# O leão e o homem: perseguição e fuga com posição e velocidade limitadas

*Miriam Abdón, Carlos Gustavo T. de A. Moreira,*
*Nicolau Corção Saldanha*

Depois que Von Neumann e Morgenstern criaram a teoria dos jogos e a utilizaram para estudar certos jogos discretos, vieram tentativas de aplicar esta teoria a situações contínuas. Havia um interesse especialmente grande por problemas com aplicações militares, como a perseguição de um avião ou navio por um míssil. Qual estratégia deveria ser seguida pelo perseguidor? Seria possível ao fugitivo evitar o choque? Por quanto tempo? Destas perguntas surgiu a teoria dos *jogos diferenciais* que já conta com uma imensa literatura; alguns textos gerais sobre o assunto são [Fr], [I] e [KS].

Consideraremos neste artigo um problema particularmente simples de perseguição e fuga: o problema do leão e do homem. Este problema é bem conhecido (veja [L] ou [Fl] para a versão contínua) e foi usado na prova por equipes da $9^a$ Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Dois jogadores $A$ (o leão) e $B$ (o homem) movem-se em uma arena limitada e a única restrição sobre suas trajetórias é que as velocidades são limitadas; $A$ persegue e tenta alcançar $B$ (o leão quer comer) e $B$ tenta fugir de $A$ (o homem não quer ser comido). Consideramos duas versões do problema: na primeira discretizamos o tempo de forma que os jogadores saltam alternadamente; na segunda, o tempo é contínuo. Nosso objetivo é em cada caso saber se existe uma estratégia para $A$ (ou $B$) que garanta sua vitória.

Este problema é mais simples que a maioria daqueles tratados na literatura de jogos diferenciais pois não impomos restrições à aceleração ou curvatura das trajetórias; também não tentamos estimar o tempo até o choque. Apesar de simples, este problema *não* é discutido em muitos livros de jogos diferenciais por não se adequar bem a parte da teoria geral. Todos os nossos argumentos são elementares e o leitor só precisa saber geometria plana e os rudimentos do cálculo para seguir as demonstrações.

## I. Caso discreto

O leão $A$ persegue sua vítima humana $B$ em uma arena convexa limitada $S$. As posições iniciais de $A$ e $B$ são $p_A$ e $p_B$; $A$ e $B$ pulam alternadamente distâncias de no máximo $\ell_A$ e $\ell_B$. O leão $A$ consegue golpear e assim derrubar e vencer $B$ se e somente se conseguir chegar a uma distância menor ou igual a $d$ de $B$ (no caso $d = 0$, entendemos que $A$ vence apenas se conseguir saltar exatamente sobre $B$).

a. Caso $\ell_A = \ell_B$, $d > 0$

Neste caso, $A$ tem uma estratégia para alcançar $B$. De fato, uma tal estratégia consiste em dar passos de tamanho $\min\{\ell_A, d(p_A, p_B)\}$ na direção de $B$. Suponha sem perda de generalidade que $\ell_A = 1$. Com esta estratégia, a distância entre $A$ e $B$ nunca aumenta e, se a distância logo antes do salto de $A$ é menor ou igual a $1 + d$ então $A$ ganha o jogo imediatamente. Na verdade, a distância só se mantém inalterada enquanto $B$ anda com passos de tamanho $\ell_B$ ao longo da linha reta $p_A p_B$. Como a arena é limitada, $B$ deverá em algum momento freiar ou desviar-se desta direção, o que implica em uma redução da distância. Queremos verificar que a distância em algum momento será menor que $d$.

Para isso, note primeiramente que, se o passo de $B$ desvia de um ângulo $\theta$ da direção $p_A p_B$, $|p_A - p_B| = h > d$, no próximo lance de $A$ a distância diminuirá de pelo menos $h + 1 - \sqrt{1 + h^2 + 2h\cos\theta}$, como pode-se ver pela Figura A. Por outro lado,

$$h + 1 - \sqrt{1 + h^2 + 2h\cos\theta} \geq d + 1 - \sqrt{1 + d^2 + 2d\cos\theta}$$

pois esta expressão é monótona em $h$, como pode ser verificado estudando o sinal de sua derivada.

