Propriedades estatísticas de frações contínuas e aproximações diofantinas: O Teorema de Khintchine

Carlos Gustavo Moreira

IMPA

Estrada Dona Castorina 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro-RJ

e-mail: gugu@impa.br

Introdução: O problema básico da teoria de aproximações diofantinas é o de estudar boas aproximações de números reais por números racionais. Uma extensão natural desse problema é o estudo de aproximações simultâneas de n números reais por números racionais com o mesmo denominador.

Dado um número irracional α, um resultado clássico de Dirichlet afirma que existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$ tais que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ (a prova não é difícil: dado $N \in \mathbb{N}$, consideramos os $N+1$ elementos de $[0,1)$ da forma $j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor$, com $0 \le j \le N$. Como $[0,1) = \bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$, existem dois desses elementos, digamos $j_1\alpha - \lfloor j_1\alpha \rfloor$ e $j_2\alpha - \lfloor j_2\alpha \rfloor$ num mesmo intervalo $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$, e portanto, se $j_1 < j_2$, $q = j_2 - j_1$ e $p = \lfloor j_2\alpha \rfloor - \lfloor j_1\alpha \rfloor$, temos $0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{N} \Rightarrow |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN} \le \frac{1}{q^2}$). Hurwitz e Markov provaram que de fato $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, para todo irracional α, e que $\sqrt{5}$ é a maior constante com essa propriedade. Markov ([Ma]) provou que, para todo $c < 3$, o conjunto dos $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{cq^2}$ tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é enumerável, mas o conjunto dos $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{3q^2}$ tem apenas um número finito de soluções tem o mesmo cardinal que $\mathbb{R}$.

Neste artigo, vamos estudar desigualdades do tipo

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{f(q)}{q}, \tag{1}$$

onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ é uma função decrescente, do ponto de vista da teoria da medida. Vamos provar o teorema de Khintchine, segundo o qual, se $\sum_{q=1}^{\infty} f(q) = +\infty$ então (1) tem infinitas soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$, mas se $\sum_{q=1}^{\infty} f(q) < +\infty$ então (1) tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Note que do ponto de vista topológico a situação é diferente: qualquer que seja a função positiva f, (1) tem infinitas soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ para $\alpha \in R_f$, onde R_f é um conjunto residual, i.e. contém (de fato é) uma interseção enumerável de abertos densos.

A principal técnica usada para estudar aproximações de números reais por números racionais são as frações contínuas, que fornecem todas as boas aproximações de um irracional α por racionais. As definições e provas dos resultados a seguir sobre frações contínuas podem ser encontradas em [Mo].

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $\alpha_0 = \alpha$, $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ e, se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $p_n \in \mathbb{Z}$ e $q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre si tais que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Temos

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \le \frac{1}{q_n^2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

As seqüências p_n e q_n satisfazem $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, $\forall\, n \ge 0$. Se $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{2q_n^2}$ ou $|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$.

Temos

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n, \;\; q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \text{ e } \alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}, \;\; \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A prova que apresentaremos na Seção 1, baseada no estudo de propriedades estatísticas de frações contínuas, é inspirada em conversas que tive há uns 9 anos com o Prof. Nicolau Corção Saldanha sobre o tema.

O problema básico de aproximações simultâneas é o seguinte: dado $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ queremos encontrar números racionais $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}$ tais que $|\alpha_j - \frac{p_j}{q}|$ seja pequeno para todo $j \le n$. Em geral sempre é possível encontrar racionais tais que $|\alpha_j - \frac{p_j}{q}| < \frac{1}{q^{1+1/n}}$, o que estende o teorema de Dirichlet e pode ser provado de modo análogo: dado $N \in \mathbb{N}$ consideramos os $N^n + 1$ pontos

$$p_j = (\alpha_1 j - \lfloor \alpha_1 j \rfloor, \alpha_2 j - \lfloor \alpha_2 j \rfloor, \ldots, \alpha_n j - \lfloor \alpha_n j \rfloor), \quad 0 \le j \le N^n$$

