido é um adjunto a esquerda para f_*. Seja então G um prefeixe em X e F um prefeixe em Y e seja $\phi \in \mathrm{Hom}(F, f_*G)$. Para todo $V \subset Y$ aberto temos o morfismo $F(V) \to (f_*G)(V) = G(f^{-1}V)$. Notemos que para um aberto $U \subset X$ tal que $f(U) \subset V$, temos um mapa canônico por restrição $G(f^{-1}V) \to G(U)$. Compondo com o mapa anterior obtemos para cada $Y \supset V \supset f(U)$ um mapa $F(V) \to G(U)$.

Gerar um mapa desde um colimite é simples: precisamos um mapa desde cada um dos objetos em nosso diagrama. Este diagrama está indexado por $F(V)$ com $Y \supset V \supset f(U)$ para algum aberto $U \subset X$. Por definição de colimite então obtemos um morfismo $(f^{-1}F)(U) \to G(U)$. Colectando obtivemos um mapa

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}F, G) \leftarrow \mathrm{Hom}(F, G).$$

Deixamos para os exercícios ver que este mapa é bijetivo (Exer 1.4.3)

1.4.11 Categorias aditivas

Lema. *Seja uma categoria $\mathcal{C}$ com um objeto inicial e final (chamado de $0 \in \mathcal{C}$) e com produtos e coprodutos naturalmente isomorfos (chamamos de $X \oplus Y$). Então para cada $X, Y \in \mathcal{C}$, o conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}(X, Y)$ é naturalmente um monoide comutativo.*

Demonstração. Temos a identidade $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$. Pela propriedade universal do produto e do coproduto obtemos mapas

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X, \qquad X \amalg X \xrightarrow{+} X.$$

Sejam $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Consideremos $\pi_i : X \times X \to X$, $i = 1, 2$ as duas projeções dadas pela propriedade univesal do produto. A composições $f \circ \pi_1$ e $g \circ \pi_2$ são dois mapas $X \times X \to Y$. Pela propriedade universal do produto temos um mapa correpospondente $(f, g) : X \times X \to Y \times Y$. Definimos a soma $f + g$ pela composição

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f,g} Y \times Y \simeq Y \amalg Y \xrightarrow{+} Y.$$

A operação é evidentemente comutativa. Associatividade segue de considerar a composição e o isomorfismo natural $(X \oplus X) \oplus X \simeq X \oplus (X \oplus X)$.

Notar que existe um elemento marcado $0 \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ dado pela única composição

$$X \to 0 \to Y.$$

Esse 0 é a unidade do nosso monoide comutativo. ∎

[4] Jamais utilizaremos o adjunto na categoria de prefeixes e sim em feixes, então em geral este abuso de notação não deve causar problemas sendo que $f^{-1}F$ denotará sempre a imagem inversa na categoria de feixes.

1.4.12 Definição. Uma categoria é dita uma categoria *aditiva* se satisfaz as condições do Lema 1.4.11 e em adição existem inversos em $\mathrm{Hom}(X, Y)$ para cada $X, Y \in C$, ie. os monoides comutativos $\mathrm{Hom}(X, Y)$ são grupos abelianos. Uma categoria aditiva enriquecida em $\mathbf{Vect}_k$ é dita uma *categoria k-linear.*

1.4.13 Exemplo. *A categoria $\mathbf{Top}_*$ de espaços topológicos ponteados*[5] *tem um objeto inicial e final, ou seja o espaço topológico que consiste de um ponto. Admite produtos e coprodutos, porém estes não são isomorfos (notar que o coproduto não é o coproduto em* **Top***!)*

1.4.14 Exemplo. *As categorias* **Ab**, **Commu** *(anéis comutativos com unidade),* $\mathbf{Vect}_k$ *são todas aditivas. A categoria $k - \mathbf{Alg}$ de k-álgebras associativas é uma categoria k-linear.*

1.4.15 Núcleos Seja C uma categoria com objeto final e inicial 0 e $f : X \to Y$ um morfismo. Considere a categoria I definida diagramaticamente por

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

Consideramos um diagrama sobre I em C da forma:

$$X \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \tag{1.4.15.1}$$

Definição. Se existir o limite do diagrama 1.4.15.1 é dito o *núcleo de f*. Se o limite existe para todo $X, Y \in C$ e todo morfismo, dizemos que C admite núcleos. Seja $K = Kerf$. Temos o morfismo canônico $K \to X$. Normalmente denotamos este morfismo como o *núcleo de f* abusando notação.

