O TEOREMA DE RAMSEY

Carlos Gustavo T. de A. Moreira - IMPA

♦ Nível Avançado

1. O teorema de Ramsey para grafos.

Vamos começar este artigo lembrando do exemplo 6 do artigo "O Princípio das Gavetas", de Paulo Cezar Pinto Carvalho, publicado na EUREKA! No. 5: se há 6 pessoas numa reunião então há necessariamente 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente na reunião (onde admitimos que, se a conhece b, então b conhece a). Este exemplo equivale ao seguinte: se tomamos 6 pontos, e pintamos cada segmento que une dois desses pontos de preto ou vermelho então necessariamente existe um triângulo cujos vértices são três desses pontos e cujos 3 lados são da mesma cor.

Nos exercícios 8 e 9 do mesmo artigo é proposta uma generalização:

Proposição 0: Dados os inteiros $a, b \geq 2$ sempre existe um número N inteiro positivo tal que, em qualquer conjunto de N pessoas, sempre existem a pessoas que se conhecem mutuamente ou b pessoas que se desconhecem mutuamente. Em homenagem a *F. P. Ramsey*, que provou este e outros resultados deste artigo, chamamos o menor número N com esta propriedade de $R(a, b)$.

Vamos provar este resultado seguindo os passos propostos do problema 9 do artigo do Prof. Paulo Cezar:

i) $R(a, 2) = a$ para todo $a \geq 2$.
De fato, num conjunto de a pessoas, ou todas se conhecem ou existem duas que se desconhecem.

ii) $R(a, b) = R(b, a)$.
De fato, conhecer e desconhecer desempenham um papel simétrico no enunciado.

iii) $R(a,b) \leq R(a-1,b) + R(a,b-1)$, para $a,b \geq 3$.

Para provar isto, fixemos uma pessoa P. Se temos $R(a-1,b) + R(a,b-1)$ ou mais pessoas na reunião, há pelo menos $R(a-1,b) + R(a,b-1) - 1$ outras pessoas, e um dos seguintes casos se verificará:

1) P conhece pelo menos $R(a-1,b)$ pessoas.

Neste caso, por definição de $R(a-1,b)$, dentre essas $R(a-1,b)$ pessoas há b que se desconhecem mutuamente (e não temos mais o que provar), ou a – 1 que se conhecem mutuamente, e, juntando P a essas a – 1 pessoas, obtemos a pessoas que se conhecem mutuamente.

2) P desconhece pelo menos $R(a,b-1)$ pessoas.

A análise deste caso é análoga à do caso anterior, trocando os papeis de conhecer e desconhecer no argumento ❑

Já mencionamos que podemos enunciar resultados deste tipo em termos de colorações de segmentos (ou mais tecnicamente, de arestas de grafos completos) usando duas cores. O resultado acima pode ser generalizado aumentando o número de cores:

Proposição 1: Dados inteiros $k \geq 1, a_1, a_2, ... a_k \geq 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que dados n pontos, se pintarmos cada segmento que une dois desses pontos de uma dentre k cores possíveis então haverá a_1 pontos tais que todo segmento que une dois desses pontos é da primeira cor, ou a_2 pontos tais que todos os segmentos que unem dois desses pontos são da segunda cor, ou… ou a_k pontos tais que todos os segmentos que unem dois desses pontos são da k-ésima cor. Chamamos de $R(a_1, a_2, ... a_k)$ o menor número com essa propriedade.

Demonstração: Esta proposição pode ser provada de modo análogo à anterior. A existência dos números $R(a_1, ... a_k)$ segue dos seguintes fatos, cuja prova deixamos como exercício:

i) $R(a_1, ... a_{k-1}, 2) = R(a_1, ... a_{k-1})$ para $a_1, ... a_{k-1} \geq 2$.

ii) $R(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ... a_{\sigma(k)}) = R(a_1, a_2, ... a_k)$ para $a_1, ... a_k \geq 2$ e qualquer permutação σ de {1, 2, …, k}.

iii) $$R(a_1, ... a_k) \leq R(a_1 - 1, a_2, ..., a_k) + R(a_1, a_2 - 1, a_3, ..., a_k) + ... +$$
$$+ R(a_1, a_2, ... a_{k-1}, a_k - 1) - k + 2.$$

2. Estimativas de números de Ramsey.

As demonstrações dos resultados anteriores fornecem estimativas superiores para os números de Ramsey $R(a,b)$ e $R(a_1,...a_k)$, por exemplo:

i) $R(a,b) \le C_{a+b-2}^{a-1} = \dfrac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!}$, para $a,b \ge 2$