no hipercubo $[0,1)^n$. Dividimos $[0,1)^n$ como $\left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)\right)^n$ em N^n cubos de lado $\frac{1}{N}$. Haverá necessariamente dois pontos p_{j_1} e p_{j_2} num mesmo cubo dessa decomposição, e, se $j_1 < j_2$, $q = j_2 - j_1$, $p_j = \lfloor j_2\alpha_j \rfloor - \lfloor j_1\alpha_j \rfloor$, teremos $|\alpha_j - \frac{p_j}{q_j}| < \frac{1}{Nq_j} \le \frac{1}{q_j^{1+1/n}}$, para todo $j \le n$.

Infelizmente não há um substituto satisfatório para a teoria de frações contínuas em dimensão maior que um, mas é possível provar uma versão n-dimensional do Teorema de Khinchine (provada originalmente em [K]), o que faremos na Seção 2.

Para maiores informações sobre aproximações diofantinas, veja [C1] e [S].

Seção 1: O Teorema de Khintchine via frações contínuas

Teorema (Khintchine): *Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ uma função decrescente tal que $h(n) = nf(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ também seja decrescente.*

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$ então a equação $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{f(q)}{q}$ tem apenas um número finito de soluções racionais p/q, para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$ então a equação $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{f(q)}{q}$ tem um número infinito de soluções racionais p/q, para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Observação: A condição de $nf(n)$ ser decrescente não é de fato necessária, como veremos na seção 2, mas simplifica a prova. Por outro lado, não podemos retirar a hipótese de f ser decrescente (veja [C2]).

Demonstração:

Lema 1: *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja $[0, a_1, a_2, \dots]$ a fração contínua de um número $\alpha \in [0,1]$. A probabilidade de um termo a_{n+1} ser igual a k dado que $a_1 = k_1$, $a_2 = k_2, \dots, a_n = k_n$ está entre $1/(k+1)(k+2)$ e $2/k(k+1)$, $\forall\ k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$.*

Prova: Sejam $p_{n-1}/q_{n-1} = [0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ e $p_n/q_n = [0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$. Se $\alpha \in [0,1]$, $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$, $\alpha_{n+1} \in [1, +\infty)$ então $\alpha \in \left[\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right)$, e, se além disso $a_{n+1} = k$, temos $\alpha \in \left[\frac{kp_n+p_{n-1}}{kq_n+q_{n-1}}, \frac{(k+1)p_n+p_{n-1}}{(k+1)q_n+q_{n-1}}\right]$, e valem as recíprocas (as ordens dos extremos dos intervalos podem estar trocadas). Os comprimentos dos referidos intervalos são, respectivamente, $\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}$ e $\frac{1}{(kq_n+q_{n-1})((k+1)q_n+q_{n-1})}$ (pois $|p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n|=1$), e portanto a razão entre seus comprimentos é $\frac{q_n(q_n+q_{n-1})}{(kq_n+q_{n-1})((k+1)q_n+q_{n-1})}=\frac{1+\beta}{(k+\beta)(k+1+\beta)}$, onde $\beta=q_{n-1}/q_n\in[0,1]$. Portanto, a razão pertence a $[1/(k+1)(k+2),2/k(k+1)]$. $\square$

Corolário: A probabilidade de $a_{n+1}\geq k$, nos termos do Lema acima, pertence a $[1/(k+1),2/k]$.