1.4.16 Conúcleos Dualmente, consideramos um diagrama da forma (1.4.15.1). Se o colimite existir ele é dito de *conúcleo de f*. Se ele existe para todo morfismo dizemos que C admite conúcleos.

1.4.17 Exemplo. *Na categoria $\mathbf{Top}_*$ dado um morfismo $f : (X, x) \to (Y, y)$ o núcleo consiste do subespaço topológico $(f^{-1}(y), x) \subset (X, x)$. O conúcleo é o quociente $Y/\sim$ onde identificamos $f(x) \sim y$ para todo $x \in X$. O ponto marcado em $Y/\sim$ é a imagem de y.*

1.4.18 Definição.

a) Seja C uma categoria que admite núcleos e conúcleos e $f : X \to Y$ um morfismo entre dois objetos. Definimos a *imagem de f* como o núcleo do conúcleo de f e a *coimagem de f* como o conúcleo do núcleo de f. Para todo f existe um morfismo canônico $coim(f) \to im(f)$ (Lembrar que é fácil construir mapas de colimites para limites!)

b) Uma categoria aditiva C é dita *Abeliana* se todo morfismo admite núcleos, conúcleos e o morfismo canônico $coim(f) \simeq im(f)$ é um isomorfismo.

1.4.19 Exemplo. *Todas as categorias* **Ab**, $\mathbf{Vect}_k$, **Commu** *são Abelianas. As categorias* **Ring** *e $k - \mathbf{Alg}$ são aditivas mas não abelianas. A categoria homotópica de complexos de grupos abelianos construída em 1.4.1 é aditiva mas não abeliana (por que não é Abeliana?). Existem categorias patológicas que satisfazem todas as condições excepto $coim(f) \simeq im(f)$. Não precisaremos nós preocupar com isso.*

1.4.20 Exemplo (Importante). *Seja X um espaço topológico e $sh_C(X)$ a categoria de feixes em X com valores numa categoria Abeliana como* **Ab** *ou* $\mathbf{Vect}_k$. *Então $sh_C(X)$ é uma categoria Abeliana. Provamos que núcleos existem no exercício 1.3.5. Seja $f : F \to G$ um morfismo de feixes. Então a atribuição*

$$U \mapsto Coker(f(U) : F(U) \to G(U)),$$

é um prefeixe. Definimos $Coker(f)$ como o feixe associado pela Prop. 1.4.5. Está claro que este feixe satisfaz a propriedade universal do conúcleo.

[5]Pares (X, x) de um espaço topológico X junto com um ponto $x \in X$, e morfismos $(X, x) \to (Y, y)$ são funções contínuas $f : X \to Y$ com $f(x) = y$

Espaços localmente anelados

Definição. Um *espaço localmente anelado* é um par $X, \mathcal{O}_X$ onde X é um espaço topológico, $\mathcal{O}_X$ é um feixe a valores em **Commu** e para cada $x \in X$ o talo $\mathcal{O}_x = (\mathcal{O}_X)_x$ é um anel local.

Sejam $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dois espaços localmente anelados. Um morfismo de espaços localmente anelados é um par $(f, f^\sharp)$ onde $f : X \to Y$ uma função contínua e $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ é um morfismo de feixes de anéis comutativos. Pedimos que para cada $x \in X$ o morfismo de anéis locais

$$f_x^* : (\mathcal{O}_Y)_{f(x)} \to (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_x, \tag{1.4.20.1}$$

onde a última seta foi definida em 1.4.9, seja local, é dizer, a preimagem de $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ é $\mathfrak{m}_{f(x)} \subset (\mathcal{O}_Y)_{f(x)}$

1.4.21 Proposição. *Seja $R \in$ **Commu** e seja $X = \operatorname{Spec}(R)$. Então $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço localmente anelado.*

Demonstração. O único que falta provar é que $\mathcal{O}_x$ é um anel local para todo $x \in X$. Para cada $x \in X$ temos o ideal primo $\mathfrak{p}_x \subset R$. $\mathcal{O}_x$ é canonicamente isomorfo á localização $R_\mathfrak{p}$. De fato, construimos um mapa $\mathcal{O}_x \to R_\mathfrak{p}$ como segue. Dado que $\mathcal{O}_x$ é um colimite dos $\mathcal{O}_X(U)$ com $x \in U$, basta construir um mapa $\mathcal{O}_X(U) \to R_\mathfrak{p}$ para cada $x \in U$ aberto.

