Induced representations.

$f: H \longrightarrow G$ morfismo de grupos.

f^* $G\text{-mod} \longrightarrow H\text{-mod}$

$f_* = \mathrm{Ind}_H^G : H\text{-mod} \longrightarrow G\text{-mod}.$

Def. $\underline{f_*} \dashv \underline{\underline{f^*}}$

$\forall \quad V \in H\text{-mod} \qquad W \in G\text{-mod}$

$$(*) \quad \mathrm{Hom}_{G\text{-mod}}(f_* V, W) \simeq \mathrm{Hom}_{H\text{-mod}}(V, f^* W)$$

Se $f_* V$ existe é ! salvo un único isomorfismo.

$$V' \qquad \mathrm{Hom}_G(V', W) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, f^* W)$$

$$W = f_* V \qquad \mathrm{Hom}(V', f_* V) \simeq \mathrm{Hom}(V, f^* f_* V)$$

$$V \longrightarrow f^* f_* V.$$

$$\underset{\underset{\mathrm{Id}}{\Psi}}{\mathrm{Hom}(f_* V, f_* V)} \simeq \mathrm{Hom}(V, f^* f_* V)$$

Da mesma forma $\exists \qquad \mathrm{Hom}(V, V')$

$$f_* V = k[G] \otimes_{k[H]} V \simeq k[G/H] \otimes_k V.$$

—— o ——

$V \in H\text{-mod}$ $\quad W = f_* V = \mathrm{Ind}_H^G V.$

Sejam $\{\sigma\}_{\sigma \in G/H}$ representantes G/H.

$\sigma \in G$. $\quad \coprod_{\sigma} \sigma \cdot H \simeq G.$

Todo elemento de W se escreve como combinação linear.

$$\sum_{\sigma \in G/H} v_\sigma \qquad v_\sigma \in V$$

$$\underline{W} \simeq \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{\boxed{[G:H]}\text{-vezes}}.$$

W é redutível como H-módulo.

$\dim W = [G:H] \cdot \dim V.$

Exemplo. $H = \{*\} \longrightarrow G$

$* \longrightarrow \mathrm{id}.$

$V = \mathbb{1} = k.$ $\quad f_* \mathbb{1} = k[G]$ — como espaço vetorial.

$V \in H\text{-mod}$ $\qquad W = k[G] \otimes_{k[H]} V$.

$\cong$

$V \oplus \cdots \oplus V$ $\quad [G:H]$

$g \cdot v_\sigma \overset{?}{=}$ $\quad \underline{\underline{\sigma \in G/H}}$

$\pi \; G \twoheadrightarrow G/H$

$g \longrightarrow \pi(g) = \sigma'$

$g = \sigma' \cdot h$ para algum $h \in H$

$\sigma' \cdot h \cdot v_\sigma = \sigma' \cdot (h \cdot v_\sigma)$

$V \in H\text{-mod}$

$\sigma' \cdot \sigma \in G$. $\quad \pi(\sigma'\sigma) =: \underline{\underline{\sigma''}}$

$g \cdot v_\sigma = (h \cdot v_\sigma)$

$\in V_{\sigma''}$

Exercício ver que coincide $k[G] \otimes_{k[H]} V$.

$H = \{*\} \longrightarrow G$

$\operatorname{Ind} \mathbb{1} \simeq k[G]$ $\longleftarrow$ representação regular de G.

$G/H \simeq G$ $\qquad g \cdot \mathbb{1}_\sigma = \mathbb{1}_{g \cdot \sigma}$

Induzida de trivial contém **todos** os irred. de G.

Indução comuta com soma direta

$$f_*(V \oplus V') = (f_* V) \oplus (f_* V')$$

Pergunta como é carater χ^G_W em termos de χ^H_V $\quad W = f_* V$

$$\chi^G_W(g) = Tr_W \, g.$$

$\checkmark$

$$W = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{[G:H]\text{-vezes.}}$$

V_σ

σ

$g \in G$

$g = \sigma' \cdot h$

G/H $\quad h \in H$

$\sigma' \neq 1$

$\forall \; v_\sigma \in V \quad Tr_V h \cdot v_\sigma.$

$$Tr_W \, g = \sum Tr_V \cdot h$$

Teorema. Seja $\{\sigma\}$ um conjunto de representantes de G/H, $\forall g \in G$ temos

$$\chi_W(g) = \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma^{-1} g \sigma \in H}} \chi_V(\sigma^{-1} g \sigma) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g' \in G \\ \sigma^{-1} g' \sigma \in H}} \chi_V(\sigma^{-1} g' \sigma)$$

✓

$g = \sigma \cdot h$ e $h \in H$

$g \cdot V_{\sigma'} \longrightarrow V_{\sigma \cdot \sigma'}$ para o traço.

se $\neq 0$ $\sigma \cdot \sigma' = 1 \in G/H$

$\sigma \sigma' \in H$ $\sigma \sigma' = h' \in H$.

$\sigma^{-1} \cdot g = h$.

$\Rightarrow$ Traço de h em $V_{\sigma'}$

é $\chi_V(\sigma^{-1} \cdot g \cdot \sigma)$

Teorema (Reciprocidade de Frobenius).

$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$. $\varphi(aba^{-1}) = \varphi(b)$.

$\varphi_H = \mathrm{Res}(\varphi) = \varphi \circ i$. $\varphi|_H$.

$V \in H\text{-mod}$ $W = \mathrm{Ind}\, V$.

$$\underbrace{(\varphi, \chi_W)_G = (\varphi|_H, \chi_V)_H}$$

em particular posso ver $\varphi = \chi_Z$

$Z \in G\text{-mod}$.

$$(\chi_Z, \chi_W)_G = \# Z \text{ aparece em } W$$

$$\|$$

$$((\chi_Z)|_H, \chi_V) = \# V \text{ aparece em } Z \text{ como } H\text{-mod}.$$

(supondo que V seja irredutível.)

Exemplo: $H = \langle e \rangle$ G

Z - G-mod irredutível. $V = \mathbb{1} \in H\text{-mod}$.

$W = k[G]$ regular.

$$(\chi_Z, k[G]) = ((\chi_Z)|_{\mathbb{1}}, \chi_{\mathbb{1}}) = \underline{\dim} Z.$$

<u>Cor.</u> $$k[G] = \bigoplus_{Z \in \mathrm{irred}/\sim} Z^{\oplus \dim Z}$$

Álgebra de grupos.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & X \\ X & X \end{tikzcd}$$

$$f, g \in \mathcal{F}(X) = \{ X \longrightarrow k \}.$$

$$\pi_1^* f = f \circ \pi_1 \in \mathcal{F}(X \times X)$$

$$\pi_2^* g \in \mathcal{F}(X \times X)$$

$$(\pi_1^* f) \cdot (\pi_2^* g) \in \mathcal{F}(X \times X).$$

Seja $h \in \mathcal{F}(X \times X)$.

$$(m_* h) \in \mathcal{F}(X).$$

$$\boxed{(m_* h)(x) = \frac{1}{m^{-1}(x)} \sum_{\substack{m(y, y') = x \\ \parallel \\ (y, y') \in m^{-1}(x)}} h(y, y')}$$

<u>Def.</u> $\varphi : X \longrightarrow Y$ mapa contínuo de espaços topológicos

φ é dito próprio se $\varphi^{-1}(K) \subset X$ é compacto $\forall K \subset Y$ compacto.

$\Downarrow$

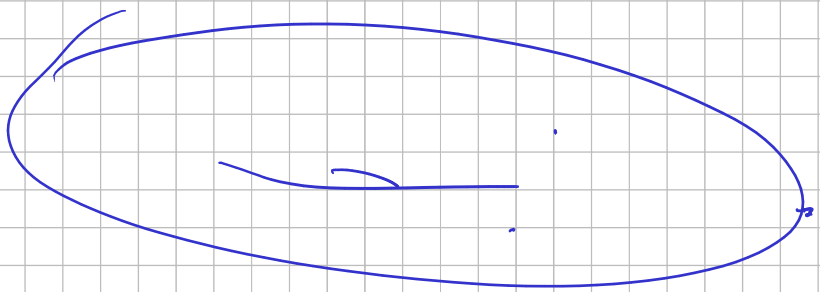
$\varphi^{-1}(y) \subset X$ é compacto $\forall y \in Y$.