Lema 2: *Para quase todo* $\alpha\in\mathbb{R}$ *existe* $c\in\mathbb{R}$ *tal que* $q_n\leq c^n$, *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

Antes de provar o Lema 2 vamos mostrar como termina a prova do Teorema de Khintchine. Suponhamos que $\Sigma f(n)<\infty$. Seja $\gamma=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se a aproximação p_n/q_n de α é tal que $|\alpha-\frac{p_n}{q_n}|<\frac{f(q_n)}{q_n}$ então $a_{n+1}+2>\frac{1}{q_nf(q_n)}>\frac{1}{\gamma^{n-1}f(\gamma^{n-1})}$ (pois para todo $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vale $q_n>\gamma^{n-1}$, $\forall\,n\in\mathbb{N}$). $\Rightarrow a_{n+1}>\frac{1}{\gamma^{n-1}f(\gamma^{n+1})}-2$. A probabilidade de $a_{n+1}\leq\frac{1}{\gamma^{n-1}f(\gamma^{n-1})}-2=:A(n)$ é pelo menos $1-\frac{2}{A(n)}$, $\forall\,n\in\mathbb{N}$ (pelo corolário do Lema 1), e a hipótese de $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)<\infty$ implica que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{A(n)}<\infty$, por comparação com

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^kf(\gamma^k)<\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma^{k+1}-\gamma^k)f(\gamma^{k+1})<\sum_{n=1}^{\infty}f(n)<+\infty.$$

Temos portanto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{2}{A(n)})>0\Rightarrow$ para cada $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\prod_{n=n_0}^{\infty}(1-\frac{2}{A_n})>1-\varepsilon$, donde com probabilidade total $a_{n+1}\leq A(n)$ para todo n suficientemente grande $\Rightarrow|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{f(q)}{q}$ tem apenas um número finito de soluções.

Suponhamos agora que $\Sigma f(n)=+\infty$, fixemos $c>0$ e vamos nos restringir ao conjunto X_c dos $\alpha\in[0,1]$ tais que $q_n<c^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (a união dos conjuntos X_c para todo $c\in\mathbb{N}$ tem probabilidade total em $[0,1]$, pelo Lema 2).

Se $a_{n+1} > \frac{1}{q_n f(q_n)}$ teremos $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{f(q_n)}{q_n}$. Como $q_n < c^n$, $\frac{1}{q_n f(q_n)} < \frac{1}{c^n f(c^n)}$. Vamos mostrar que com probabilidade total temos $a_{n+1} \geq \frac{1}{c^n f(c^n)}$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$. Isso segue de $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{B(n)+1}\right) = 0$, onde $B(n) = \frac{1}{c^n f(c^n)}$, que por sua vez segue de $\sum_{n=1}^{\infty} c^n f(c^n) \geq c^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (c^{n+1} - c^n) f(c^n) = +\infty$. Portanto, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ temos $\prod_{n=n_0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{B(n)+1}\right) = 0$, e, com probabilidade total, existe $n \geq n_0$ com $a_{n+1} \geq \frac{1}{c^n f(c^n)}$, donde a equação $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{f(q_n)}{q_n}$ é satisfeita com probabilidade total para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Prova do Lema 2: Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. A probabilidade de que k apareça pelo menos $4n/k(k+1)$ vezes entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é limitada por $\sum_{j=sn}^{n} C_n^j (\frac{s}{2})^j (1 - \frac{s}{2})^{n-j}$, onde $s = \frac{4}{k(k+1)}$, que é menor que $(\frac{3}{4})^{\frac{n}{k(k+1)}}$ para $\frac{n}{k(k+1)}$ grande (de fato, $\frac{C_n^{j+1}(\frac{s}{2})^{j+1}(1-\frac{s}{2})^{n-j-1}}{C_n^j(\frac{s}{2})^j(1-\frac{s}{2})^{n-j}} = \frac{n-j}{j+1} \cdot \frac{s}{2-s} < \frac{4-3s}{3s} \cdot \frac{s}{2-s} = \frac{4-3s}{6-3s} < \frac{2}{3}$, se $j \geq \frac{3sn}{4}$, logo, como $\sum_{j=0}^{n} C_n^j (\frac{s}{2})^j (1-\frac{s}{2})^{n-j} = 1$, para $j = \frac{3sn}{4}$, $C_n^j (\frac{s}{2})^j (1-\frac{s}{2})^{n-j} \leq 1$, donde $C_n^{sn} (\frac{s}{2})^{sn} (1 - \frac{s}{2})^{(1-s)n} \leq (\frac{2}{3})^{sn/4}$ e $\sum_{j=sn}^{n} C_n^j (\frac{s}{2})^j (1 - \frac{s}{2})^{n-j} \leq (\frac{2}{3})^{sn/4} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^k = 3(\frac{2}{3})^{sn/4} = 3(\frac{2}{3})^{n/k(k+1)} < (\frac{3}{4})^{n/k(k+1)}$, se $n/k(k+1)$ é suficientemente grande). A probabilidade disso acontecer pra algum $k < [\sqrt[3]{n}]$ é no máximo $\sqrt[3]{n} \cdot (\frac{3}{4})^{\sqrt[3]{n}}$, que converge a zero quando $n \to +\infty$. Por outro lado, com probabilidade total, $a_n < n^2$ para todo n suficientemente grande $\Rightarrow q_n < \prod_{k=1}^{n} (a_k + 1) < \left(\prod_{r=1}^{\sqrt[3]{n}} (r+1)^{\frac{4n}{r(r+1)}}\right) \cdot (n^2)^{4n/\sqrt[3]{n}}$ com probabilidade total para todo n grande, pois também com probabilidade total o número de termos maiores ou iguais a $\sqrt[3]{n}$ entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é no máximo $4n/\sqrt[3]{n}$, para n suficientemente grande.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} 8 \log n / \sqrt[3]{n} = 0$, temos com probabilidade total $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} \leq \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{4 \log(r+1)}{r(r+1)}\right) < +\infty$. $\square$