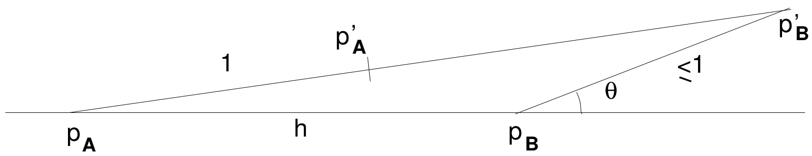


**Figura A**

Seja $D$ o diâmetro da arena; $B$ pode dar no máximo $\lfloor 4D \rfloor$ passos de comprimento maior ou igual a $1/2$ com desvio menor ou igual a $\pi/\lfloor 12D \rfloor$: caso contrário, $B$ sairia da arena. De fato, se $B$ desse mais de $\lfloor 4D \rfloor$ passos com desvios tão pequenos, o angulo entre qualquer passo e a reta ligando as posições iniciais de $A$ e $B$ seria sempre menor ou igual a $\pi/3$ e, considerando as projeções dos passos nesta reta, vemos que a distância entre as posições inicial e final de $B$ seria maior que o diâmetro da arena.

Assim, a cada $\lfloor 4D + 1 \rfloor$ passos, ou existe um passo de $B$ de comprimento menor que $1/2$, caso em que a distância diminui de pelo menos $1/2$, ou existe um passo com desvio maior que $\pi/\lfloor 12D \rfloor$, caso em que a distância diminui de pelo menos $d + 1 - \sqrt{1 + d^2 - 2d\cos(\pi/\lfloor 12D \rfloor)}$. Portanto, $A$ terminará por vencer.

b. Caso $\ell_A = \ell_B$, $d = 0$

Se $A$ seguir a estratégia do item anterior, provavelmente nunca alcançará $B$. Por exemplo, consideremos a situação onde a arena contém um disco suficientemente grande e $B$ adota a estratégia de mover-se no bordo deste disco afastando-se o máximo possível de $A$. Excluindo-se algumas posições iniciais onde $A$ pega $B$ quase imediatamente, $A$ nunca pega $B$: tente construir uma seqüência de posições de $A$ e $B$ de trás para frente e ficará claro porquê.

Entretanto, $A$ ainda tem uma estratégia vencedora. Suponha novamente $\ell_A = 1$ e seja $D$ o diâmetro da arena. O jogador $A$ pode seguir a estratégia do item anterior até tornar sua distância a $B$ menor que $1/(4D)$. Seja $O$ um ponto que permanecerá fixo durante o resto do processo e que coincide com a posição de $A$ neste momento; a partir de agora a estratégia de $A$ será sempre saltar para um ponto do segmento $OB$ tão próximo de $B$ quanto possível. É fácil ver que esta estratégia está bem definida, isto é, que é sempre possível a $A$ manter-se neste segmento. Mais: esta estratégia garante que a distância entre $A$ e $B$ nunca aumenta. De fato, sejam $p_A$ e $p_B$ as posições em um dado momento; supomos que $B$ então salta para $p'_B$ e $A$ para $p'_A$. Sejam $p''_A$ e $p''_B$ as projeções ortogonais de $p_A$ e $p_B$ na reta que passa por $O$, $p'_A$ e $p'_B$ (veja a Figura B). Claramente, $d(p''_A, p''_B) < d(p_A, p_B)$ e portanto $d(p'_A, p''_A) > d(p'_B, p''_B)$, donde $d(p'_A, p'_B) < d(p_A, p_B)$, como afirmamos. Falta apenas provar que esta distância torna-se igual a zero após um numero finito de jogadas.

Dadas as posições $p_A$ e $p_B$ de $A$ e $B$ em um dado momento, seja $p'_B$ um ponto que dista no máximo 1 de $p_B$ e mais de 1 de $p_A$, de tal forma que $B$ pode mover-se para