Y é T_1

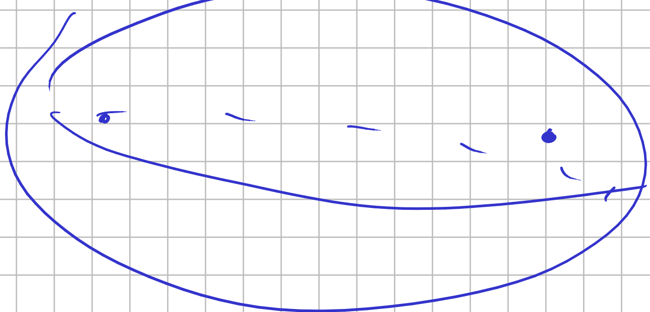
<u>Ex.</u> Todo mapa de fibras finitas é próprio.

$$y^2 = \overbrace{x^3 + ax^2 + bx}^{=0} + c$$

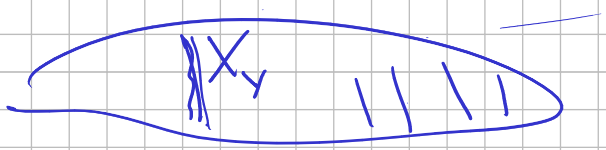
(x, y)

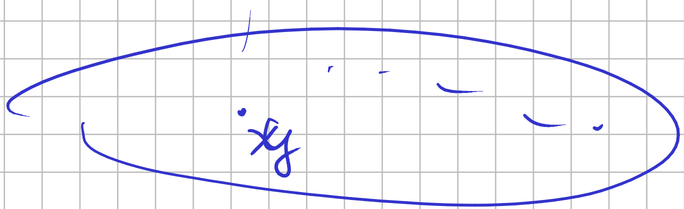


$\big\downarrow$ 2:1 $\qquad\qquad \big\downarrow$



X





$m : X \longrightarrow Y$ é próprio.

$h \in F(X)$.

$m_*(h) \in F(Y)$.

$$(m_* h)(y) = \frac{1}{|m^{-1}(y)|} \int_{\substack{m^{-1}(y) \\ \cap \\ X}} dx \, h(x)$$

dx medida em X.

$$|m^{-1}(y)| := \int_{m^{-1}(y)} dx \cdot 1$$

Pode se relaxar para o caso m não próprio. considerando $h \in L^1(X)$ (L^1 integrável).

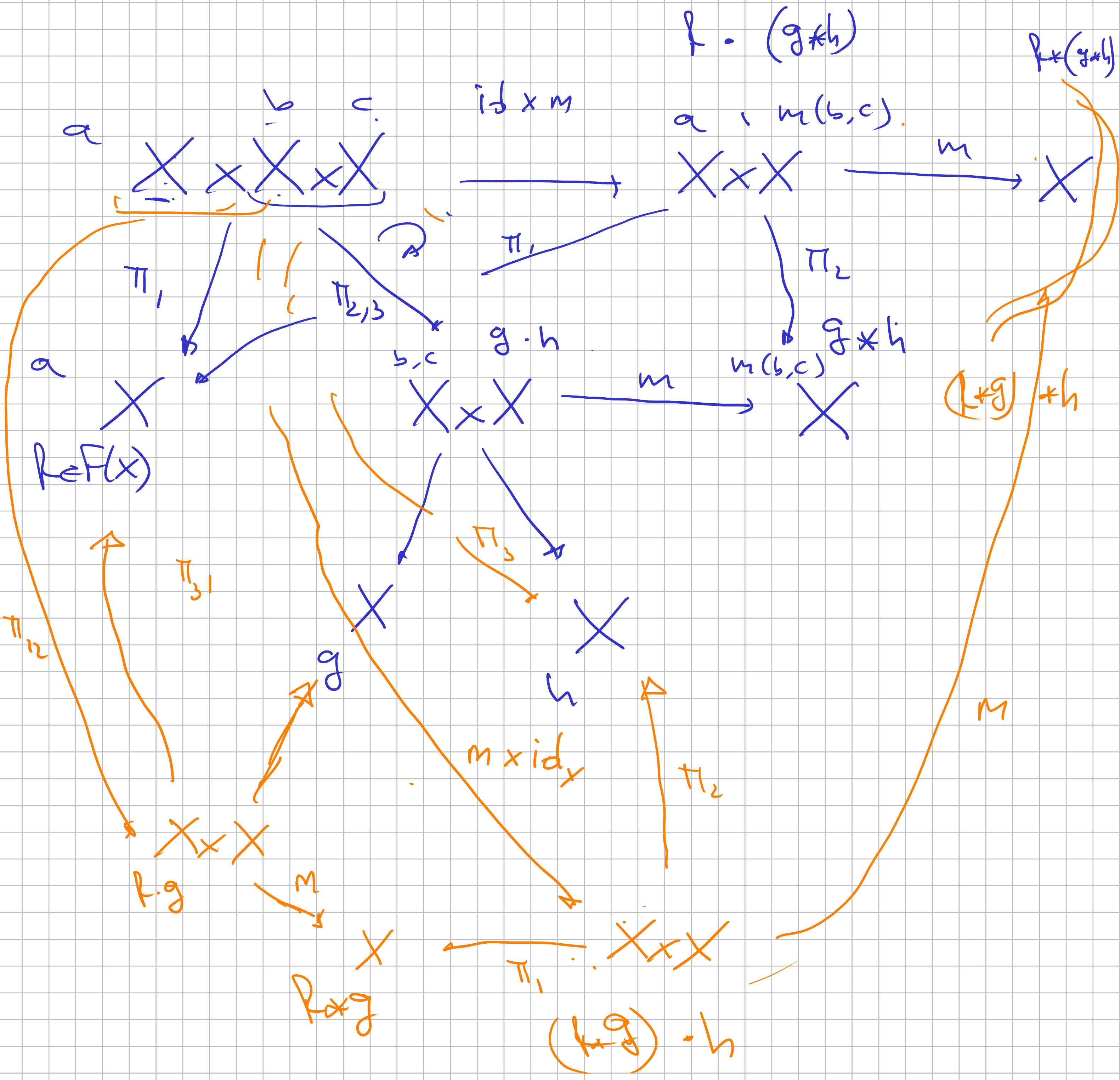
$(F(X), *)$ $\quad X \times X \xrightarrow{m} X$

$\forall$ m, contínuo própio.

$$f * g = m_*(\pi_1^*(f) \cdot \pi^*(g)).$$

1) Se m é associativo $*$ é associativo.

$$\underline{m(a, m(b,c)) = m(m(a,b), c)}$$
$\forall\, a,b,c \in X.$ $\checkmark$



$X \times X \xrightarrow{m} X$ ~~ant~~ cont. uma própria associativa.

$(F(X), *)$ são uma $\mathbb{k}$-álgebra associativa

Qual é a unidade desta álgebra?

$$\underline{\underline{\chi_1}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

$1 \in X$ é uma unidade. $m(1,x) = m(x,1) = x$

$$(f * \chi_1)(x) = m_*(f \cdot \chi_1)(x)$$

$$= \frac{1}{|m^{-1}(x)|} \int_{(x',x'') \in m^{-1}(x)} f(x') \cdot \chi_1(x'')$$

$$= f(x). \Rightarrow (f * \chi_1) = f(x).$$

$m(x', 1) = x$

$x' = x$

$F(X)$ tem duas estruturas.

- $\cdot$ é uma álgebra comutativa associativa unitária.
- $*$ é álgebra associativa com unidade.

multiplicação

$$F(X) \otimes F(X) \xrightarrow{\ \cdot\ } F(X)$$

$$F(X)^* \otimes F(X)^* \xleftarrow{\ \Delta\ } F(X)^*$$

comultiplicação.

$$A \otimes A \xrightarrow{\ \cdot\ } A \qquad \ell.$$

$$A^* \otimes A^* \xleftarrow{\ \Delta\ } A^* \qquad \Delta = (\cdot)^*$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\cdot \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes \cdot"'] & A \otimes A \arrow[d, "\cdot"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\cdot"] & A
\end{tikzcd}$$

– Associativa.

$$\begin{tikzcd}
A^* \otimes A^* \otimes A^* & A^* \otimes A^* \arrow[l, "\nabla \otimes 1"'] \\
A^* \otimes A^* \arrow[u, "1 \otimes \nabla"] & A^* \arrow[l, "\nabla"] \arrow[u, "\nabla"']
\end{tikzcd}$$

– co-assoc.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\tau"'] & A \\
A \otimes A \arrow[ur, "\cdot"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A^*\otimes A^* & & A^* \arrow[ll, "\nabla"'] \arrow[dll, "\nabla"] \\
& \circlearrowright & \\
A^*\otimes A^* \arrow[uu, "\tau"] & &
\end{tikzcd}$$

$\to$ cocomutativă.