$\mathcal{O}_X(U)$ é definido como o limite projetivo de aqueles abertos na base X_f da topologia contidos em U, pelo tanto para construir um mapa $\mathcal{O}_X(U) \to R_\mathfrak{p}$ basta construir um mapa $\mathcal{O}_X(X_f) = R_f \to R_\mathfrak{p}$ para cada $x \in X_f \subset U$. Como $x \in X_f$ temos $f \notin \mathfrak{p}$ e pelo tanto temos o morfismo canônico $R_f \to R_\mathfrak{p}$.

Obtemos então um morfismo $\mathcal{O}_x \to R_\mathfrak{p}$. Claramente este morfismo é sobrejetivo porque todo elemento de $R_\mathfrak{p}$ se escreve como $f^{-k}a$ com $a \in R$ e $f \notin \mathfrak{p}$. Para ver que é injetivo, suponha que temos dois seções $f^{-k}a$ e $g^{-l}b$ em X_f e X_g (podemos assumir sem perda de generalidade esta situação) com a mesma imagem em $R_\mathfrak{p}$. Então pela definição de localização isto significa que existe $h \notin \mathfrak{p}$ com $hg^l a = hf^k b$, ou seja $f^{-k}a$ e $g^{-l}b$ coincidem em $X_f \cap X_g \cap X_h$ para todo $h \notin \mathfrak{p}$. Mas este aberto contem x e pelo tanto as duas seções são iguais em $\mathcal{O}_x$. □

1.4.22 Definição. Um *esquema afin* é um espaço localmente anelado isomorfo a $(X = \operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_X)$ para algum anel $R \in$ **Commu**. Um *esquema* é um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que para cada $x \in X$, existe um aberto $x \in U \subset X$ e $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ é um esquema afin. Morfismos de esquemas são morfismos de espaços localmente anelados.

Exercícios

1.4.1. Suponha que X é um espaço topológico e $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de X. Suponha que temos feixes F_α em U_α e isomorfismos $\phi_{\alpha,\beta} : F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \simeq F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, tal que para cada interseção tripla $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ os isomorfismos coincidem, ou seja $\phi_{\gamma,\alpha} \circ \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\beta,\alpha}$ no domínio de definição, então existe um único feixe F em X tal que a restrição $F|_{U_\alpha}$ é isomorfa a F_α e os isomorfismos $\phi_{\alpha,\beta}$ são os óbvios.

1.4.2. Sejam duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e dois functores adjuntos $F \dashv G$. Considere as duas transformações naturais (1.4.4.1). Prove que a composição

$$G \xrightarrow{h_{G()}} (G \circ F) \circ G = G \circ (F \circ G) \xrightarrow{G(g)} G$$

é a identidade. Os interessados podem procurar a conversa, ou seja dois functores com transformações naturais com essa identidade são adjuntos.

1.4.3. Finalize a prova em 1.4.10 que f^{-1} é adjunto a esquerda de f_*.

1.4.4. Prove que a categoria de espaços localmente anelados tem produtos fibrados.

1.4.5. Prove que a atribuição $R \to (X = \operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_X)$ pode ser estendida a um funtor da categoria **Commu** á categoria de esquemas.

1.4.6. Seja X um esquema, $x \in X$ um ponto, $\mathcal{O}_x$ o talo de $\mathcal{O}_X$ em x e $\mathfrak{m}_x$ o ideal maximal. Definimos $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$. Seja K um corpo qualquer. Prove que especificar um morfismo de esquemas $\operatorname{Spec} K \to X$ é equivalente a escolher um ponto $x \in X$ e uma inclusão $k(x) \to K$.

1.5 Variedades e esquemas

Antes que nada mencionamos que Renan encontrou um erro na definição da extensão de um prefeixe de uma base da topologia para todo o espaço. A invariância desta construção quando passamos para uma sub-base precisa do axioma de feixes. Isto traz modificações na prova do Lema 1.3.18. Nesta seção damos vários exemplos de esquemas que não são afins. Provamos que variedades algébricas sobre os números complexos dão exemplos de esquemas, assim como construímos o esquema $\operatorname{Proj} R$ associado a um anel graduado R arbitrário.

1.5.1 Definição. Denotamos por **Sch** a categoria de esquemas. Seja $S \in$ **Sch** denotamos por $\mathbf{Sch}_S$ a categoria com objetos morfismos de esquemas $\pi_X : X \to S$ e por morfismos diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_X"'] & \arrow[d, phantom, "Y"] & Y \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

1.5.2 Seja X um espaço topológico, F um prefeixe e $U \subset X$ um aberto. Frequentemente denotaremos por $\Gamma(U, F) = F(U)$ as seções de F em U.