Observação: Pode-se provar com métodos de teoria ergódica que para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} = e^{\pi^2/12\,ln\,2} \simeq 3,2758229\ldots$$

Pretendemos discutir este e outros resultados finos ligados a propriedade estatísticas de frações contínuas num próximo artigo.

Corolários do Teorema de Khintchine:

i) Para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \log^2 q}$ tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, e portanto $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ tem apenas um número finito de soluções racionais $\frac{p}{q}$, para todo $\varepsilon > 0$. Em particular ord $\alpha = 2$ para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (onde ord $\alpha := \inf\{\nu > 0 | |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\nu}$ tem infinitas soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\}$).

ii) Para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \log q}$ tem infinitas soluções racionais p/q, e portanto, para todo $k \in \mathbb{R}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{kq^2}$ tem infinitas soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Seção 2: O Teorema de Khintchine n-dimensional.

Teorema: Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funções decrescentes e $F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ dada por $F(k) = f_1(k) f_2(k) \ldots f_n(k)$. Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. O sistema de aproximação simultâneas

$$|\alpha - \frac{p_i}{q}| < \frac{f_i(q)}{q}, \quad 1 \le i \le n \text{ é tal que} \tag{$*$}$$

a) Se $\sum_{q=1}^{\infty} F(q) < +\infty$ então (*) tem apenas um número finito de soluções $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n$, para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$

b) Se $\sum_{q=1}^{\infty} F(q) = +\infty$ então (*) tem infinitas soluções $\left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n$ para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração:

Prova de a): Dado $q_0 \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$S(q_0) = \bigcup_{q \geq q_0} \bigcup_{0 \leq p_1, \dots, p_n < q} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{q} - \frac{f_i(q)}{q}, \frac{p_i}{q} + \frac{f_i(q)}{q} \right),$$

que é o conjunto dos $\alpha \in [0,1)^n$ tais que a desigualdade (*) do enunciado do Teorema tem alguma solução com $q \geq q_0$ (e logo $\bigcap_{q_0 \in \mathbb{N}} S(q_0)$ é o conjunto dos $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tais que (*) tem infinitas soluções $(\frac{p_i}{q}, \dots, \frac{p_n}{q}) \in \mathbb{Q}^n$). Temos $m(S(q_0)) \leq \sum_{q=q_0}^{\infty} q^n (\frac{2^n F(q)}{q^n}) = 2^n \sum_{q=q_0}^{\infty} F(q)$, que tende a 0 quando q tende a ∞, pois $\sum_{q=1}^{\infty} F(q)$ converge. Portanto, $m(\bigcap_{q_0 \in \mathbb{N}} S(q_0)) = 0$.