<u>Ex</u> definiți co-unital. counitate.

$$k \xrightarrow{1} A \qquad A^* \xrightarrow{\varepsilon} k$$

$$\begin{tikzcd}
k\otimes A \arrow[rr, "1\otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & \circlearrowright & A\otimes A \arrow[dl, "\cdot"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k\otimes A^* \arrow[d, "\cong"'] & \circlearrowright & A^*\otimes A^* \arrow[ll, "\varepsilon\otimes id"'] \\
A^* \arrow[urr, "\nabla"'] & &
\end{tikzcd}$$

Corolar. $(A, \cdot)$ algebră comutativă asociativă unitară.

(A^*, ∇) - co alg. cocomutativă co-unitară.

$$X \times X \xrightarrow{m} X$$

$\rightsquigarrow$

<u>$(F(X), *)$</u>

$(F(X), \cdot)$

$\rightsquigarrow$

$(F(X)^*, \nabla)$

X é compacto. $\Longrightarrow$

" $\underline{F}(X) \simeq \underline{F}(X)^*$ "

$$F(X) \otimes F(X) \longrightarrow \mathbb{k} \,.\, \mathbb{C}$$

$$f \,,\, g \longrightarrow (f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

é simétrica não degenerada

$$f \longmapsto (f, \cdot) \in F(X)^*$$

$$\underline{F}(X) \longrightarrow (\underbrace{F^*(X)}, \nabla)$$

coálgebra cocomutativa com unidade ∇.

Álgebra ass. $*$ unitária.

<u>Exercício</u> $\nabla : \underline{F}(X)^* \longrightarrow F(X)^* \otimes F(X)^*$

$*$ Alg. associativa

Produto de alg. associativas.

∇ é um morfismo de álgebras associativas.

$A \otimes A \qquad (a\otimes b)\cdot(a'\otimes b') = aa'\otimes bb'$

$$\nabla(f * g) = \nabla(f) * \nabla(g)$$

$$X \times X \longrightarrow X$$

Bialgebre.

"Def" Una algebra di Hopf è $(A, *)$ assoc. unitaria.

$A \xrightarrow{\nabla} A\otimes A$, coass. co-commutativa co-unitale.

compatibili

$\to A \xrightarrow{S} A$ antipode.

$$X\times X \xrightarrow{m} X \qquad\qquad X \xrightarrow{i} X$$

$$a \longrightarrow i(a) = a^{-1}$$

$$F(X) \xrightarrow{S} F(X)$$

$$f(x) \longrightarrow f(x^{-1})$$

$$F(X)^* \longrightarrow F(X)^*$$

$$\begin{tikzcd} \overset{a}{X} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \overset{a\otimes a}{X\otimes X} \arrow[r] \arrow[d, "a\otimes a^{-1}"] & k \\ 1 \arrow[r] & X\otimes X \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

Teor $(\mathbb{k}[G], *)$ G - finito é uma álgebra de Hopf.

G, compacto.

$A = \mathbb{k}[G]$ $\quad \{e_g\}_{g \in G}$ $\quad e_g \cdot e_{g'} = e_{g \cdot g'}$

⚠ A além de ter um produto não comut tem uma estrutura de Álgebra de Hopf.

$A \cong \mathcal{O}(G)^*$ $\longrightarrow$ $(\text{Funções em } G)^*$

$$e_g \rightsquigarrow \chi_g(g') = \begin{cases} 1 & g = g' \\ 0 & g \neq g' \end{cases} \in \mathcal{O}(G)$$

Produto $\cdot$ em A $\rightsquigarrow$ para produto de convolução em $\mathcal{O}(G)$

$$\mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(f, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)}$$

$$e_g \longmapsto (\chi_g, \cdot) \in \mathcal{O}(G)^*$$

$$e_g \cdot e_{g'} \longrightarrow e_{g\cdot g'}$$

$$A \otimes A \xrightarrow{\ \cdot\ } A$$ produto.

$$A \xrightarrow{\ \nabla\ } A \otimes A$$ co-produto.

$$e_g \longmapsto e_g \otimes e_g$$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\cdot"] \arrow[d, "\cdot\otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "C \circlearrowright"] & A\otimes A \arrow[d, "\cdot"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\cdot"'] & A
\end{tikzcd}$$

Associatividade.

$a\otimes b\otimes c \mapsto a\otimes bc \to a(bc)$

$\searrow ab\otimes c \quad (ab)c$

$$e_a\otimes e_b\otimes e_c \longmapsto e_a\otimes e_{bc} \to e_{a(bc)} = e_{(ab)c}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[dr, phantom, "C \circlearrowright"] & A\otimes A \arrow[d, "\nabla\otimes 1"] \\
A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\nabla"'] & A\otimes A\otimes A
\end{tikzcd}$$

co-associatividade

Coassociatividade não tem nada a ver com assoc de G.

$$\begin{tikzcd}
e_g \arrow[r] \arrow[dd] & e_g\otimes e_g \arrow[d] \\
& (e_g\otimes e_g)\otimes e_g \\
e_g\otimes e_g \arrow[r] & e_g\otimes(e_g\otimes e_g)
\end{tikzcd}$$
$(e_g\otimes e_g)\otimes e_g = e_g\otimes(e_g\otimes e_g)$

A não é comutativa.

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\tau"'] & A \\ A\otimes A \arrow[ur, "\cdot"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_g \arrow[r, mapsto] & e_g\otimes e_g & \\ A \arrow[r, "\nabla"] \arrow[dr, "\nabla"'] & A\otimes A & \\ & A\otimes A \arrow[u, "\tau"'] & e_g\otimes e_g \arrow[uu, mapsto] \end{tikzcd}$$

A é co-comutativa

$\cdot$ e o ∇ são compatíveis.

$A \xrightarrow{\nabla} \underline{\underline{A\otimes A}}$ homomorfismo de álgebras assoc.

$$\nabla(e_a\cdot e_b) = \nabla(e_{a\cdot b}) = e_{ab}\otimes e_{ab}$$

$$\|$$

$$(\nabla(e_a))\cdot(\nabla e_b) = (e_a\otimes e_a)\cdot(e_b\otimes e_b)$$

$(A, \cdot, \nabla)$ é uma biálgebra.

$\cdot$ em G é associativo. $\cdot$ em k. (∇) é assoc. e comut.

A é unitária. $1 = e_1$

$e_1 \cdot e_g = e_g \quad \forall g \in G.$

$$k \xrightarrow{1} A \qquad A \xrightarrow{\varepsilon} k.$$
$$1 \longmapsto 1$$

$$\begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r, "1 \otimes id"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes A \arrow[d, "\cdot"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes k \arrow[r] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes A \arrow[d, "\cdot"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon \otimes id"'] \\ & A \arrow[ul, "\sim"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

$$k[G] \longrightarrow k$$
$$e_g \longrightarrow 1$$
$$e_g \longrightarrow 1$$

Co unidade

$$\begin{tikzcd} \varepsilon(e_g) \otimes e_g & e_g \otimes e_g \arrow[l] \\ & e_g \arrow[ul, "\sim"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & A \arrow[r, "\varepsilon"] & k \end{tikzcd} \quad \sim \quad \text{Axioma.}$$

??

G tem inversos $\quad A \longrightarrow A^{\circ}$

Anti homomorfismo. $\quad e_g \longrightarrow e_{g^{-1}}$

$$e_g \cdot e_{g'} \longrightarrow e_{g^{-1}} \cdot e_{g'^{-1}} \neq e_{g'^{-1}} \cdot e_{g^{-1}}$$

$$e_{gg'} \longrightarrow e_{(gg')^{-1}} = e_{g'^{-1}g^{-1}}$$

A° é A como espaço vetorial

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\tau"'] & A \\
A \otimes A \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

$\cdot \sim$ produto em A°

antípode. $A \xrightarrow{S} A^{op}$

$$a \longrightarrow a \otimes a$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[drrr, bend right] & A \otimes A \arrow[r, "1 \otimes \text{inversão}"] & A \otimes A \arrow[r, "\cdot"] & A \\
 & & & k \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

$$e_g \longmapsto e_g \otimes e_g \longmapsto e_g \otimes e_{g^{-1}} \longmapsto 1$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\nabla"] & A \otimes A \arrow[r, "1 \otimes S"] & A \otimes A \arrow[r] & A \\
k \arrow[urr, "id"']
\end{tikzcd}$$

$$S\,(e_g = e_{g^{-1}})$$

$(k[G], \cdot, \nabla, 1, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf.

Outros exemplos de Álgebras de Hopf.

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Álgebra de Lie.