De fato vale a igualdade para $b = 2$ (temos os dois lados iguais a a), e se $a, b > 2$ temos, por indução,

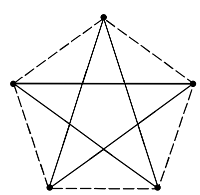
$R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1) \le C_{a+b-3}^{a-2} + C_{a+b-3}^{a-1} = C_{a+b-2}^{a-1}$ ❑

ii) $R(a_1,...,a_k) \le \dfrac{(a_1 + ... + a_k - 2k + 2)!}{(a_1-1)!(a_2-1)!(a_3-2)!(a_4-2)!...(a_k-2)!} =: C_{a_1+...+a_k-2k+2}^{a_1-1,a_2-1,a_3-2,...a_k-2}$

De fato, isso vale quando todos os a_i exceto dois são iguais a 2, e o caso geral segue, por indução da identidade

$C_{b_1+b_2+...+b_k}^{b_1,...,b_k} = C_{b_1+...+b_k-1}^{b_1-1,b_2,...,b_k} + C_{b_1+...+b_k-1}^{b_1,b_2-1,...,b_k} + ... + C_{b_1+...+b_k-1}^{b_1,...,b_{k-1},b_k-1}$ ❑

É menos trivial, entretanto, dar boas estimativas inferiores para números de Ramsey. Para provar, por exemplo, que $R(3,3) = 6$, é necessário mostrar que há exemplos de grafos completos bicoloridos de 5 vértices sem triângulos monocromáticos, o que pode ser feito explicitamente:



Se o número de pontos, cresce, entretanto, é bastante difícil construir exemplos explícitos. As melhores estimativas conhecidas para $R(k, k)$ se devem ao método probabilistico introduzido pelo grande matemático húngaro Pál Erdös, que se tornou uma das técnicas mais poderosas da teoria dos grafos:

Proposição 2: $R(k, k) > 2^{k/2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Dados n pontos, pintamos aleatoriamente as arestas que ligam dois desses pontos de vermelho ou preto, com probabilidade 1/2. Dado um subconjunto de k desses pontos, a probabilidade de que todas as $\dfrac{k(k-1)}{2}$ arestas que unem dois desses pontos sejam da mesma cor

é $2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2}$.

Como há $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ subconjuntos de k pontos do conjunto inicial de n pontos, a probabilidade de que em algum deles todas as arestas sejam da mesma cor é no máximo $2C_n^k \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2} \le 2\dfrac{n^k}{k!} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2}$ que é menor ou igual a $\dfrac{2}{k!}^{k/2+1}$ se $n \le 2^{k/2}$, mas $2^{k/2+1} < k!$ para $k \ge 4$, donde há probabilidade positiva de que em nenhum subconjunto de k pontos todas as arestas sejam da mesma cor, e em particular há exemplos desta situação, donde $R(k, k)$ é necessariamente maior que $2^{k/2}$ para $k \ge 4$.

Para $k = 3$, $R(k, k) = 6 > 2^{3/2}$, e para $k = 2$, $R(k, k) = 2 > 2^{1/2}$, o que conclui a demonstração ❑

Vamos discutir agora como estimar a função $f(n) = R(3,3,...,3)$, com n termos iguais a 3, ou seja, o menor número de vértices de um grafo completo tal que ao pintarmos suas arestas usando n cores necessariamente obtemos um triângulo monocromático.

A demonstração da proposição 1 nos fornece $f(n) \le nf(n-1) - n + 2$, o que implica, por exemplo, $f(n) \le 3n!$ para todo $n \ge 2$. (lembremos que $f(3) = R(3,3) = 6$).

Suponha agora que sejam dados $\dfrac{3^n+1}{2}$ pontos, aos quais atribuímos índices 0, 1, 2, … $\dfrac{3^n-1}{2}$. Vamos descrever uma forma de, a cada par desses pontos, atribuir um número entre 0 e $n-1$ (o que equivale a colorir as arestas do grafo completo de $\dfrac{3^n+1}{2}$ vértices usando n cores), sem que haja 3 pontos tais que a cada par desses pontos é atribuido o mesmo número (ou seja, sem que haja triângulos monocromáticos).

Ao par de pontos de índices i e j atribuímos um número da seguinte maneira: escrevemos $|i-j|$ como $\sum_{r=0}^{n-1} \sigma_r \cdot 3^r$ onde $\sigma_r \in \{-1,0,1\}$ para todo r, e atribuimos a $\{i, j\}$ o menor k com $\sigma_k = 1$ (sempre existe um tal k pois $|i-j| > 0$).

