NÚMEROS MÁGICOS E CONTAS DE DIVIDIR

Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

♦ Nível Iniciante.

Temas muito inocentes de aritmética básica, como contas de multiplicar, podem gerar resultados bastante interessantes e surprendentes, como ao multiplicar o número 142857 por 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

$142857 \times 2 = 285714$
$142857 \times 3 = 428571$
$142857 \times 4 = 571428$
$142857 \times 5 = 714285$
$142857 \times 6 = 857142$

Por que razão acontece essa repetição dos dígitos de 142857 ao multiplicá-lo por 2, 3, 4, 5 e 6, sempre com a mesma ordem circular? Será mera coincidência? Será possível obter outros exemplos desse tipo?

A resposta tem a ver com o resultado de 142857 × 7, que é 999999. Isso quer dizer que o período da representação decimal de 1/7 é exatamente 142857. Vamos examinar com cuidado a conta de divisão de 1 por 7:

```
10       |_7______
 30        0,142857
  20
   60
    40
     50
      1
```

repetindo o resto 1, o que quer dizer que todo o processo se repete e o resultado da divisão é

$1/7 = 0,142857142857142857\ldots$

Podemos reescrever o processo assim:

$1 = 0 \times 7 + 1$
$10 = 1 \times 7 + 3$
$30 = 4 \times 7 + 2$
$20 = 2 \times 7 + 6$
$60 = 8 \times 7 + 4$
$40 = 5 \times 7 + 5$

$50 = 7 \times 7 + 1$. Daí temos:

$10 - 7 \times 1 = 3$, e portanto $100 - 7 \times 10 = 30$, e como $30 - 7 \times 4 = 2$ temos:

$100 - 7\,(10 + 4) = 2$, e analogamente obtemos:

$1000 - 7\,(100 + 40 + 2) = 6$

$10000 - 7\,(1000 + 400 + 20 + 8) = 4$

$100000 - 7\,(10000 + 4000 + 200 + 80 + 5) = 5$

$1000000 - 7\,(100000 + 40000 + 2000 + 800 + 50 + 7) = 1$

(A última igualdade diz que $142857 \times 7 = 999999$)

Desta forma, os restos sucessivos que aparecem na divisão de 1 por 7, que são 3, 2, 6, 4, 5, 1 são, respectivamente, os restos na divisão por 7 de 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000. Estes restos assumem todos os valores possíveis entre 1 e 6 e isso equivale ao fato de o período de 1/7 ter 6 casas. Desta forma, temos:

$2 \times 0{,}142857142857142857\ldots = 2/7 = 100/7 - 14 = 100 \times 0{,}14285714\,2857142857\ldots - 14 = 0{,}285714285714285714\ldots$, e, portanto, temos $2 \times 142857 = 285714$

Da mesma maneira temos que $3/7 = 10/7 - 1$ implica $3 \times 142857 = 428571$, e as outras igualdades seguem de modo análogo.

Notemos agora que sempre que o período da representação decimal de 1/n tiver $n - 1$ casas decimais (que é o máximo possível), o período (que será igual a $(10^{n-1} - 1) / n$) terá as mesmas propiedades de 142857. O primeiro valor de n maior que 7 para o qual isso acontece é 17, e o período de 1/17 é 0588235294117647. Multiplique esse número por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 para conferir.

Observe que, para que isso aconteça, n deve ser um número primo, pois se $n = p \times b$, com b maior que 1 e p um número primo diferente de 2 e 5, então p nunca aparecerá como resto na divisão de 1 por n, pois em geral um fator primo comum de n e de um resto que aparece na divisão de 1 por n só pode ser 2 ou 5 (de fato, um resto que aparece na divisão de 1 por n é resto da divisão de alguma potência de 10 por n). Por outro lado, se os únicos fatores primos de n são 2 e 5, então $1/n$ tem representação decimal finita.

Conclusão: Se o período de $1/n$ tiver $n–1$ casas decimais, ele terá propiedades análogas às de 142857: os dígitos de seus produtos por 1, 2, 3, 4, …, $n–1$ serão sempre os mesmos, na mesma ordem circular. Para que isso aconteça, n deve ser primo e a menor potência de 10 que deixa resto 1 quando dividida por n deve ser 10^{n-1}. Dizemos que, nesse caso, 10 é raiz primitiva módulo n. Não se sabe se existem infinitos primos n com essa propriedade. Isso seguiria de uma famosa conjectura de teoria dos números, a conjectura de Artin (vide [V]).

Os números primos n menores que 100 tais que o período de $1/n$ na base 10 tem $n–1$ casas são 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61 e 97.

Por outro lado, para todo número primo n existem números naturais B entre 2 e $n – 1$ tais que o período de $1/n$ na base B tem exatamente $n – 1$ casas (nesses casos B é raiz primitiva módulo n). Se um número B tem essa propriedade, todas as bases da forma $kn + B$ com k natural também têm. Nesses casos, o período de $1/n$ na base B (ou seja, o número $(B^{n-1}–1)/n$), quando multiplicado por 1, 2, 3, …, $n – 1$ terá representações na base B que serão permutações uma da outra com a mesma ordem circular.

Por exemplo, com $n = 5$ e $B = 8$, temos que a representação de 1/5 na base 8 é 0,146314631463… Na base 8 temos:
$2 \times (1463)_8 = (3146)_8$, $3 \times (1463)_8 = (4631)_8$,
$4 \times (1463)_8 = (6314)_8$, $5 \times (1463)_8 = (7777)_8$

Referências: [L] Lima, Elon L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, pp. 158-170 – SBM,1991.
[T] Tahan, Malba, *O homem que calculava*, Ed. Record.
[V] Voloch, José Felipe, *Raizes Primitivas e a Conjectura de Artin*, Revista Matemática Universitária Nº9/10, dezembro de 1989, pp. 153-158.