Classificação de Álgebras de Hopf "Pontuadas"

H — H-mod tem uma estrutura.

$\oplus, \otimes, \mathbb{1}, *$..

$$\underline{M \otimes N} \simeq N \otimes M \simeq M \otimes N$$

$$M \otimes N \xrightarrow{id} M \otimes N$$

$$\Updownarrow$$

∇ é co-comutativo.

Seja H uma álgebra de Hopf. M, N módulos para $(H, \cdot)$

$$M \otimes N \in H\text{-mod}. \quad H \to H \otimes H$$

$$\overset{H}{\underset{e}{\cup}} \cdot (m \otimes n) \quad \longrightarrow \quad \nabla(e) \in H \otimes H$$

$$\sum b_i \otimes c_i \qquad b_i, c_i \in H$$

$$a \cdot (m \otimes n) := \sum b_i m \otimes c_i \cdot n = \nabla(a) \cdot (m \otimes n)$$

$$e_g (m \otimes n) = e_g \cdot m \otimes e_g \cdot n$$

$$g \cdot (m \otimes n) = gm \otimes gn$$

∇ é co-comutativo.

$$\sum b_i \otimes a_i = \sum c_i \otimes b_i$$

iso de rep. de H.

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rr, bend right, "id"] & N \otimes M \arrow[r, "\simeq"] & M \otimes N \end{tikzcd}$$

Grupos quânticos são "álgebras de Hopf" que não são cocomutativos.

$k[G], \cdot, 1, \varepsilon, S$, deformam o coproduto.

$q \in \mathbb{C}^*$

$$\nabla : e_g \longrightarrow q(e_g \otimes e_g)$$

G não é finito. e G-compacto.

$k[G] \simeq (\mathcal{O}(G), *)$ coproduto. ~~e_g~~

é uma álgebra de Hopf.

$\forall q \in \mathbb{C}$ admitem uma deformação

esses são os grupos quânticos.

Teorema $\mathcal{C}$ - categoria, $\oplus$, $\otimes$, $\mathbb{1}$, simétrico, ~~rígido~~

$V^* \cancel{=} \cancel{Hom}(V, \mathbb{1})$

$(V^*)^* \simeq V$

$\mathcal{C} \xrightarrow{\Gamma} Vect_k$ dim $< \infty$.

$\oplus \longmapsto \oplus$

$\otimes \longmapsto \otimes$

$\mathbb{1} \longrightarrow k$

$\Rightarrow \exists$ H álgebra de Hopf. H única. tq. $\mathcal{C} \simeq H$-mod.

$End\,\Gamma \simeq k[Aut\,\Gamma]$.

G - grupo finito. k - corpo char 0.

$k[G] \supset Z(G) = \{a \in k[G]$ tq $ab = ba$ $\forall b \in k[G]\}$

$C \subset G$ uma classe de conjugação em G

$$k[G] \ni \sum_{a \in C} e_a = e_C \in Z(G)$$

$e_b \quad b \in G. \qquad e_c \cdot e_b = \sum_{a \in C} e_{ab}$

$$e_b \cdot e_c = \sum_{a \in C} e_{ba} = \sum_{a \in C} e_{\underline{bab^{-1}}\, b} = \sum_{a' \in C} e_{a' b}$$

$ba = \underbrace{bab^{-1}}_{\in C}(b)$ $\qquad b \rightsquigarrow \mathrm{Aut}\ C$

$\qquad\qquad a \to bab^{-1}$

$\{ \mathrm{span}\ e_c,\ c \subset G$ classe de conjugação. $\} \subseteq Z(G)$

$\{e_c\}$ é linearmente independente.

Claim se $a \in Z(G)$, então

$$a = \sum_{\substack{c \text{ classe} \\ \text{de conjugação}}} \alpha_c e_c$$

será que $\langle e_c, e_{c'} \rangle = \delta_{c,c'}$

com o produto. $\quad (f,g) = \frac{1}{|G|} \sum f(a) \overline{g(a)}$

$a, b \in G.$

$$(e_a, e_b) = \langle \chi_a, \chi_b \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in G} \chi_a(c) \overline{\chi_b(c)}$$

$\quad \|$

$$= \begin{cases} 0 & a \neq b \\ \frac{1}{|G|} & a = b \end{cases}$$

$\{e_a\}$ são uma base ortogonal de $k[G]$.

$$(e_C, e_{C'}) = \sum_{\substack{a \in C \\ b \in C'}} (e_a, e_b) = \begin{cases} 0 & C \neq C' \\ \frac{|C|}{|G|} & C = C' \end{cases}$$

$$(e_C, e_{C'}) = \frac{|C|}{|G|} \delta_{C,C'}$$

$k[G]$ - é uma representação de G.
(regular de G).

$a \in G$. $\quad e_b \rightsquigarrow a \cdot (e_b) = e_{aba^{-1}}$

$$a \cdot (b \cdot e_c) = a \cdot (e_{bcb^{-1}}) = e_{abcb^{-1}a^{-1}}$$

$$(a \cdot b)\, e_c = e_{(ab)c(ab)^{-1}} \quad //$$

$V = k[G]$ - com vect. $\curvearrowleft G$

$$Z(G) = \sum_{b \in G} \alpha_b e_b \qquad \alpha_b \in k, \; b \in G.$$

$$a \cdot \sum \alpha_b e_b = e_a \cdot \left(\sum \alpha_b e_b\right) \cdot e_a^{-1}$$
$$= \sum \alpha_b e_b .$$

$Z(G) \subset V$ submódulo.

é uma representação trivial de G.

$v \in V$ t.q. $a \cdot v = v$

$\iff e_a \cdot v\, e_a^{-1} = v \iff v \in Z(G)$

$$\underline{\underline{Z(G)}} = \underline{\underline{V}}^G$$

$$\boxed{\dim Z(G) = (\chi_{\mathbb{1}}, \chi_V)}$$

$\underline{Z(G)}$ tem como base $\{e_C\}$ C - classe de conjugação.

$\{\chi_C\}$ — $\{V_C\}$

rep. irred. de $G/\sim$

Irred de G ⟶ elemento de $Z(G)$.

$$\begin{array}{c} G \\ \circlearrowright \\ V \end{array} \qquad k[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

$$e_a \longmapsto \text{ação de } a \text{ em } V.$$

$$\rho: G \to GL(V) \qquad e_a \longmapsto \rho(a)$$

$$\begin{array}{ccc} Z(G) & \longrightarrow & \mathrm{End}_G(V) \\ \Psi & & \\ z & \longmapsto & z\cdot v \end{array}$$

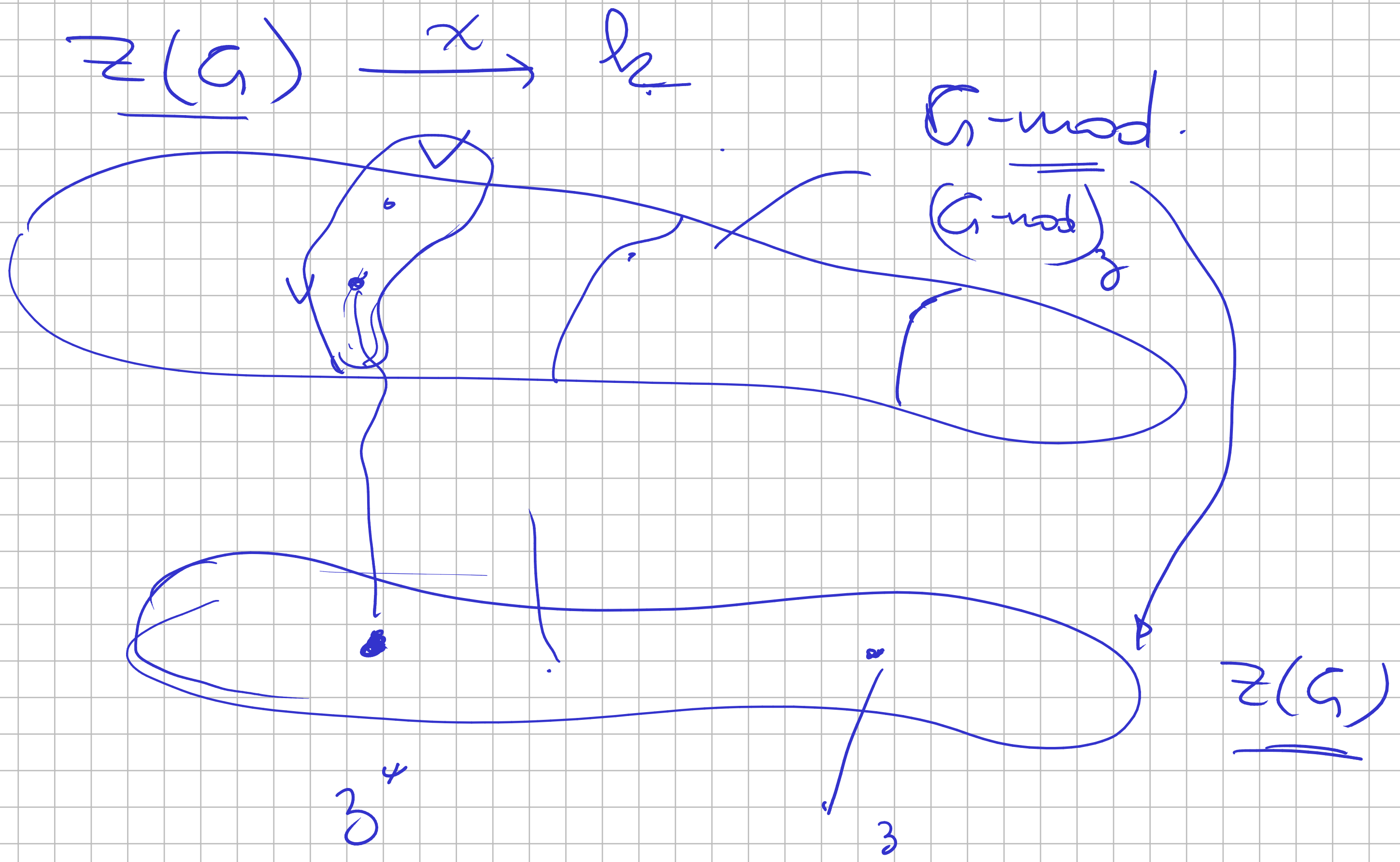
$$\begin{array}{c} G \\ \Psi \\ a. \end{array} \qquad z\cdot a v = a\cdot z v.$$

