Lista 1

Entregar Sex. 16 de janeiro

Os exercícios marcados por (*) não precisam ser escritos em detalhe e são mais para pensar e procurar na bibliografia. Muitas vezes referem-se á tópicos a cobrir em semanas futuras

1. Seja k um corpo e $V, W, Z \in Vect_k$ (a categoria de espaços vetoriais de dimensão finita). Prove que

$$\mathrm{Hom}(V, \underline{\mathrm{Hom}}(W, Z)) \simeq \mathrm{Hom}(W, \underline{\mathrm{Hom}}(V, Z)) \simeq \mathrm{Hom}(V \otimes W, Z).$$

2. Seja $\mathbb{1} \in Vect_k$ o espaço vectorial de dimensão 1, k (com a base canônica dada por $1 \in k$). Para cada espaço vetorial $V \in Vect_k$ definimos $V^* := \underline{\mathrm{Hom}}(V, \mathbb{1})$. Prove que

$$V \otimes W^* \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(W, V).$$

Será que esse isomorfismo existe se V e W são de dimensão infinita?

3. Denotamos por $Pic(k)$ a categoria com objetos $\mathscr{L} \in Vect_k$, $\dim \mathscr{L} = 1$ e morfismos $\mathrm{Hom}_{Pic}(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$ mapas lineares invertíveis. Para $\mathscr{L}, \mathscr{L}' \in Pic(k)$ temos $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}' \in Pic(k)$. Em particular, temos $\mathscr{L}^* \in Pic(k)$. Prove que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^* \simeq \mathbb{1}$ canonicamente.

Observe que em $Pic(k)$, $\otimes$ é associativo, comutativo:

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}' \otimes \mathscr{L}, \qquad (\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}') \otimes \mathscr{L}'' \simeq \mathscr{L} \otimes (\mathscr{L}' \otimes \mathscr{L}''),$$

com unidade

$$\mathscr{L} \otimes \mathbb{1} \simeq \mathbb{1} \otimes \mathscr{L} \simeq \mathscr{L},$$

e inversos

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^* \simeq \mathbb{1} \simeq \mathscr{L}^* \otimes \mathscr{L}.$$

Além dessas propriedades, todo morfismo em $Pic(k)$ é um isomorfismo. $Pic(k)$ é chamado de um *Grupoide de Picard.*

4. Seja C_k a categoria com objetos $Vect_k$, espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo k e morfismos transformações lineares *invertíveis*. Denotamos por $\det : C_k \to Pic(k)$ o mapa que a cada espaço vectorial $V \in Vect_k$ de dimensão finita n associa o espaço vectorial $\det(V) = \wedge^n V \in Pic(k)$. Prove que

a) det é um functor.

b) Para cada $W \subset V$ temos um isomorfismo $\alpha_{W,V} : \det(W) \otimes \det(V/W) \simeq \det(V)$.

c) (*) Para cada $W \subset W' \subset V$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\det(W) \otimes \det(W'/W) \otimes \det(V/W') \arrow[r, "\alpha_{W,W'} \otimes 1_{\det(V/W')}"] \arrow[d, "1_{\det(W)} \otimes \alpha_{W'/W, V/W'}"'] & \det(W') \otimes \det(V/W') \arrow[d, "\alpha_{W',V}"] \\
\det(W) \otimes \det(V/W) \arrow[r, "\alpha_{W,V}"'] & \det(V)
\end{tikzcd}$$

5. Seja A uma k-álgebra associativa. Uma representação de A é um homomorfismo de álgebras associativas $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ para algum $V \in Vect_k$. Uma subrepresentação é um subespaço $W \subset V$ tal que

$$\rho(a)(w) \in W, \quad \forall a \in A, \, \forall w \in W.$$

Uma representação V é dita irredutível se para todo $W \subset V$ subrepresentação, temos $W = 0$ ou $W = V$. V é dita indecomponível se não existem dois subrepresentações não nulas tal que $V = W \oplus W'$. Claramente toda representação irredutível é indecomponível. Seja $A = k[x]$ a álgebra de polinômios com coeficientes no corpo k. Prove que existe uma representação V indecomponível mas não irredutível.

6.(*) Seja G um grupo finito abeliano. Defina C como a categoria com objetos as representações irredutíveis de G em $Vect_k$ com k algébricamente fechado e morfismos morfismos (não nulos) de representações. Prove que C é um grupoide de Picard.