Prova de b): Primeiro obtemos funções decrescentes $g_1, g_2, \dots, g_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tais que $\lim\limits_{q \to s_0} \frac{g_i(q)}{f_i(q)} = 0$ e $G = g_1, g_2, \dots, g_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ satisfaz $\lim\limits_{q \to \infty} qG(q) = 0$ e $\sum_{q=1}^{\infty} G(q) = +\infty$ (podemos tomar $G_1(k) = (F(1) + F(2) + \cdots + F(k))^{-1} \cdot F(k)$ e $G(k) = (G_1(1) + G_1(2) + \cdots + G_1(k))^{-1} G_1(k)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Teremos G_1 e G decrescentes, $G_1(k) \leq 1/k$, $kG(k) \to 0$, $\Sigma G_1(k) = \infty$, $\Sigma G(k) = \infty$, e definimos $g_i(q) = f_i(q) \cdot (G(q)/F(q))^{1/n}$).

Fixemos agora $q_0 \in \mathbb{N}$ grande e definimos $s_0 = s_0(q_0) = \min\{s \in \mathbb{N} | G(q_0) + G(q_0 + 1) + \cdots + G(s) \geq \tilde{c}\}$, onde $\tilde{c}$ é uma constante que escolheremos posteriormente. Note que $\lim_{q \to \infty} \frac{s_0(q)}{q} = +\infty$.

Para cada s com $q_0 \leq s \leq s_0$ vamos estimar o número de $\left(\frac{r_1}{s}, \frac{r_2}{s}, \dots, \frac{r_n}{s}\right) \in \mathbb{Q}^n$ com $r_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq r_i < s$ tais que existem q com $q_0 \leq q < s$,

$p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p_i < q$ satisfazendo

$$\left|\frac{r_i}{s} - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{g_i(q)}{q} + \frac{g_i(s)}{s}, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (**)$$

Temos que, como cada g_i é decrescente, (**) implica

$$|r_i q - p_i s| < 2qs\frac{g_i(q)}{q} = 2sg_i(q), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Para um tal $\left(\frac{r_1}{s}, \ldots, \frac{r_n}{s}\right)$ que não satisfaz (**) para nenhum q com $q_0 \leq q < s$, $p_1, \ldots, p_n$ o bloco $\prod_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{s} - \frac{g_i(s)}{s}, \frac{r_i}{s} + \frac{g_i(s)}{s}\right)$ será disjunto de todos os blocos associados a $\left(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}\right)$, $\forall\, q$ com $q_0 \leq q < s$, $\forall\, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq p_i < q$.

Lema: Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $c_k > 0$ tal que $\sum_{j=1}^n \left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^k \geq c_k n$.

Prova: Para $k = 1$ segue de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{\varphi(j)}{j} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{q=1}^n \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{d=1}^n \lceil\frac{n}{d}\rceil \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d=1}^\infty \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$, pois $\sum_{r=1}^\infty \frac{\mu(m)}{m^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sum_{m|n}\mu(m)}{n^2} = 1$, e $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Como $h(x) = x^k$ é convexa para $k \geq 1$, temos $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{\varphi(j)}{j}\right)^k$, donde segue o resultado (com $C_k = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k$). $\square$