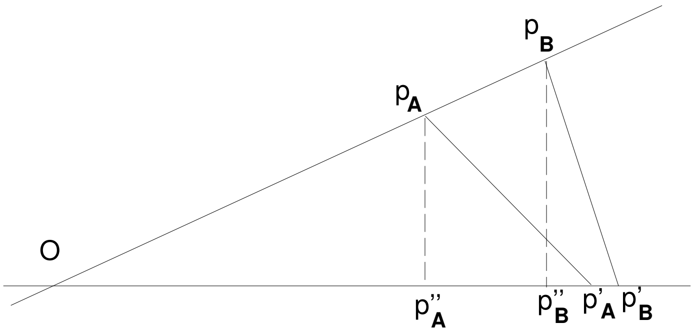


**Figura B**

$p'_B$ sem ser imediatamente capturado. Como $d(p'_B, p_A) > d(p'_B, p_B)$, o ângulo $\widehat{Op_Ap'_B}$ é obtuso. Seja $k = d(O, p_B)$. Pela lei dos cossenos, $d(O, p'_B) > \sqrt{d(O, p_A)^2 + d(p_A, p'_B)^2} > \sqrt{(k - 1/(4D))^2 + 1} > k + 1/(4D)$ (lembre que $k < D$). Assim, $B$ deve, a cada jogada, afastar-se de $O$ de pelo menos $1/(4D)$ sob pena de perder imediatamente. Como a arena é limitada, isto conclui a demonstração.

c. Caso $\ell_A < \ell_B$, $d > 0$

Neste caso, se a arena for suficientemente grande, a posição inicial distante dos bordos e a distância inicial entre $A$ e $B$ não permitir vitória imediata de $A$, $B$ tem uma estratégia para manter $A$ à distância. Um exemplo de estratégia para $B$ é o seguinte: $B$ se manterá sobre um grande círculo fixo contido na arena e a cada jogada ele salta, sempre sobre este círculo, de tal forma a aumentar tanto quanto possível sua distância a $A$. O jogador $A$ estará sempre ou longe do círculo por sua distância a $O$ ser pequena ou terá seu argumento muito diferente do de $B$ já que, como a velocidade angular de $A$ ao tentar aproximar-se do círculo é substancialmente menor que a de $B$, $B$ tem tempo suficiente para afastar-se bastante.

Vamos ilustrar isto com um exemplo. Suponha que $S$ seja um disco de raio $100km$, $\ell_A = 1m$, $\ell_B = 1,05m$ e $d = 10m$. Suponha ainda que $B$ está no bordo deste disco e segue a estratégia acima. Na faixa em que a distância de $A$ ao bordo é menor que $3km$, a velocidade angular de $B$ é maior que a de $A$: a cada passo, a distância entre $B$ e a projeção radial de $A$ no círculo aumentará de mais de $1cm$. Assim, se $A$ tentar reduzir sua distância ao circulo para menos de $1km$, será necessário dar pelo menos 2000 passos nesta faixa e a distância entre $B$ e a projeção de $A$ passará a ser de mais de $20m$, demonstrando que neste caso $B$ foge facilmente de $A$.

## II. Caso contínuo

No caso discreto os jogadores se movem aos saltos; queremos agora imaginar que os jogadores, ao invés de saltarem alternadamente, movem-se continuamente. Da mesma forma que no caso discreto limitamos o tamanho dos saltos, no caso contínuo limitamos a velocidade dos jogadores. Mais precisamente, a trajetória de $A$ (resp., $B$) deve ser derivável por partes (em relação ao tempo) e seu vetor velocidade deve sempre ter módulo menor ou igual a $v_A$ (resp., $v_B$).

No mundo real, um jogador não tem informação instantânea sobre a posição de seu adversário: é preciso esperar pelo menos o tempo necessário para a luz ir de um ao outro. Motivados por essa observação, vamos introduzir um ingrediente extra no problema: o *tempo de reação.* Suponhamos assim que cada um dos jogadores tem informação sobre a posição do adversário até um tempo $f(d)$ anterior, onde $d$ é a distância entre o jogador e a imagem do adversário. A imagem do adversário é definida como a sua posição no mesmo tempo $f(d)$ anterior. Observe que $d$ e a imagem do adversário estão implicitamente definidas por estas condições desde que $f$ seja crescente e derivável com $f(0) = 0$ e $f'(d) \leq 1/(v_A + v_B)$ para todo $d$, hipóteses que sempre assumiremos.

a. Caso $v_B > v_A$

Neste caso, $B$ consegue manter-se longe de $A$ para toda $f$. A estratégia é análoga ao caso discreto: $B$ deve manter-se num círculo de raio grande e mover-se com velocidade máxima na direção que o afasta da imagem de $A$. A demonstração de que esta estratégia funciona é como no caso discreto. Os detalhes são deixados a cargo do leitor.