1.5.3 Theorem. *Seja $X \in$ **Sch** e $R \in$ **Commu**. Para cada $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \operatorname{Spec} R)$, tomando seções globais em $f^\sharp$ obtemos um morfismo de anéis:*

$$R \simeq \Gamma(\operatorname{Spec}(R), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) \xrightarrow{f^\sharp} \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Esta atribuição induz uma bijeção

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \operatorname{Spec}(R)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Commu}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)). \tag{1.5.3.1}$$

Demonstração. Primeiro provaremos que f, como mapa de conjuntos, está determinado pelo morfismo de anéis $A_f : R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. De fato seja $x \in X$, $f(x) \in \operatorname{Spec}(R)$ e seja $\mathfrak{p}_{f(x)} \subset R$ o ideal primo correspondente. Por definição temos $\mathfrak{p}_{f(x)} = \{a \in R | a(f(x)) = 0\}$. Mas segue da definição em (1.4.20.1) que $\mathfrak{p}_{f(x)} = \left\{a \in R | (f_x^*(a))(x) = 0\right\}$. Como $(X, A_f a)$ é um representante do germe $f_x^*(a)$, vemos que $\mathfrak{p}_{f(x)} = \left\{a \in R | (A_f a)(x) = 0\right\}$ e segue que $f(x)$ está determinado por A_f.

Em segundo lugar provaremos que o morfismo de anéis $f^\sharp(U) : \Gamma(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R)}) \to \Gamma(U, f_* \mathcal{O}_X)$ está determinado por A_f para todo $U \subset \operatorname{Spec}(R)$ aberto. Como $f^\sharp$ é um mapa de feixes, basta provar isto numa base da topologia de $Y = \operatorname{Spec} R$. Podemos assumir $U = Y_a$ para algum $a \in R$. Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "A_f"] \arrow[d, "res"'] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "res"] \\ \Gamma(Y_a, \mathcal{O}_Y) = R_a \arrow[r, "f^\sharp(U)"'] & \Gamma(f^{-1}Y_b, \mathcal{O}_X) \end{tikzcd}$$

onde as setas verticais são restrições nos respectivos feixes. Como todos os morfismos são morfismos de anéis e um morfismo de uma localização (como R_a) está determinado pelo morfismo do anel, $f^\sharp(U)$ está determinado por A_f. Temos então que o mapa (1.5.3.1) é injetivo. Para provar que é sobrejetivo, seja, $A : R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ um morfismo de anéis. Se $X = \operatorname{Spec} S$ é um esquema afim, então $A : R \to S$ induz um morfismo $\operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R)$ pelo exercício 1.4.5. Se X é um esquema arbitrário então admite uma cobertura $X = \cup X_\alpha$ por esquemas afins. O homomorfismo A induz morfismos

$$A_\alpha : R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X_\alpha, \mathcal{O}_{X_\alpha}),$$

onde a última seta é restrição. Sendo X_α afim, existe um morfismo $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ que induz A_α, ie. $A_\alpha = A_{f_\alpha}$. Os morfismos f_α e f_β coincidem na interseção $X_\alpha \cap X_\beta$ pois os homomorfismos de anéis coincidem:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(X_\alpha, \mathcal{O}_X) \arrow[dr] & \\ R \arrow[ur, "A_\alpha"] \arrow[dr, "A_\beta"'] & & \Gamma(X_\alpha \cap X_\beta, \mathcal{O}_X) \\ & \Gamma(X_\beta, \mathcal{O}_X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

e sabemos que o morfismo $X_\alpha \cap X_\beta \to Y$ está determinado pelo morfismo de anéis (notar porém que não sabemos se $X_\alpha \cap X_\beta$ é afim!). Então temos uma coleção de morfismos f_α que coincidem em interseções e pelo tanto determinam um morfismo $X \to Y$ (Exer 1.5.1) satisfazendo as condições. □

1.5.4 Corolário. *A categoria de esquemas afins é equivalente a* **Commu**°.

1.5.5 Corolário. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ *é um objeto final na categoria* **Sch**. *Em particular* **Sch** *é equivalente a* $\mathbf{Sch}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$.