V irred. $k = \bar{k}$ $\quad \mathrm{End}_G(V)$ são múltiplos da identidade Schur!

$$\begin{tikzcd} Z(G) \arrow[r, "\chi_V"] \arrow[dr] & k \arrow[d] \\ & \mathrm{End}(V) \ni \lambda\, \mathrm{id} \end{tikzcd}$$

$$\longleftrightarrow \qquad \underline{Z(G)}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Espaços} & \longleftrightarrow & \text{Funções} \\ \Psi & & \cup \\ \text{Pontos.} & \longleftrightarrow & \underline{\text{ideais}}\text{. maximais.} \end{array}$$



$$\boxed{\text{Segunda a } 9{:}00}$$

Serie $\underline{6.3}$

$k[G] = k\text{-span}\{e_a\}_{a \in G}$. $\quad e_a e_b = e_{a \cdot b}$.

$Z(G) =$ Centro de $k[G]$.

Prop. $Z(G) \simeq \underbrace{k \oplus k \oplus \ldots \oplus k}_{\#\text{ classes de conjugação de } G\text{-vezes}}$.

Proof: $k[G] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} End(V_i)$

$I =$ representações irredutíveis de G.

$$e_a \longmapsto \sum_{i\in I} \rho_i(a)$$

$$\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$$

$$\begin{array}{c} V_1 \\ \\ V_n \end{array} \begin{bmatrix} [\rho_1(a)] & & \\ & \ddots & \\ & & [\rho_n(a)] \end{bmatrix}$$

extendido linearmente $\forall\, e \in k[G]$

é claramente compatível com $\cdot$.

$\Rightarrow$ é um morfismo de álgebras associativas.

é injetivo porque seja $\varphi \in \mathrm{Ker}$.

$$\varphi = \sum \alpha_a e_a \qquad \alpha_a \in k. \quad a \in G.$$

$$\sum_i \alpha_a \rho_i(a) = 0 \qquad \forall\, i$$

$$\Rightarrow \alpha_a = 0 \quad \forall\, a.$$

φ age por zero em toda rep. de $k[G]$. $\Rightarrow \varphi = 0$.

$$\Rightarrow \quad k[G] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} \mathrm{End}\, V_i \xrightarrow{\pi_i} \mathrm{End}(V_i)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ Z(G) \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} (\ddots) & & \\ & (\ddots) & \\ & & (\ddots) \end{bmatrix}$$

$$\pi_i : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \operatorname{End} V_i \qquad i \in I$$

$$Z(\underline{G}) \longrightarrow \operatorname{End}_G(V_i) \simeq \underline{k}.$$

$$\begin{array}{ccc} Z(G) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in I} k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[G] & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in I} (\operatorname{End} V_i) \end{array}$$

Lemma: $\rho : G \to GL(V)$. $\chi_V(a)$ é integral sobre $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} \longrightarrow A$ anel

$a \in A$ é integral $/\mathbb{Z}$ se.

- $\mathbb{Z}[a]$ é finitamente gerado como um $\mathbb{Z}$-módulo $\subset A$.

$\Updownarrow$

- a satisfaz uma equação polinom. com coef. em $\mathbb{Z}$ (mônica).

$$a^n + \alpha_1 a^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}.$$

- $\exists \quad B \subset A \quad \mathbb{Z}$-submódulo finitamente gerado que contém $\mathbb{Z}[a]$.

— · —

Corol. 1) A é finitamente gerado. $\mathbb{Z}$-mod
$\Rightarrow \forall a \in A$ a é integral / $\mathbb{Z}$.

2) Os elementos integrais de A são um sub-anel de A.

$a, b \in A$ $\qquad$ $\underbrace{\mathbb{Z}[a]}_{a} \otimes \underbrace{\mathbb{Z}[b]}_{b}$ $\quad \mathbb{Z}$-mod.
finitamente gerado.

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbb{Z}[a,b]}} \subset A$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}[a,b]$ é integral / $\mathbb{Z}$.

— $\Downarrow$

$G \longrightarrow GL(V)$. $\qquad \chi_V(a) = Tr_V \rho(a)$

= soma de autovalores de $\rho(a)$.
= soma de raízes da unidade.
= soma de inteiros algébricos.

$$x^n - 1 = 0$$

— · —

$Z(G) \subset k[G]$ $\qquad$ $\mathbb{Z}(G) \simeq \underbrace{k \oplus \ldots \oplus k}_{n\text{-vezes}}$.

$n = \#$ classes de conjugação.

$$k(G) \simeq \mathcal{O}(G)$$

$$e_a \longrightarrow \chi_a(b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}$$

$$Z(G) \longrightarrow C(G) \subset \mathcal{O}(G)$$

$C(G) =$ { Funcões de classe.

χ_{C_i} $C_i =$ classe de conjugação.

$$\boxed{e_i = \sum_{a \in C_i} e_a} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$\{e_i\} =$ base de $Z(G)$.

Lemma: Seja $\varphi = \sum \alpha_a . e_a \in Z(G)$, $\mathbb{Z} \subset Z(G) \subset k[G]$

suponha α_a é integral / $\mathbb{Z}$ $\forall$ $a \in G$.

$\Rightarrow$ φ é integral / $\mathbb{Z}$.

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ α_i são combinações inteiras dos α_a. $a \in C_i$

α_i são integrais sobre $\mathbb{Z}$.

bastar ver. de $e_i \in Z(G)$ é integral $/\mathbb{Z}$ $\forall$ $i=1,\dots,n$.

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} e_k$$

$c_{ij}^{k} \in \mathbb{Z}$.

$$\left(\sum_{a\in C_i} e_a\right)\left(\sum_{b\in C_j} e_b\right) = \sum_{\substack{a\in C_i\\ b\in C_j}} e_{a\cdot b}$$

$$= \sum_{k} \left(\sum_{\substack{a,b\\ a\cdot b\in C_k\\ a\in C_i\\ b\in C_j}} e_{a\cdot b}\right)$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n \subset \mathbb{Z}(G)$ submodulo finitamente gerado $\Rightarrow$ e_i integral.

Corollario: $G \to GL(V)$. V irredutivel.

$\varphi = \sum \alpha_a e_a \in Z(G)$ α_a integral.

como acima.

$$\underbrace{\frac{1}{\dim V} \sum \alpha_a \chi_V(a)}_{=\ \pi_i(\varphi)} \in k \qquad V=V_i$$

é um inteiro algébrico.