b. Caso $v_B = v_A$, $d > 0$

Uma estratégia análoga à do caso discreto funciona para o jogador $A$ qualquer que seja $f$. Basta $A$ andar por um tempo $d/2v_A$ na direção da imagem de $B$ e a distância, como no caso discreto, diminuirá, tornando-se eventualmente menor que qualquer número positivo dado. Novamente, deixamos os detalhes como exercício.

c. Caso $v_B = v_A$, $d = 0$

Aqui, tudo depende de $f$. Se $f(d)$ é da forma $\lambda d$, $B$ tem dificuldade em saber como fugir e (exceto se sempre adivinhar bem) termina por ser alcançado por $A$. Entretanto, se $f(d)/d$ tender a zero quando $d$ tende a zero, $A$ nunca alcançará $B$.

Neste último caso, passamos a descrever uma boa estratégia para $B$. É conveniente trabalhar em coordenadas polares. O jogador $B$ escolhe uma espiral tendendo para um círculo com concavidade sempre para dentro: por exemplo, a parametrizada por $r = r_0(1 - 1/(\theta + 2))$, $\theta \in [0, +\infty)$. Feito isso, $B$ anda com velocidade máxima nessa espiral sempre que a imagem $A'$ de $A$ estiver a uma distância menor que, digamos, $r_0/2$ e que seu ângulo satisfizer $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$. Se $\theta_{A'}$ chegar a ser $\theta_B + f(d)$, $B$ passa a percorrer a mesma espiral refletida em relação ao raio que liga a posição nesse instante a $O$.

Suponhamos por absurdo que existe uma estratégia para $A$ que permita alcançar $B$. Suponha ainda que tenha ocorrido uma inversão no sentido em que $B$ corre a espiral. Isto significa que pouco antes da inversão o ângulo $\theta_{A'}$ da imagem $A'$ de $A$ satisfazia $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$ e no momento da inversão valia a igualdade $\theta_{A'} = \theta_B + f(d)$. Como, entretanto, neste momento $B$ inverteu o sentido de percurso, passamos a ter uma situação equivalente a $\theta_{A'} = \theta_B - f(d)$. O jogador $A$ poderia facilmente, entretanto, reduzindo seu próprio argumento, ter chegado a uma tal posição sem fazer com que $B$ invertesse o sentido de percurso. Assim, para cada estratégia vitoriosa para $A$ existe uma outra estratégia, também vitoriosa, para a qual $B$ nunca inverte o sentido de percurso da espiral. Podemos portanto supor, sem perda de generalidade, que tais inversões não ocorrem e que sempre vale $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$.

Ainda supondo que $A$ alcance $B$, seja $p_0$ o ponto onde $A$ e $B$ se encontram em um tempo $t_0$. Passando por $p_0$, tomemos uma reta $r$ qualquer contida no ângulo menor formado entre o raio e a perpendicular à espiral, como na Figura C. Consideremos ainda um feixe de retas paralelas a $r$, as curvas de nível de uma coordenada auxiliar $w$ definida como uma função afim das coordenadas usuais. Podemos ainda supor que $w$ é crescente no tempo para as coordenadas de $B$ pouco antes do choque.

Sejam $w_A(t)$ e $w_B(t)$ as coordenadas $w$ de $A$ e $B$ em um tempo $t$: para $t$ próximo de $t_0$, devemos ter $w_A(t) < w_B(t)$, pois do contrário teíamos $\theta_{A'} > \theta_B + f(d)$, o que contradiz nossas hipóteses. Consideremos então as trajetórias de $A$ e $B$ a partir de um instante