1.5.6 Variedades como esquemas Nesta seção consideramos $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ o espaço de $n+1$ tuplas de números complexos (não todos zero) módulo a relação de equivalência $(a_0, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$. Seja $X(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ uma variedade complexa, ie. o conjunto de zeros de um conjunto de polinômios homogêneos gerando um ideal primo. Para cada subvariedade irredutível $W(\mathbb{C}) \subset X(\mathbb{C})$ com dimensão maior que zero, consideramos um ponto η_W. Definimos o espaço topológico X como o conjunto $X(\mathbb{C}) \cup \{\dots, \eta_W, \dots\}$ com a seguinte topologia. Para cada aberto Zariski $U(\mathbb{C}) \subset X(\mathbb{C})$ fazemos $U = U(\mathbb{C}) \cup \{\eta_W | W(\mathbb{C}) \cap U(\mathbb{C}) \neq \varnothing\}$. A coleção de U assim definidos define uma topologia em X. Nesta topologia η_W é o ponto genérico de $W = W(\mathbb{C}) \cup \eta_W$.

Definimos $\mathcal{O}_X(U)$ como o conjunto de funções $f : U(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ tal que para cada $x \in U(\mathbb{C})$ existe uma vizinhança $x \in U_x \subset U$ e uma função racional a/b com a, b homogêneos do mesmo grau e $f(y_0, \dots, y_n) = a(y_0, \dots, y_n)/b(y_0, \dots, y_n)$ com $b(y_0, \dots, y_n) \neq 0$ para todo $y \in U_x$. Esta atribuição define claramente um feixe (um subfeixe do feixe de funções em $X(\mathbb{C})$).

1.5.7 Proposição. $(X, \mathcal{O}_X)$ *definido acima é um esquema sobre* $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

Demonstração. Na definição de X podemos trocar $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ por $\mathbb{C}^n$ e definir espaços anelados $(Y, \mathcal{O}_Y)$ começando com variedades algébricas afins $Y(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^n$. Como $X(\mathbb{C})$ está coberto por variedades algébricas afins $Y_i(\mathbb{C})$, basta provar que cada um dos $(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$ é um esquema afim. A variedade afim $Y(\mathbb{C})$ consiste dos zeros de alguns polinômios em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ gerando um ideal primo $\mathfrak{p}$. O nosso $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é canonicamente isomorfo a $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ como espaço anelado (e portanto como esquema afim). De fato, os ideais primos de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ estão em correspondência com ideais primos $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$. Estes correspondem a subvariedades de $Y(\mathbb{C})$. Então definimos a bijeção tal que para cada ideal maximal de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ atribui o ponto correspondente de $Y(\mathbb{C})$ e para todo ideal primo $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ não maximal atribui o ponto $\eta_{V(\mathfrak{q})}$. Esta bijeção é claramente um homeomorfismo.

Falta provar que esta bijeção identifica os feixes $\mathcal{O}_Y$ e $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_i]/\mathfrak{p}}$. □

Exercícios

1.5.1.

a) Sejam $(X, \mathcal{O}_X$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dois espaços localmente anelados e $(f, f^\sharp) : X \to Y$ um morfismo. Seja $U \subset X$ um aberto. Prove que f determina um morfismo $(U, \mathcal{O}_X|_U) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$.

b) Seja $\{X_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X e $(f_\alpha, f_\alpha^\sharp) : X_\alpha \to Y$ uma coleção de morfismos que coincidem em interseções. Prove que existe um único morfismo $f : X \to Y$ com $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$.

1.5.2. Seja X um esquema e $x \in X$ um ponto no espaço topológico X. Prove que existe um morfismo canônico $\iota_x : \operatorname{Spec} k(x) \to X$.

1.5.3. Considere o esquema $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1_R = Spec R[x]$, e considere os dois morfismos $f_\pm : U := Spec R[x, x^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ dados por $x \to x^{\pm 1}$. Considere $X_\pm$ como a colagem $\mathbb{A}^1_{f_+} \amalg_{f_\pm} \mathbb{A}^1$. Prove que $X_\pm$ são esquemas. Calcule $\Gamma(X_\pm, \mathcal{O}_{X_\pm})$.

1.5.4. Decida se $X_\pm$ no exercício anterior são ou não esquemas afins.

1.6 *Proj R*

1.7 $\mathcal{O}_X$-módulos

Exercícios

1.7.1. Seja $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ e $\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo homogêneo com $R_+ \not\supset \mathfrak{p}$. Seja $X(\mathbb{C}) \subset P^n(\mathbb{C})$ a subvariedade $V(\mathfrak{p})$, e seja X o esquema correspondente. Prove que temos o isomorfismo de esquemas $X \simeq Proj\, R/\mathfrak{p}$.

1.7.2. Seja X um esquema e considere o functor $\Gamma(X, \cdot) : \mathcal{O}_X - mod \to \mathbf{Ab}$. Prove que $\Gamma(X, \cdot)$ é exato a esquerda mas não necessariamente a direita.