Se $q_0 \leq q < s$, estimamos o número de soluções de $|r_i q - p_i s| < 2sg_i(q)$ com $0 \leq p_i < q$, $0 \leq r_i < s$ por $4sg_i(q)$ desde que $\mathrm{mdc}(r_i, s) = 1$ (pois nessas condições $r_i q - p_i s$ não se anula e assume cada valor no máximo uma vez). Portanto, o número de soluções da desigualdade acima para todo i com $1 \leq i \leq n$ é no máximo $4^n s^n G(q)$. Por outro lado há $\varphi(s)^n$ pontos $\left(\frac{r_i}{s}, \ldots, \frac{r_n}{s}\right)$, $0 \leq r_i < s$, $\mathrm{mdc}(r_i, s) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Isso nos dá a estimativa do número de novos blocos disjuntos dos anteriormente considerados que têm denominador s de pelo menos $\varphi(s)^n - 4^n s^n \sum_{q=q_0}^{s-1} G(q)$, e para o volume da união dos blocos disjuntos adicionados até o denominador s_0 de pelo menos

$$\sum_{s=q_0}^{s_0}(\varphi(s)^n - 4^n s^n \sum_{q=q_0}^{s-1} G(q))\frac{2^n G(s)}{s^n}$$
$$= 2^k \sum_{s=q_0}^{s_0}\left(\frac{\varphi(s)}{s}\right)^n G(s) - 8^n \sum_{s=q_0}^{s_0}\left(\sum_{q=q_0}^{s-1} G(q)\right) G(s).$$

Por outro lado, com $s_0 = \min\{s \geq q_o | \sum_{q=q_0}^{s} G(q) \geq \tilde{c}\}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{s=q_0}^{s_0}\left(\frac{\varphi(s)}{s}\right)^n G(s) &= \sum_{s=q_0}^{s_0-1}(G(s)-G(s+1))\sum_{j=q_0}^{s}\left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^n + G(s_0)\sum_{j=q_0}^{s_0}\left(\frac{\varphi(j)}{j}\right)^n \\ &\geq \sum_{s=q_0}^{s_0-1}(G(s)-G(s+1))(c_n s - q_0) + G(s_0)(c_n s_0 - q_0) \\ &= c_n \sum_{s=q_0+1}^{s_0} G(s) - (1-c_n)q_0 G(q_0) \\ &= c_n\tilde{c} + \varepsilon_1 \quad \text{ onde } \varepsilon_1 \to 0 \text{ quando } q_0 \to \infty\end{aligned}$$

(pois $\lim\limits_{q_0\to\infty} q_0 G(q_0) = 0$).

Por outro lado, $8^n \sum_{s=q_0}^{s_0}\left(\sum_{q=q_0}^{s-1} G(q)\right) G(s) \leq 8^n \tilde{c} \sum_{s=q_0}^{s_0} G(s) \leq 8^n\tilde{c}(\tilde{c}+\varepsilon_2)$ onde $\varepsilon_2 = G(s_0) \to 0$ quando $q_0 \to \infty$. Assim, nosso volume é, pelo menos, $2^n(c_n\tilde{c}+\varepsilon_1) - 8^n\tilde{c}(\tilde{c}+\varepsilon_2)$. Tomando $\tilde{c} = \frac{c_n}{4^{n+1}}$ temos que, se q_0 é suficientemente grande (e logo ε_1 e ε_2 suficientemente pequenos), o volume de $A(q_0)$ é pelo menos $c_n^2/2^{n+3}$, onde

$$A(q_0) = \bigcup_{q\geq q_0}\ \bigcup_{0\leq p_1,\ldots,p_n<q}\ \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{q} - \frac{g_i(q)}{q}, \frac{p_i}{q} + \frac{g_i(q)}{q}\right).$$