Temos um morfismo $Z(G) \overset{\pi_i}{\twoheadrightarrow} k$. $\square$

Para cada $i \in I$ $\qquad \nearrow \qquad \overset{\pi_i}{\nearrow}$

$$\frac{k \oplus \cdots \oplus k}{n}$$

— o —

Corollario. $\dim V_i \mid |G| \quad \forall i$.

$$\sum (\dim V_i)^2 = |G|$$

$$\sum_{a \in G} \chi(a^{-1}) e_a \in k[G].$$

algébricos.

$$\frac{|G|}{(\dim V_i)} \left[\sum_{a \in G} \chi(a^{-1}) \cdot \chi(a)\right] = \frac{|G|}{(\dim V_i)} \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle$$

$$\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle = 1.$$

é um inteiro algébrico.

$$= \frac{|G|}{(\dim V_i)} \in \mathbb{Q}.$$

Como os inteiros algebricos de $\mathbb{Q}$ são os inteiros $\Rightarrow \frac{|G|}{(\dim V_i)} \in \mathbb{Z}$.

Teorema: $C(G)$ = centro de G. $V = V_i$ irredutível

$\Rightarrow \dim V_i \mid [G : C(G)]$.

$a \in C(G) \qquad \rho(a) = \underline{\lambda}(a) \cdot Id_{V_i}$

$\lambda : C(G) \to k^*$

$m \in \mathbb{N}$. $\qquad G^m \longrightarrow GL(\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m\text{-vezes}})$

$\underbrace{G \times G \cdots \times G}_{m\text{-vezes}}$

$a_1, \ldots, a_m \longmapsto \rho(a_1) \otimes \cdots \otimes \rho(a_m)$

$v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \longmapsto a_1 \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes a_m \cdot v_m$

$C(G)^m$

$$\left(\prod \lambda(a_i)\right) \cdot Id_{V \otimes \cdots \otimes V}$$

$$\wr\wr$$

$$\lambda\left(\prod a_i\right) \cdot Id_{V \otimes V \cdots \otimes V}.$$

Seja $\underline{\underline{H}} \subset C(G)^m \subset G^m$ subgrupo de dados.

$a^1, \ldots, a^m$ t.q. $\underline{a^1 \cdots a^m} = 1$.

de age trivialmente $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m\text{-vezes}}$.

$$G^m/H \longrightarrow GL(\underline{V \otimes \cdots \otimes V})$$

$(\dim V)^m$ divide $\;|G|^m / |C(G)|^{m-1}$ $\qquad \underline{\underline{(*)}}$

$$\left(\frac{|G|}{|C(G)|\dim V}\right)^m \in \frac{1}{|C(G)|}\mathbb{Z} \quad \forall\, m \geq 0.$$

Ex. $\Rightarrow$ $$\frac{|G|}{|C(G)|\dim V} \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{p}{q}$$

Falta provar $V\otimes\cdots\otimes V$ m-vezes é irredutível como representação de $G\times\cdots\times G$

não é como G-mod.

Ex dar uma prova assumindo $\exists\, 0\neq U \subset \underline{V\otimes\cdots\otimes V}$ invariante.

$\chi_{V\otimes\cdots\otimes V}$ como $\underline{G\times\cdots\times G}$-mod.

$$\chi_{V\otimes\cdots\otimes V}(a_1,\ldots,a_m) = \prod \chi_V(a_i)$$

$$\langle \chi_{V\otimes\cdots\otimes V}, \chi_{V\otimes\cdots\otimes V}\rangle = \langle \chi_V,\chi_V\rangle^m = 1^m = 1$$

$\Rightarrow$ $V\otimes\cdots\otimes V$ é irred. $\square$.

Tentar. exercício.

$$\boxed{\underline{U} \simeq U_1 \otimes \cdots \otimes U_m} \subset \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m\text{-vezes}}$$

— o —

Pergunta e responder é quando uma representação induzida é irredutível.

$G \supset H$ — comutativos.

$GL_n(\mathbb{C})$

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$$

$G_{\mathbb{C}}$ / U:

$\underline{SL_n(\mathbb{C})}$

$SO_n(\mathbb{C})$

$Sp_n(\mathbb{C})$

$\cup$

B $\begin{bmatrix} x & x & 0 \\ & x & 0 \\ & & x \end{bmatrix}$

$G \begin{cases} SU_n \\ SO_n(\mathbb{R}) \\ Sp_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

$G_{\mathbb{C}} \supset B$

$\cup$

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix} = T_{\mathbb{C}} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\underline{T_{\mathbb{C}} \cap G}} = T$$

$$\underline{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \cdots \times \mathbb{C}^*} \qquad \underline{S^1 \times \cdots \times S^1}$$

$$1 - T \rightarrow B \rightarrow N \rightarrow 0.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{N} \subset \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$$

$$N \longrightarrow B$$

$$0 \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow \underline{T} \rightarrow 0$$

Ex $\underline{G_{\mathbb{C}}} / \underline{B} \simeq \underline{G} / T$

variété complexe compacte.

variété de complexe compacte.

$SU(2) \simeq S^3$

$\supset$

$T \simeq S^1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \underset{=}{S^1} \hookrightarrow & S^3 & \longrightarrow \text{Fibração de Hopf.} \\ & \downarrow & \\ & SU(2)/S^1 & \simeq \mathbb{CP}^1 \simeq S^2 \end{array}$$

$T \xrightarrow{\rho} GL_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$ Trivial de construir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{N} \arrow[r] & \underline{B} \arrow[r] \arrow[dr, "\rho"'] & T \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\ & & & GL_1(\mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

$B \subset G$

$V := \mathrm{Ind}_B^G \, \mathbb{C}_\rho$.

rep. dim 1 de B.

Toda irred. de G é desta forma.

$V = \Gamma(G/B, \mathcal{L}_\rho)$

Teorema. $\forall \; \rho : T \to \mathbb{C}^*$ (propiedades)

$\exists \; \mathcal{L}_\rho \longrightarrow G/B$ fibrado.

$V = \Gamma(G/B, \mathcal{L}_p)$ é irred.

Toda irrep. é desta forma.

<u>Não</u> vale para Map $S^1 \to G$.

<u>Langlands.</u> $\square$

—— • ——

$\sigma \in G$.

$H \subset G$ $\quad G/H = \{\sigma\}_{\sigma \in R}$

seja $V \in G\text{-mod} \simeq k[G]\text{-mod}$ $\quad V \in k\text{-Vect}$

seja $W \subset V$ sub H-mod.

<u>Def</u> V é dita <u>induzida</u> por W se

$$\underline{V} = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma \cdot W$$

Observação: essa condição é independente da escolha dos σ.

$$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma \cdot W \simeq \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma \cdot H \cdot W$$

$$\bigoplus_{\sigma'} \sigma' \cdot W$$

onde $\{\sigma'\}$ é outro conjunto de rep. de σH.

$W \in H$-mod.

$$V' = k[G] \otimes_{k[H]} W$$

G-mod $= k[G]$-mod

$\underline{V}$ é induzida por $\underline{W}$ $\iff$ o homomorfismo

$$V' = k[G] \otimes_{k[H]} W \longrightarrow V$$

é um isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, dashed, "\exists !"] & & V \\ & W \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \qquad G\text{-mod.}$$

$\sigma \cdot W$

$\underline{\underline{\sigma \cdot w}} \longrightarrow \underline{\underline{\sigma \cdot w}} \in V$

$W \ni w \longrightarrow 1 \otimes_{k[H]} w \in V'$

$$e_h \otimes w = 1 \otimes e_h w = 1 \otimes hw$$

Como $k[G]/k[H]$ tem como base R.

segue-se que V' é induzida.

A rep. induzida de W existe e é única.

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ind}_H^G W = \mathrm{Ind}(W)$$

Teorema: Se $V = \mathrm{Ind}(W)$ e Z é G-mod. então temos um isomorfismo canônico

$$\mathrm{Hom}_H(W, \underset{i^* Z}{\overset{\shortparallel}{Z}}) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}(W), Z)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Ind}(\cdot) \dashv i^* \qquad i^* : G\text{-mod} \to H\text{-mod}$$

$$\mathrm{Hom}_H(\underset{\varphi}{W}, Z) \simeq \mathrm{Hom}_G(k[G] \otimes_{k[H]} W, Z)$$

$$\sigma \cdot w \longrightarrow \sigma \cdot \varphi(w)$$

$$1 \otimes w$$

$$H \subset H' \subset G.$$

W $$\mathrm{Ind}_{H'}^G (\mathrm{Ind}_H^{H'} W) \simeq \mathrm{Ind}_H^G W.$$

$$k[G] \otimes_{k[H']} (k[H'] \otimes_{k[H]} W)$$

$$\simeq$$

$$(k[G] \otimes_{k[H']} k[H']) \otimes_{k[H]} W$$

$$\mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} W$$

$W \in H\text{-mod}$ irredutível.