1.7.3. Mais geralmente dado $f : X \to Y$ considere o functor $f_* : \mathcal{O}_X - mod \to \mathcal{O}_Y - mod$. Prove que f_* é exato a esquerda mas não necessariamente a direita, note que para encontrar o contraexemplo não precisa fazer nada novo!

1.7.4. Similarmente prove que f^* é exato a direita mas não (necessariamente) a esquerda.

1.7.5. Encontre 3 exemplos *essencialmente* diferentes de $\mathcal{O}_X$-módulos que não são localmente livres. A noção de *essencialmente diferente* depende do critério de cada um.

1.7.6. Seja $X = \operatorname{Spec} R$ um esquema afim. Prove que os functores Γ e˜are adjuntos no sentido que para todo R-modulo M e todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ temos

$$\operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F})) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\tilde{M}, \mathscr{F}).$$

1.8 Feixes (quase) coerentes

Exercícios

1.8.1. Seja A um *Discrete valuation ring* com corpo residual k de tal forma que $X := \operatorname{Spec} A$ consiste de um ponto genérico η e um ponto fechado x. Definimos um feixe $\mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_X$-módulos por $\mathscr{F}(X) = 0$ e $\mathscr{F}(\eta) = k$. Com as obvias restrições. Comprove que $\mathscr{F}$ está bem definido como feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos (não escreva esta parte por amor ao monitor) e prove que $\mathscr{F}$ não é quase-coerente.

1.8.2. Seja X um esquema Noetheriano e $\mathscr{F}$ um feixe coerente.

a) Se o talo $\mathscr{F}_x$ é livre como $\mathscr{O}_x$-módulo, então existe uma vizinhançaU de $x \in X$ tal que $\mathscr{F}|_U$ é livre como $\mathscr{O}_X|_U$-módulo.

b) $\mathscr{F}$ é localmente livre se e somente se todos os talos $\mathscr{F}_x$ são livres como $\mathscr{O}_x$-módulos para todos os pontos $x \in X$.

c) $\mathscr{F}$ é chamado *invertível* se existe um outro feixe coerente $\mathcal{G}$ tal que $\mathscr{F} \otimes \mathcal{G} \simeq \mathscr{O}_X$. Prove que $\mathscr{F}$ é invertível se e somente se é localmente livre de posto 1. [Este ítem já foi feito em aula]

1.8.3. Seja $f : X \to Y$ um morfismo de esquemas. Encontre um exemplo de $\mathscr{F}$ um feixe coerente em X tal que $f_*\mathscr{F}$ não é coerente em Y.

1.8.4. Seja X um esquema e $\mathscr{F}$ um feixe localmente livre de posto finito. Definimos $\mathscr{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$. Prove que

a) $(\mathscr{F}^\vee)^\vee \simeq \mathscr{F}$,

b) Para qualquer $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathcal{G}$ (não necessariamente localmente livre) temos $\mathcal{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathscr{F}^\vee \otimes \mathcal{G}$.

c) Para quaisquer dois módulos $\mathscr{H}$ e $\mathcal{G}$ temos

$$\mathcal{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{H}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathscr{O}_X}\left(\mathscr{H}, \mathcal{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathcal{G})\right).$$

1.9 Propriedades de finitude

1.9.1 Definição. Um esquema X é dito *localmente Noetheriano* se para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança afim $x \in \operatorname{Spec} R \subset X$ com R um anel Noetheriano. Equivalentemente, X possui uma cobertura Afim por espectros de anéis Noetherianos. X é dito *Noetheriano* se possui uma cobertura finita por afins Noetherianos.

1.9.2 Proposição. *Se X é localmente Noetheriano e* $\operatorname{Spec} R \subset X$ *é um aberto afim, então R é um anel Noetheriano.*

Demonstração. Temos uma cobertura $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ de X, logo Spec R está coberto por abertos principais nestes U_i's, ou seja, existem anéis Noeterianos R_j e $f_j \in R_j$ tal que $\operatorname{Spec} R = \cup \subset \operatorname{Spec}(R_j)_{f_j}$. Como R admite uma base da topologia por abertos principais isomorfos a $\operatorname{Spec} R_f$ com $f \in R$, e para cada f tal que $\operatorname{Spec} R_f \subset \operatorname{Spec}(R_j)_{f_j}$ obtemos

$$R_f = ((R_j)_{f_j})_f,$$

pelo que R_f é Noetheriano. Então Spec R pode ser coberto por uma família de $\operatorname{Spec} R_f$ com R_f Noetherianos e como é quase-compacto podemos assumir essa família finita. Segue que $R = \cap R_f$ é Noetheriano. □

1.9.3 Observação. Se X é localmente Noetheriano, então $\mathcal{O}_X$ é um feixe coerente, e todo sub $\mathcal{O}_X$-módulo quase-coerente de um $\mathcal{O}_X$-módulo coerente $\mathcal{F}$ é coerente. Similarmente, todo quociente quase-coerente de $\mathcal{F}$ é coerente. Segue que módulos de ideais $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ e os correspondentes anéis de funções $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ são coerentes.