Como $A(q) \supset A(q+1)$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$, temos $m(A_\infty) \geq \frac{1}{15\cdot 2^n} > 0$, onde $A_\infty = \bigcap_{q\in\mathbb{N}} A(q)$. Se $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in A_\infty$, $|\beta_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{g_i(q)}{q}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tem infinitas soluções $(\frac{p_1}{q}, \frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}) \in \mathbb{Q}^n$. Como $m(A_\infty) > 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe cubo $Q = \prod_{i=1}^n [\frac{b_i}{C}, \frac{b_i+1}{C}]$, $C \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq b_i < C$ tal que $m(A_\infty \cap Q) \geq (1-\varepsilon)m(Q)$. Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$T(X_1, \ldots, X_n) = (CX_1 - b_1, CX_2 - b_2, \ldots, CX_n - b_n),$$

temos $T(Q) = [0,1]^n$ e $m(T(Q \cap A_\infty)) \geq 1 - \varepsilon$. Além disso, se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in T(Q \cap A_\infty)$, $\alpha = T(\beta)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in A_\infty \cap Q$, e portanto $|\beta_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{g_i(q)}{q}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ tem infinitas soluções $(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}) \in \mathbb{Q}^n$, donde $|\alpha_i - \frac{r_i}{q}| < \frac{Cg_i(q)}{q}$ (e logo $|\alpha_i - \frac{r_i}{q}| < \frac{f_i(q)}{q}$) tem infinitas soluções

$$\left(\frac{r_1}{q}, \frac{r_2}{q}, \ldots, \frac{r_n}{q}\right) = \left(\frac{Cp_1 - b_1}{q}, \frac{Cp_1 - b_2}{q}, \ldots, \frac{Cp_n - b_n}{q}\right) \in \mathbb{Q}^n,$$

e como $\varepsilon > 0$ pode ser feito arbitrariamente pequeno está provado o item b). $\square$

Apêndice: Aproximações diofantinas não-homogêneas

Proposição 1: Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então $X = \{m + n\alpha | m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Prova: Dado $\varepsilon > 0$ existem p, q inteiros com $> 1/\varepsilon$ tais que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2} \Rightarrow 0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{q} < \varepsilon$. Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que x está entre $k(q\alpha - p)$ e $(k+1)(q\alpha - p)$, donde $|x - k(q\alpha - p)| \leq \varepsilon$. Como $k(q\alpha - p) = -pk + qk\alpha \in X$, o resultado está provado. $\square$

O próximo resultado, devido a Kronecker, estende a Proposição 1 para dimensão qualquer.

Proposição 2: Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sejam linearmente inependentes sobre $\mathbb{Q}$ (isto é, $k + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n = 0$ com $k, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ implica $k = m_1 = \cdots = m_n = 0$). Então $X = \{k\alpha + m_1e_1 + m_2e_2 + \cdots + m_ne_n | k, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}^n$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ são os elementos da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Prova: Seja $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n$ o fecho de X, e $V \subset \overline{X}$ um subespaço vetorial maximal de $\mathbb{R}^n$ contido em $\overline{X}$. Suponhamos por absudo que $V \neq \mathbb{R}^n$. Seja f um funcional linear não nulo de $\mathbb{R}^n$.

Seja $V^\perp$ o complemento ortogonal de V, e seja $\pi \colon \mathbb{R}^n \to V^\perp$ a projeção ortogonal sobre $V^\perp$. Para todo $x \in \overline{X}$, $\pi(x) \in \overline{X}$, pois $\pi(x) = x + (\pi(x) - x)$, $\pi(x) - x \in C \subset \overline{X}$ e $\overline{X}$ é invariante por adição (pois X também é).

Seja $k = \dim V^\perp$. Escolhemos vetores $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$ tais que $\pi(e_{i_1}), \pi(e_{i_2}), \ldots, \pi(e_{i_k})$ geram $V^\perp$. Se fizermos $e_0 = \alpha$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$ escrevemos $\pi(e_i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\pi(e_{i_j})$. Não podemos ter $\lambda_{i1} \in \mathbb{Q}$ para todo i, senão podemos definir um funcional linear f da seguinte forma: dado $x \in \mathbb{R}^n$ escrevemos $\pi(x)$ como $\sum_{j=1}^{k} \beta_j \pi(e_{i_j})$, e tomamos $f(x) = \beta_1$. Se $\lambda_{i1} = f(e_i) \in \mathbb{Q}$ para todo i, teríamos $\lambda_{01} = f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i1}\alpha_i \in \mathbb{Q}$, contradizendo a hipótese da proposição.

