Lista 3

Entregar Sex. 27 de fevereiro

1 Exercício. Seja G um grupo cíclico com n elementos. Descreva o conjunto de representações irredutíveis de G módulo isomorfismos.

2 Exercício. Para todo grupo finito G seja $ch(G)$ o anel comutativo gerado pelos caracteres irredutíveis de G. Seja f uma função de classe de G a valores complexos. Prove que f é o caracter de uma representação irredutível de G se e somente se

a) $f|_H \in ch(H)$ para todo subgrupo p-elementar $H \subset G$.

b) $(f, f) = 1$.

c) $f(1) > 0$.

3 Exercício. Seja f uma função de classe de G. Seja R um anel comutativo e $ch_R(G)$ a R álgebra gerada pelos caracteres irredutíveis de G. Prove que $f \in ch_R(G)$ se e somente se $(f|_H, \lambda) \in R$ para todo p-elementar $H \subset G$ e todo caracter *linear* λ de H (Lembre que em aula provamos esse mesmo exercício sem assumir que λ é linear).

4 Exercício. Seja $H \subset G$ um subgrupo e $V \in H - mod$. Prove que

$$\left(Ind_H^G V\right)^* \simeq Ind_H^G V^*$$

como G-módulos.

5 Exercício. Seja V uma representação de dimensão 1 de H e $\chi = \chi_V$ seu carater. Prove que a representação $W = Ind_H^G V$ é irredutível se e somente se

$$\forall a \notin H \ \exists b \in aHa^{-1} \cap H \mid \chi(b) \neq \chi(aba^{-1}).$$

6 Exercício. Seja $\mathbb{F}_p$ o corpo com p elementos (p primo) e seja G o grupo de matrizes 2×2 com entradas em $\mathbb{F}_p$ triangulares superiores e com determinante 1. Encontre todas as representações irredutíveis de G. (Note que esse grupo é o subgrupo de Borel do grupo $SL_2(\mathbb{F}_p)$)

7 Exercício. Seja G um grupo finito e χ um caracter de G. χ é dito *monomial* se é induzido de uma representação de dimensão 1 de algum subgrupo p-elementar. Suponha que χ é irredutível e combinação linear de caracteres monomiais. Prove que existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $m\chi$ é monomial.

8 Exercício. Voltando ao grupo $G = S_4$. G admite uma representação complexa irredutível de dimensão 2. Prove que é uma representação monomial.

9 Exercício (*). Seja $G = PSL_2(\mathbb{F}_7)$ o grupo de matrizes $2x2$ com entradas em $\mathbb{F}_7$ módulo o subgrupo central $\pm Id$. Seja H o grupo $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

a) Prove que $G \simeq H$

b) Encontre todas as representações irredutíveis de G.

[Hint. Keywords Klein, Elkies]