1.9.4 Proposição. *Seja X um esquema, então X pode ser escrito de jeito único como*

$$X = \cup_{i\in I} X_i, \qquad X_i \not\subset X_j \quad i \neq j,$$

com X_i irredutíveis. Se X é localmente Noetheriano essa decomposição é localmente finita[6]*. Se X é Noetheriano a decomposição é finita.*

Demonstração. A descomposição geral existe para qualquer espaço topológico, é simplesmente notar que componentes irredutíveis são *maximais* com respeito á inclusão. Para Spec R um anel Noetheriano, as componentes irredutíveis se correspondem com os ideais primos minimais que contem o radical de zero. Como existe um número finito deles (caso contrario teríamos uma cadeia infinita de ideais) então segue que para X localmente Noetheriano a descomposição é localmente finita. Para X Noetheriano basta tomar uma cobertura finita por anéis Noetherianos. As componentes irredutíveis de X intersecadas com estes abertos são irredutíveis, de onde segue a finitude. □

1.9.5 Definição. Um esquema X é dito *reduzido* se para cada $x \in X$ o anel local $\mathcal{O}_x$ não tem nilpotentes não nulos. Equivalentemente, X admite uma cobertura afim $X = \cup U_i$ com $\mathcal{O}_X(U_i)$ sem nilpotentes não nulos.

1.9.6 Observação. É fácil ver que X é reduzido se e somente se para todo $U \subset X$ aberto afim, $\mathcal{O}_X(U)$ não tem nilpotentes não nulos.

1.9.7 Proposição. *Seja X um esquema reduzido e irredutível com ponto genérico η. Então o talo $\mathcal{O}_\eta =: R(X)$ é um corpo chamado de* corpo de funções de X.

a) Para todo aberto afim $U \subset X$ (resp. todo ponto $x \in X$) o anel $\mathcal{O}_X(U)$ (resp. $\mathcal{O}_x$) é um domínio integral com corpo de frações $R(X)$.

b) Para um aberto arbitrário $U \subset X$ temos

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x\in U} \mathcal{O}_x \subset R(X).$$

[6]Ou seja, cada ponto $x \in X$ pertence a um conjunto finito dos X_i.

Demonstração. Seja $\eta \in \operatorname{Spec} R$ uma vizinhança aberta do ponto genérico. Claramente η corresponde ao ideal zero e pelo tanto $\mathcal{O}_\eta$ é o corpo de frações do domínio R. De fato, η está contido em todos os ideais primos de R e pelo tanto coincide com o radical de zero. Mas como R não tem nilpotentes, temos que $\eta = 0$ é primo. Notamos também que $R(X)$ é o quociente não só de R mas de qualquer localização de R, segue-se a).

Para provar b) notamos que dada uma seção $0 \neq s \in \mathcal{O}_X(U)$ podemos restringir-lha para um aberto afim $V = \operatorname{Spec} R \subset U$ e $0 \neq t := s|_V \in R \subset R(X)$ (basta tomar uma vizinhança afim de um ponto no suporte de s). Vemos então que o mapa $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_\eta = R(X)$ é injetivo. Como o mapa fatora por $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_x \subset R(X)$ para cada $x \in U$ obtemos a inclusão $\mathcal{O}_X(U) \subset \cap \mathcal{O}_x$. Para a contrarecíproca, seja $s \in \cap_{x \in U} \mathcal{O}_x$, então temos uma cobertura U_i de U e $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ tal que $s_i \mapsto s \in R(X)$, como $s_i - s_j \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ é zero em $R(X)$ então é zero em $U_i \cap U_j$, e pelo tanto existe uma seção $s \in \mathcal{O}_X(U)$ com $s|_{U_i} = s_i$. □