Quando $\mathrm{Ind}(W)$ é irredutível.?

basta calcular o caráter do induzido

seja $f \in \mathbb{k}[H]^H :=$ funcões de classe de H

$$f(aha^{-1}) = f(a) \quad \forall\, a,h \in H.$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Ind}}}(f)(a) := \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{b \in G \\ b^{-1}ab \in H}} f(b^{-1}ab)$$

$\cap$

$\mathbb{k}[G]$

$\|$

$\mathcal{C}(G)$

$\underline{\underline{bh}}$

$\mathrm{Ind}(f)$ é uma função de classe. $\mathbb{k}[G]^G$.

$$\mathrm{Ind}(f)(cac^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{b \in G \\ b^{-1}cac^{-1}b \in H}} f(b^{-1}cac^{-1}b)$$

$b^{-1}c = d^{-1}$ $\quad c^{-1}b = d$ ✓

$$\frac{1}{H}\sum_{\substack{d\in G\\ d^{-1}ad}} f(d^{-1}ad) = \mathrm{Ind}(f)(a)$$

$$\begin{array}{ccc} k[H]^H & \longrightarrow & k[G]^G \\ \psi & & \psi \\ \chi_{W} & \longmapsto & \chi_{\mathrm{Ind}(W)} = \mathrm{Ind}(\chi_W) \end{array}$$

Lema.

$$(f,g) = \frac{1}{|G|}\sum f(a)g(a^{-1})$$

$$(\chi_V, \chi_{V'}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, V')$$

$k = \bar{k}$ caracteres de irredutíveis são ortonormais.

<u>Teorema</u>. Seja $f\in k[H]^H$ e $g\in k[G]^G$.

$\Rightarrow$ $(f, g)_H = (\mathrm{Ind}\, f, g)_G$

Vale para $f = \chi_W$ $W\in H\text{-mod}$.

$g = \chi_V$ $V\in G\text{-mod}$.

$$(f, g)_H = \dim \mathrm{Hom}_H(W, V).$$

$$(\mathrm{Ind} f, g) = \left(\chi_{\mathrm{Ind}(W)}, \chi_V\right)$$

$$= \dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}(W), V)$$

Utilizando $f = \chi_W$ W-irred.

$g = \chi_{\mathrm{Ind}(W)} = \mathrm{Ind}(f).$

$$\underbrace{\boxed{(f, g)_H}}_{\text{12}} = \underbrace{(g, g)_G}$$

$V = \mathrm{Ind}(W)$

$$\dim \mathrm{Hom}_H(W, V) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, V)$$

$K \xhookrightarrow{i_K}$

$H \xhookrightarrow{i_H} G$ subgrupos de G.

$W \in H\text{-mod} \rightsquigarrow \mathrm{Ind}_H^G(W) \in G\text{-mod}$

$\rightsquigarrow i_K^* \mathrm{Ind}_H^G(W) \in K\text{-mod}.$

$$k[K] \backslash {}^{k[G]} / {}_{k[H]}$$

$$k[G] = \coprod_{\sigma} k[H]\cdot\sigma\, k[G]$$

$$\sigma \in k[G] \qquad \{\sigma\} = {}_K\backslash G/_H$$

$$\underline{\sigma H \sigma^{-1}} \cap K =: H_\sigma \subset K \quad \text{subgrupo.}$$

$$\rho : H \longrightarrow GL(W).$$

$$\rho : H_\sigma \longrightarrow GL(W)$$

$$a = \sigma h \sigma^{-1} \longmapsto \rho(h)$$

$$\rho^\sigma(a) = \rho(h) = \rho(\sigma^{-1} a \sigma) \qquad a \in H_\sigma.$$

$W = W_\sigma$ é uma representação de $H_\sigma \subset K$

$$\rho^\sigma : H_\sigma \longrightarrow GL(W).$$

$$\operatorname{Ind}_{H_\sigma}^{K} \in K\text{-mod}.$$

<u>Teorema.</u> $$i_K^* \operatorname{Ind}_H^G(W) \simeq \bigoplus_{\sigma \in {}_K\backslash G/_H} \operatorname{Ind}_{H_\sigma}^{K}(W_\sigma)$$

os dois extremos do teorema.

$K = G$. $$\operatorname{Ind}_H^G(W') = \operatorname{Ind}_H^G(W)$$

o único coset é $\tau = 1 \in G$. $\quad G \tau H = G$.

$\underline{\underline{K = 1}}$. $\qquad \operatorname{Ind}_H^G(W) \simeq \bigoplus_{\tau \in G/H} W_\tau$

definição de induzida.

$$\operatorname{Ind}_H^G(W) \simeq \bigoplus_{\tau \in G/H} \tau \cdot W$$

$\tau \in K \backslash G / H \qquad V_\tau \subset V = \operatorname{Ind}_H^G(W)$

$V_\tau =$ gerado por $\underline{\underline{\tau W}}$ $\quad \tau \in K \underline{\tau} H$

$$G = \coprod K \tau H$$

$V_\tau \in K\text{-mod} \Leftarrow$ basta ver que

$\cup \qquad \tau W \in K\text{-mod}$

$K \qquad \tau \in \underline{K \tau H}$

$k \cdot (\tau W) \rightsquigarrow (k\tau) \in K \tau H$

$V_\tau \simeq \operatorname{Ind}_{H_\tau}^K (W_\tau) \qquad H_\tau$.

$$K \supset \overset{\simeq}{\{a \in K \text{ tq } a \cdot (\tau \cdot W) = \tau W\}}$$

$\cup \qquad \overset{\shortparallel}{H_\tau}$

$\tau^{-1} H \tau \cap K$.

$V_\tau \simeq \bigoplus_{K/H_\tau} W/\tau \Rightarrow V_\tau = \mathrm{Ind}_{H_\tau}^{K}(W/\tau)$.

$\tau\omega \quad \omega$

$\tau . W \simeq W/\tau$. $\quad \rho^{\tau}$

$\tau \in \mathcal{C}.\ W \quad H_\tau$ é identidad..

$$V \simeq \bigoplus_{\tau \in K \backslash G/H} V_\tau \simeq \bigoplus_{\tau \in \mathcal{C} G/H} \mathrm{Ind}_{H_\tau}^{K}(W/\tau).$$

$\square$.

Vamos a utilizar a caraterização de acima no caso $K = H$.

$$(f, g)_H = (g, g)_G.$$

$f = \chi_W \qquad g = \chi_{\mathrm{Ind}(W)}$

$\sigma \in G \qquad H_\sigma = \sigma H \sigma^{-1} \cap H \subseteq H$

$\rho : H \to GL(W)$ def. $\quad \rho^\sigma : H_\sigma \to GL(W^\sigma)$

$$\rho^\sigma(h) = \rho(\sigma^{-1} h \sigma)$$

Teorema. $V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$ é irredutível.

$\iff$ os seguintes condições são satisfeitas.

1). W é irredutível

2). $\forall\, \sigma \in G \setminus H$ os dois representações ρ^σ e $\mathrm{Res}_\sigma(\rho)$ de H_σ são disjuntas.

$$\mathrm{Res}_\sigma(\rho): \quad \begin{tikzcd} H_\sigma \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Res}_\sigma(\rho)"] & H \arrow[r, "\rho"] & GL(W) \end{tikzcd}$$

$$H_\sigma \xrightarrow{\rho^\sigma} (W_\sigma)$$

$$V.$$

duas representações são disjuntas se não tem irred. em comum.

$(f, g)_H = 1 \iff V$ é irred

$f = \chi_W \qquad g = \chi_V.$

$$\mathrm{Res}_H V \simeq \bigoplus_{\sigma \in H \backslash G / H} \mathrm{Ind}_{H_\sigma}^H (\rho^\sigma)$$

$$(g,g)_G = \sum_{\sigma \in H\backslash G/H} (\mathrm{Res}_\sigma(\rho), \rho^\sigma)$$

$\underline{\sigma = 1}$:

$$\begin{tikzcd} H_\sigma = H \arrow[r] \arrow[r, bend left, "\rho^\sigma"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Res}_\sigma(\rho)"'] & GL(W) \end{tikzcd}$$

$\sigma = 1$ $\quad (\mathrm{Res}_\sigma(\rho), \rho^\sigma) = (\rho,\rho) = 1$.

V é irred. $\Longleftrightarrow$ $(\mathrm{Res}_\sigma(\rho), \rho^\sigma) = 0$ $\forall\, \sigma \neq 1$.

$$(\mathrm{Res}_\sigma(\rho), \rho^\sigma) = \dim \mathrm{Hom}_{H_\sigma}(\mathrm{Res}_\sigma(\rho), \rho^\sigma)$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Res}_\sigma(\rho)$ é disjunto ρ^σ.