Seja então i_0 tal que $\lambda_{i_0 1} \notin \mathbb{Q}$. Tomamos $\gamma = (\lambda_{i_0 1}, \ldots, \lambda_{i_0 k}) \in \mathbb{R}^k$. Como observamos na introdução deste artigo, existem $x_n = q_n\gamma - (p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{kn}) \neq 0$, com $q_n, p_{1n}, \ldots, p_{kn} \in \mathbb{Z}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |q_n|^{-1/k} = 0$, e portanto, se $w_n = q_n\pi(e_{i_0}) - \sum_{j=1}^{k} p_{jn}\pi(e_{i_j})$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ (e $w_n \neq 0$, $\forall\, n$). Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n}{|w_n|} = \tilde{w} \in S^{n-1} \cap V^{\perp}$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $t\tilde{w} = \lim\limits_{n\to\infty} \lfloor \frac{t}{w_n} \rfloor w_n \in \overline{X}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto, como $\overline{X}$ é invariante por adição, o subespaço $\tilde{V} = \{v + t\tilde{w} | v \in V,\ t \in \mathbb{R}\}$ é tal que $\tilde{V} \subset \overline{X}$ e $\tilde{V}$ contém propriamente V, absurdo. $\square$

Observação: A hipótese da Proposição 2 é necessária, pois se existem inteiros $k, m_1, \ldots, m_n$ não todos nulos tais que $k + m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n = 0$ então $\overline{X} \subset \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n \in \mathbb{Z}\}$, que é um fechado com interior vazio.

Deixamos para o leitor a prova do seguinte fato: Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição da Proposição 2, e $m \in \mathbb{N}$, definimos $\{m\alpha\} = (m\alpha_1 - \lfloor m\alpha_1 \rfloor, \ldots, m\alpha_n - \lfloor m\alpha_n \rfloor) \in [0,1)^n$. A seqüência $\{m\alpha\}$ é uniformemente distribuida, isto é, para todo aberto $A \subset [0,1)^n$, se $f_A(k) = \#\{m \leq k | \{m\alpha\} \in A\}$, então $\lim\limits_{k\to\infty} f_A(k)/k = m(A)$, onde $m(A)$ é a medida de Lebesgue de A. (*Sugestão*: sejam $C_1, C_2 \subset [0,1)^n$ dois cubos abertos tais que $\overline{C}_2$ está contido em um transladado de C_1 ($\overline{C}_2 \subset C_1 + v,\ v \in \mathbb{R}^n$). Use o fato de que existem vetores $\tilde{v}$ arbitrariamente próximos de v, com $\tilde{v} = (q\alpha_1 + p_1, \ldots, q\alpha_n + p_n)$,

$q, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$, e que $\{m\alpha\} \in C_2 \Rightarrow \{(m-q)\alpha\} \in C_2 - \tilde{v} \subset C_1$, se $\tilde{v}$ está suficientemente próximo de v, donde $f_{C_2}(k) \le f_{C_1}(k) + |q| \Rightarrow \limsup_{k\to\infty} f_{C_2}(k)/k \le \liminf_{k\to\infty} f_{C_1}(k)/k$.

Referências:

[C1] J.W.S. Cassels: *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge Univ. Pres, 1957.

[C2] J.W.S. Cassels: *Some metrical theorems in Diophantine approximation I*, Proc. Camb. Phil. Soc. **46** (1950), 209–218.

[K] A. Khintchine: *Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen*, Math. Z. **24** (1926), 706–714.

[Ma] A. Markov: *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, Math. Ann. **15** (1879), 381–406.

[Mo] C.G. Moreira: *Frações contínuas, representações de números e aproximações*, Eureka **3** (1998), 44–55.

[S] W.M. Schmidt: *Diophantine approximations*, Lecture Notes in Mathematics **785**, Springer Verlag, 1980.