1.9.8 Definição. Um morfismo de esquemas $f : X \to Y$ é dito *localmente de tipo finito* se para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança afim $x \in U \subset X$ e um aberto afim $f(U) \subset V \subset Y$ tal que o morfismo

$$\mathcal{O}_Y(V) \to (f_* \mathcal{O}_X)(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_X(U)$$

faze $\mathcal{O}_X(U)$ um $\mathcal{O}_Y(V)$ álgebra finitamente gerada. f é dito *localmente finitamente presentado* se o ideal de relações é finitamente gerado, ou seja

$$\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a},$$

com $\mathfrak{a}$ um ideal finitamente gerado.

f é dito *quase-compacto* se existe uma cobertura afim V_i de Y tal que cada $f^{-1}(V_i)$ admite uma cobertura afim finita. f é dito *de tipo finito* (resp. *finitamente presentado*) se é localmente de tipo finito (resp. localmente finitamente presentado) e quase-compacto.

De maneira similar a 1.9.2 podemos provar que se f é localmente de tipo finito (resp. localmente finitamente presentado) então para cada $f(U) \subset V$ temos que $\mathcal{O}_X(U)$ é uma $\mathcal{O}_Y(V)$-álgebra finitamente gerada (resp. finitamente presentada). Similarmente, se f é quase-compacto, então para cada quase compacto aberto $V \subset Y$, $f^{-1}(V)$ é quase-compacto.

Exercícios

1.9.1. Verifique que um esquema Noetheriano é um espaço Noetheriano no sentido que os abertos de X satisfazem a condição de cadeias ascendentes. Vale a conversa? ou seja, se X é um esquema que é Noetheriano como espaço topológico, será que X é Noetheriano com a definição 1.9.1?.

1.9.2. Seja A uma k-álgebra (k um corpo) e $X = \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(k)$ o esquema correspondente sobre $\operatorname{Spec} k$. Seja $x \in X$ um ponto geométrico a valores em k, ou seja um morfismo $x : \operatorname{Spec} k \to X$ (notar o abuso de notação). Seja o caso particular $A = k[t^i, i \in \mathbb{Q}_{>0}]$ e x o ponto dado pelo ideal maximal gerado por todos os t^i, $i \in \mathbb{Q}_{>0}$. Prove que o morfismo x, mesmo sendo um ponto fechado no espaço afim X não é localmente de presentação finita.

Este é um exemplo de um mapa que é formalmente suave mas nào é suave.

1.9.3. Um morfismo de esquemas $f : X \to Y$ é dito *afim* se existe uma cobertura $Y = \cup V_i$ por abertos afins tal que $f^{-1}(V_i)$ é afim para todo i.

a) Prove que a condição é local em Y, ou seja se f é um morfimo afim, para todo aberto afim $V \subset Y$ temos $f^{-1}(V)$ é afim.

b) Prove que todo morfismo afim é quase-compacto e separado.

1.9.4. Seja Y um esquema e $\mathscr{A}$ um feixe de $\mathscr{O}_Y$-algebras que é quase-corente como $\mathscr{O}_Y$-módulo. Prove que existe um único esquema X e um morfismo $f : X \to Y$ tal que para cada $V \subset Y$ aberto afim, $f^{-1}(V) \simeq \operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)$ e para cada inclusão $U \subset V$ o morfismo $f^{-1}(U) \to f^{-1}(V)$ corresponde á restrição $\mathscr{A}(V) \to \mathscr{A}(U)$. O esquema X é chamado de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$.

1.9.5. Prove que $f : X = \operatorname{Spec} \mathscr{A} \to Y$ do problema anterior é um morfismo afim e $f_* \mathscr{O}_X \simeq \mathscr{A}$. Recíprocamente, se $f : X \to Y$ é um morfismo afim e $f_* \mathscr{O}_X =: \mathscr{A}$ é uma $\mathscr{O}_Y$-álgebra quase-coerente, então $X \simeq \operatorname{Spec} \mathscr{A}$.

1.10 Critério de separabilidade

Exercícios

1.10.1. Seja $X \to S$ separado com S um esquema afim. Sejam U, V abertos afins em X. Prove que $U \cap V$ é afim. Encontre um contraexemplo com X não separado.

1.10.2. Prove que imersões são separadas.

1.11 Critério de propriedade

Exercícios

1.11.1. Prove que um morfismo finito é proprio.

1.11.2. Prove que um morfismo proprio entre esquemas afins é finito.

1.11.3. Seja $f : X \to Y$ um morfismo entre esquemas separados e de tipo finito sobre S que é um esquema Noetheriano. Seja $Z \subset X$ um subesquema fechado que é próprio sobre S. Prove que $f(Z) \subset Y$ é fechado e próprio sobre S com a estrutura de subesquema definida em aula.