Deixamos como exercício para o leitor verificar que não há triângulos monocromáticos nesta configuração (ver problema proposto N°. 32 pág 55).

Obtemos assim a estimativa $f(n) > \dfrac{3^n+1}{2}$.

Determinar exatamente os valores de números de Ramsey clássicos $R(a, b)$ é ,em geral,um problema computacionalmente muito difícil.
Os unicos valores de $R(a, b)$ com $3 \le a \le b$ que são conhecidos são: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(3, 8) = 28$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$, e $R(4, 5) = 25$.
O único número Ramsey com mais de duas cores cujo valor é conhecido é $R(3, 3, 3) = 17$.

3. O Teorema de Ramsey para multigrafos:

Até agora estivemos falando sobre colorações de arestas de grafos, ou seja, a cada conjunto de dois vértices associamos uma cor. Uma maneira de generalizar este resultado é associar cores não a pares de vértices, mas a conjuntos de m vértices, onde m é um inteiro positivo fixo (que pode ser maior que 2). Como as configurações que aparecem são um pouco mais complicadas, vamos introduzir notações um pouco mais formais:

Dado um conjunto A e um inteiro positivo k denotamos por $[A]^m$ o conjunto dos subconjuntos de m elementos de A, ou seja $[A]^m = \{B \subset A | \# B = k\}$.

Dado j inteiro positivo, definimos $I_j = \{1, 2, \ldots, j\}$.

A versão m-dimensional (ou para m-hipergrafos) do teorema de Ramsey é dada pelo seguinte teorema (do qual os resultados da seção 1 são casos particulares):

Teorema (Ramsey): Sejam m, k inteiros positivos. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k$ inteiros positivos existe um inteiro positivo, que denotaremos por $R_m(a_1,...,a_k)$ tal que para todo $n \ge R_m(a_1,...,a_k)$ e para qualquer função $f : [I_n]^m \to I_k$ existem $j \in I_k$ e $A \subset I_n$ com $\# A = a_j$ tal que $f([A]^m) := \{f(x), x \in [A]^m\} \subseteq \{j\}$.

Demonstração: Para $m = 1$ o resultado é uma aplicação simples, do princípio das gavetas: basta tomar $R_1(a_1,...,a_k) = a_1 + ... + a_k - k + 1.$ Vamos provar o resultado geral por indução em m. De fato, provaremos que podemos tomar

$$R_m(a_1,...,a_k) \le 1 + R_{m-1}(R_m(a_1 - 1,...,a_k),\ R_m(a_1, a_2 - 1...,a_k),...,R_m(a_1, a_2,..a_k - 1))$$

(e se algum dos a_i é menor que m podemos tomar $R_m(a_1,...,a_k) = \min\{a_1, a_2,..., a_k\}$). Note que isto fornece exatamente a recursão de proposição 1 da seção 1 no caso $m = 2$.

Se $n \geq 1 + R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, a_2, ..., a_k), ..., R_m(a_1, a_2, ... a_k - 1))$, dada uma função $f : [I_n]^m \to I_k$, definimos uma função $\tilde{f} : [I_{n-1}]^{m-1} \to I_k$ da seguinte forma: dado $A \in [I_{n-1}]^{m-1}$, definimos $\tilde{f}(A) := f(A \cup \{n\})$.

Como $n - 1 \geq R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, ..., a_k), ..., R_m(a_1, ... a_k - 1))$, existem $j \in I_k$ e $B \subset I_{n-1}$ com $\# B = R_m(a_1, ..., a_j - 1, ..., a_k)$ tal que $\tilde{f}([B]^{m-1}) = \{j\}$. Agora, por definição de $R_m(a_1, ..., a_j - 1, ..., a_k)$ existe $i \in I_k$ com $i \neq j$ e $A \subset B$ com $\# A = a_i$ e $f([A]^m) = \{i\}$, caso em que já conseguimos o que queríamos, ou existe $A \subset B$ com $\# A = a_j - 1$ e $f([A]^m) = \{j\}$. Nesse caso, teremos $\#(A \cup \{n\}) = a_j$ e $f([A \cup \{n\}]^m) = \{j\}$, pois $A \subset B$, e novamente conseguimos nosso objetivo .

Obs.: O único número de Ramsey cujo valor é conhecido com $m > 2\,(e\ a_j > m, \forall\ j)$ é $R_3(4,4) = 13$.