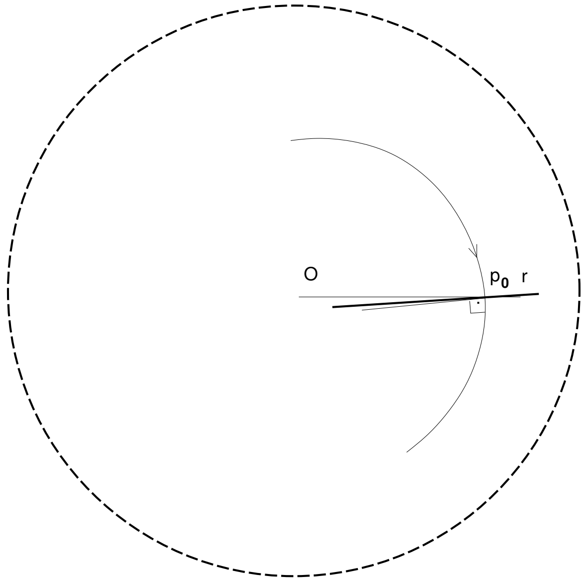


**Figura C**

qualquer $t_1 < t_0$ já na faixa que garante a desigualdade acima, como mostrado na Figura D. Translade a trajetória de $B$ paralelamente a $r$ e consideremos a última interseção da trajetória de $A$ com esta trajetória transladada. Este ponto de interseção corresponde a tempos $t_A > t_B$ para $A$ e $B$, respectivamente: a desigualdade vem de $w_A(t_A) = w_B(t_B)$. Refletindo a trajetória transladada e a trajetória de $A$ em $r$ (como na Figura E), vemos que a trajetória de $A$ entre $t_A$ e $t_0$ é mais longa que a trajetória de $B$ entre $t_B$ e $t_0$, pois a trajetória de $A$ duplicada é um arco por fora do arco convexo dado pela trajetória de $B$ duplicada. Isto é um absurdo, e demonstra que, conforme afirmamos, esta estratégia de $B$ garante sua vitória.

No caso $f(d) = \lambda d$, o argumento acima não se aplica pois é impossível construir um feixe de retas com todas as propriedades necessárias. De fato, se $B$ seguir a estratégia acima e $A$ perseguir $B$ sempre perto do limite em que $B$ muda de sentido, $A$ alcança $B$. Além disso, pode-se provar que, para qualquer estratégia de $B$ (baseada apenas na informação a que $B$ tem acesso) existe uma estratégia de $A$ para a qual $A$ alcança $B$. Por outro lado, pelo que vimos acima, não existe uma estratégia para $A$ com a qual ele alcance $B$ qualquer que seja a estratégia adotada por $B$.

**Referências:**

[Fl] J. Flynn, *Pursuit in the circle: lion versus man*, Differential games and control theory,

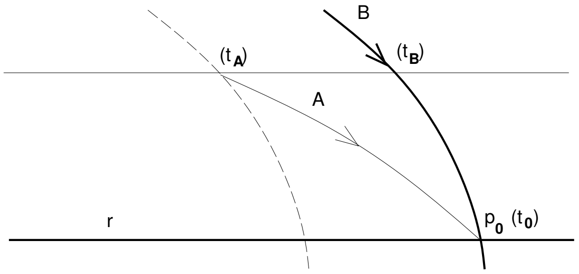


**Figura D**

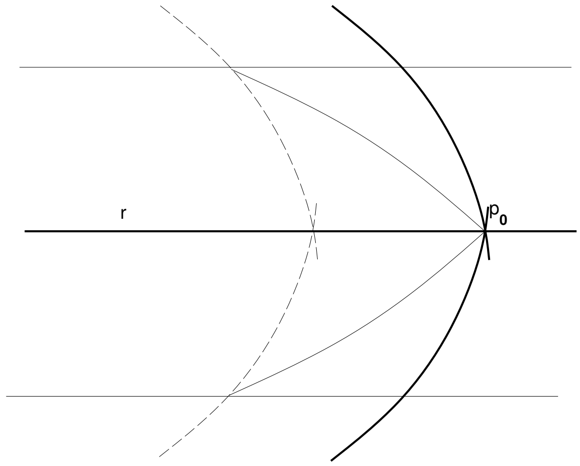


**Figura E**

ed. por E. O. Roxin, P. Liu e R. L. Sternberg, Lecture notes in pure and applied mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1974.

[Fr] A. Friedman, *Differential games*, Wiley-Interscience, New York, 1971.

[I] R. Isaacs, *Differential games*, the SIAM series in Applied Math., John Wiley, New York, 1965.

[L] J. E. Littlewood, *A mathematician's miscellany*, Methuen, London, 1953 (pp. 135-136).

[KS] N. Krassovski e A. Soubbotine, *Jeux differentiels*, Editions Mir, Moscou, 1977.

Miriam Abdón; e-mail: miriam@impa.br

Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira; e-mail: gugu@impa.br

Nicolau Corção Saldanha; e-mail: nicolau@impa.br; http://www.impa.br/~nicolau/

IMPA, Estr. D. Castorina, 110
Jardim Botânico
Rio de Janeiro, RJ 22460-320, BRASIL