Lista 2

Entregar Sex. 23 de janeiro

1 Exercício. Seja V a representação estândar de dimensão 4 de A_5. Quais são as componentes irredutíveis de $V \otimes V$? Será que $V \wedge V$ é irredutível?

2 Exercício.

a) Seja G um grupo finito e S um G-torsor. Seja V a representação de permutações associada. Calcule o carácter de V. V é irredutível?

b) Seja G um grupo finito e S um conjunto com uma ação de G. Seja V a representação correspondente e χ o carácter de V. Defina uma ação de G em $S \times S$ por $a \cdot (s,t) = (a \cdot s, a \cdot t)$, seja W a representação correspondente e ψ o carácter. Prove que $W \simeq V \otimes V$ e que $\psi = \chi^2$.

3 Exercício. Seja G um grupo (não necessariamente finito) e S, T G-torsores. Um *morfismo de torsores* é uma função $\phi : S \to T$ tal que para todo $g \in G$ temos $g \cdot \phi = \phi \cdot g$, o conjunto de morfismos é denotado $\mathrm{Hom}_G(S,T)$

a) Prove que todo $\phi \in \mathrm{Hom}_G(S,T)$ é um isomorfismo.

b) Deduza de a) que $\mathrm{Hom}_G(S,S)$ é um grupo (que denotamos por $\mathrm{Aut}(S)$). Prove que $\mathrm{Aut}(S)$ é isomorfo a G.

4 Exercício. Seja $\varphi : G \to H$ um morfismo sobrejetor de grupos finitos e seja $\psi : H \to GL(V)$ uma representação irredutível. Defina a representação $\psi^* V$ como a composição $\psi \circ \varphi$. Prove que $\psi^* V$ é irredutível.

5 Exercício. Seja G um grupo finito e V, W duas representações irredutíveis. Considere a suma direta $Z = V \oplus W$. Z tem quatro espaços invariantes, a saber: 0, V, W e Z. Prove que $V \simeq W$ (isomorfismo de representações) se e somente se existe um outro espaço invariante.

6 Exercício. Seja $G = D_{2n}$ o grupo diedral de ordem $2n$. D_{2n} é gerado por um elemento $a \in G$ de ordem n (a *rotação de grau* $2\pi i/n$) e um elemento $b \in G$ de ordem 2 (uma reflexão). Defina a representação $\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ de G por

$$\rho(a^k)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) := \zeta^k \alpha_1 e_1 + \zeta^{-k} \alpha_2 e_2, \qquad \rho(a^k b)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) := \zeta^k \alpha_2 e_1 + \zeta^{-k} \alpha_1 e_2,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ e $\{e_1, e_2\}$ é a base estândar de $\mathbb{C}^2$. Prove que ρ é de fato uma representação e encontre o núcleo $\ker \rho$.

7 Exercício. Seja G um grupo finito e V uma representação. Prove que V é irredutível se e somente se V^* é irredutível.