O exercício 20 de [PC] pede para mostrar que dados 5 pontos no plano em posição geral há 4 que formam um quadrilátero convexo. O leitor poderia perguntar: o que faz um problema geométrico como este num artigo de combinatória? A resposta está ligada a uma generalização deste resultado, descoberta por Erdös e Szekeres:

Dado um inteiro positivo $n \geq 4$ existe um inteiro positivo $f(n)$ tal que dados $f(n)$ pontos no plano em posição geral há n deles que são vértices de um n-ágono convexo.

Para provar isso, mostraremos que podemos tomar $f(n) = R_4(n,5)$. Para isso, dados $R_4(n,5)$ pontos no plano, e um conjunto de 4 desses pontos, associamos a esse conjunto o número 1 se eles formam um quadrilátero convexo, e 2 em caso contrário.Não é possível que haja 5 pontos tais que a cada 4 deles é associado o número 2, pelo resultado do exercício 20 de [PC], donde, por definição de $R_4(n,5)$, necessariamente há n desses pontos tais que cada 4 desses pontos formam um quadrilátero convexo, mas isso implica que esses n pontos são vértices de um n-ágono convexo.

5. O teorema de Ramsey infinito:

Teorema: Sejam m, k inteiros positivos e A um conjunto infinito.
Para qualquer função f: $[A]^m \to I_k$ existem $j \in I_k$ e um conjunto infinito $B \subset A$ tal que $f([B]^m) = \{f(x) \mid x \in [B]^m\} = \{j\}$

Demonstração: Vamos provar o resultado por indução em m. Para $m = 1$ o resultado segue do fato de que se X é infinito e C é finito então para toda função $f := X \to C$ existe $C \in C$ tal que $f^{-1}(c) = \{x \in X \mid f(x) = c\}$ é infinito.

Seja agora $m \geq 2$ e $f : [A]^m \to I_k$, onde A é infinito.Fixamos $x_o \in A$, e definimos $A_o = A \setminus \{x_o\}$ e $g : [A_o]^{m-1} \to I_k$ por $g(C) := f(C \cup \{x_o\})$, onde C é um subconjunto de $m-1$ elementos de A_o. Pela hipótese de indução existe um conjunto infinito $B_o \subset A_o$ e $j_o \in I_k$ tal que $g_o([B_o]^{m-1}) = \{j_o\}$. A partir daí repetimos o processo recursivamente: dado $n \geq 0$ fixamos $x_{n+1} \in B_n$ e definimos $A_{n+1} = B_n \setminus \{x_{n+1}\}$ e $g_{n+1} = [A_{n+1}]^{m-1} \to I_k$ por $g_{n+1}(C) = f(C \cup \{x_{n+1}\})$ para $C \subset A_{n+1}$ com $m-1$ elementos. Pela hipótese de indução existe $B_{n+1} \subset A_{n+1}$ infinito e $j_{n+1} \in I_k$ tal que $g([B_{n+1}]^{m-1}) = \{j_{n+1}\}$.

Podemos agora tomar $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, que é um conjunto infinito e definir $h : D \to I_k$ por $h(x_r) = j_r$. Como I_k é finito, existe $j \in I_k$ tal que $h^{-1}(j) = \{x \in D \mid h(x) = j\}$ é infinito. Afirmamos que $B = h^{-1}(j)$ satisfaz a condição do enunciado. De fato, dado um subconjunto $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, .., x_{i_m}\}$ de B com m elementos, temos $f(X) = g_{i_1}(\{x_{i_2}, ..., x_{i_m}\}) = j_{i_1} = h(x_{i_1}) = j$ ❑

Sugestão: Tente usar os resultados deste artigo para resolver o problema "Cuático"da Eureka! Nº5. Pág. 58:

Problema "Cuático"

Prove que para qualquer conjunto de inteiros positivos A e para todo inteiro positivo k existe um conjunto infinito de números primos S tal que o produto de k elementos distintos de S está sempre em A ou o produto de k elementos distintos de S nunca pertence a A.

Referências:

-[R]- Ramsey, F.P., On a Problem of Formal Logic, Proc. London Math. Soc. 30 (1930) P P. 264-286.

-[PC]- Paulo Cezar Pinto Carvalho, Princípio das Gavetas – Eureka! 5 PP.27-33.

-[GRS]- R.L. Graham, , B.L. Rothschild, e J.H. Spencer, Ramsey Theory. Wiley. Interscience, 1990.

-[ES]- Erdös e G. Szekeres – A Combinatorial Problem in Geometry – Compositio Math.2 (1935), PP-464-470.

-[Rad]- Stanislaw P. Radziszowski – "Smal "Ramsey Numbers – Dinamic Surveys-Electronic Journal of Combinatorics. http://www.combinatorics.org

-[Er]- Pál Erdös, Some Remarks on The Theory Of Graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), PP.292-294.