$\square$

Prop. G grupo $N \triangleleft G$ normal.

$\rho: G \to GL(V)$ $\quad V \in G$-mod $\quad V$ irred.

$\Rightarrow$ 1) $\exists\, N \subset H \subsetneq G$ subgrupo t.q. ρ é induzido de uma representação de H.

ou 2). A representação ρ é $W^{\oplus k}$
com W irredutível (de N).

" $\underline{G} = GL(n), SL(n), SO(n), Sp(n)$ "

B = Triangulares superiores.

T = Diagonais.

$0 \to N \to B \twoheadrightarrow T \to 0$

$V = \oplus W_i$ soma de N-irred.

W_i é irredutível.

$\underline{\rho(a)}$ $a \in G$. permuta os W_i

porque o N é normal.

$W_1 = W_2 = \dots = W_k$

$W_1 \oplus \dots \oplus W_k \simeq W_1 \otimes k^k$

k^k escolhe uma base $\{e_i\}$ $i = 1, \dots, k$

$V = \oplus V_j$ $\qquad V_i = W_i^{\oplus k_i}$

V é irred e ação no conjunto de somandos é transitiva.

seja $V_{j} = W_i^{\oplus k_i}$

V_j não tem W_i dentro.

$V_j = V$ estou no segundo caso

supondo que $V_j \subsetneq V$.

$H \subsetneq G$ $\quad N \subset H = \{ a \in G \; \rho(a) V_j \subset V_j \}$.

$V_j \in H\text{-mod}$.

$\rho = \mathrm{Ind}_H^G V_j$

$N \subset G$ é Abeliano.

Caso 2). $V = W^{\oplus k}$. W irred.

$\dim W = 1$ $\quad \rho(a)$ $\quad a \in N$

age multiplo de identidade.

se $N \subset G$ é Abeliano normal

dim. de $V \in G\text{-mod}$.

divide $[G:N]$.

Pr. indução em $|G|$

se ~~estou~~ caso. 2) $V = W^{\oplus k}$

com $W \in N$-mod irred.

posso assumir V é fiel.

$G \rightsquigarrow \rho(G) \subset GL(V)$.

$N \subset G$ é Abeliano. então $\rho(e)$ agem multiplos da identidade em V.

$\Rightarrow \rho(e) \in \rho(G)$ está no centro

posso passar para um quociente

$\bar{\rho} : G/N \hookrightarrow GL(V)$.

$\Rightarrow \dim V$ divide $[\rho(G) : \rho(N)]$

$$\begin{array}{c} [\rho(G) : \rho(N)] \\ \parallel \\ [G : N] \end{array}$$

Caso 1. $V = \mathrm{Ind}_H^G W$

para algum subgrupo $H \subsetneq G$.

N^c

$|H| < |G|$ $W \in H$-mod

$[G:H] \dim W \mid [H:N] \cdot [G:H]$

$$\begin{array}{ccc} [G:H]\dim W & \mid & [H:N]\cdot[G:H] \\ \parallel & & \parallel \\ \dim V & \mid & [G:N] \end{array}$$

$\square$

seja $N, H \subset G$ dois subgrupos com $N \subset G$ normal Abeliano.

$G = H \rtimes N$ o produto semidirect.

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \underset{\pi}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} H \longrightarrow 0$$

conj ''

$$G = H \times N$$

$$(n, \sigma(h)) \cdot (n', \sigma(h')) = (n \cdot n', \varphi(n') (h \cdot h')).$$

$$\sigma(H) \cap i(N) = 1_G.$$

Toda rep. irred de G pode-se construir de subgrupos de H.

N é abeliano os reps irred. são de dim 1.

Caracteres são o grupo $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^*)$

o grupo G age em $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^*) \ni \chi$

porque N é normal $a \in G \supset H$

$$(a \cdot \chi)(b) = \chi(a^{-1} b a)$$

sejam $\{\chi_i\}_{i=1,2,\dots}$ $\underline{\mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^*)} / \underline{H}$

representantes dos órbitas de H
por aquela ação por conjugação.

$\forall i$ $\quad H_i \subset H$ os elementos $a \in H$

$$a \cdot \chi_i = \chi_i \qquad G_i = \underline{N} \cdot H_i \subset N \cdot H = G.$$

extendemos. χ_i de $H \to k^*$ extende
para todo G_i.

$$\chi_i(n \cdot a) = \chi_i(n)$$

$n \in N$, $a \in h_i$

lembrando $a \cdot \chi_i = \chi_i$

$\Rightarrow$ χ_i é uma representação de $G_i \subset G$
de dimensão 1.

ρ representação de H_i irredutível.

$$\begin{tikzcd} G_i = N \cdot H_i \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "\text{irredutível}"'] & H_i \arrow[r, "\rho"] & GL(V) \end{tikzcd}$$

$\underline{\underline{\chi_i}} \otimes \underline{V}$ é uma representação
irredutível de G_i

$N \cdot H = G$ $\quad$ χ_i: Caracteres de N.
$|$ $\quad$ representantes
Abeliano. $\quad$ da orbita de H.

$$H \supset H_i = \{ a \in H \quad a \cdot \chi_i = \chi_i \}.$$

ρ irred. de H_i $\qquad$ $G_i = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{H_i}} \subset G$

$\chi_i : G_i \to \mathbb{C}^*$ $\quad$ dim 1.

$\underline{\underline{\chi_i \otimes \rho}}$ irred de G_i

Seja. $\quad \Theta_{i,\rho} = \mathrm{Ind}_{G_i}^{G} \underline{\underline{\chi_i \otimes \rho}}$

<u>Teorema</u> $\Theta_{i,\rho}$ são todas as rep. irred de G. salvo isomorfismo.

$$\Theta_{i,\rho} \simeq \Theta_{j,\rho'} \Rightarrow i = j \quad \rho \simeq \rho'$$

Para ver que $\Theta_{i,\rho}$ é irredutível aplicamos diretamente o teorema de Mackey:

$a \in G \setminus G_i$ $\quad$ $K_a = \underline{G_i} \cap \underline{\underline{a G_i a^{-1}}}$

$\underline{\chi_i \otimes \rho}$ de G_i $\quad$ $K_a \subset G_i$

ou pelo mapa. $b \to a^{-1} b a$.

basta ver que a restrição de

outros. para $N \in K_Q$ são disjuntos.

$$G_i = \underline{N} \cdot \underline{H_i} \qquad \underset{=}{\chi_i} \otimes \underset{=}{\rho}$$

aparece um múltiplo de $\underset{=}{\chi_i}$ como representação de N.

$$\chi_i(a \cdot \cdot a^{-1}) = a \cdot \underline{\underline{\chi_i}} \neq \chi_i$$

restringindo via a conjugação por $a \notin G_i$ obtendo $\chi_j \neq \chi_i$

$\Rightarrow \Theta_{i,\rho}$ são irredutíveis.

Vamos provar toda irred. de G é dessa forma.

$V \in G\text{-mod}$ irred.

$V = \bigoplus W_i \qquad W_i \in N\text{-mod}$ irred

$a \in G. \qquad a W_i = W_j \quad i \neq j.$

$H_i \cdot W_{\chi_i} = W_{\chi_i}$

Z_i sub. H_i-módulo de W_{χ_i} irredutível

seja ρ a rep. corresp. de H_i

$$\rho : H_i \longrightarrow GL(Z_i).$$

$G_i = N \cdot H_i \qquad N \subset G_i \subsetneq G$

$\chi_i \otimes \rho \subset \underline{V}$

Claim. V è induzione per $\chi_i \otimes \rho$.

$\Rightarrow \Theta_{i,\rho} \simeq V$

V ten una copia di essa $\underline{\chi_i \otimes \rho}$ dentro.

$\left(\mathrm{Ind}_{G_i}^{G} \chi_i \otimes \rho\right) = \Theta_{i,\rho} \subset V$ ✓

$V \in G\text{-mod}$ $\quad$ $\underline{V\text{ - irred.}}$

$\cup \qquad\qquad \Uparrow ?$

$\underline{\chi_i} \otimes \rho \in G_i\text{-mod} \qquad \underline{\Theta_{i,\rho}} = \mathrm{Ind}\, \chi_i \otimes \rho$ ✓

irred.

$\Theta_{i,\rho} \simeq \Theta_{j,\rho'} \Rightarrow i = j \quad \rho \simeq \rho'$