FRAÇÕES CONTÍNUAS, REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS E APROXIMAÇÕES

Introdução

A teoria de frações contínuas é um dos mais belos temas da matemática elementar, sendo ainda hoje assunto de pesquisa recente (incluindo a do autor destas linhas). O objetivo deste artigo é servir como referência didática em português a nível secundário sobre o assunto.

Nas inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é sem dúvida a mais complicada conceitualmente, e a representação de um número real está diretamente ligada à própria noção de número real.

De fato, o conceito de número natural é quase um conceito primitivo no ensino secundário. Já um número inteiro é um número natural com um sinal que pode ser $+$ ou $-$, e um número racional é a razão entre um número inteiro e um natural não nulo. Por outro lado, dizer o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mas há coisas que podemos dizer sobre eles. Uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$ é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais. Efetivamente, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ $(k = [x])$ tal que $0 \le x - k < 1$. Podemos escrever a representação decimal de $x - k = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,\ \ a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, o que significa que se

$r_n = a_n + 10 \cdot a_{n-1} + 100 \cdot a_{n-2} + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_1$, então $\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_n + 1}{10^n}$, e portanto $k + \frac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de x, no sentido que o erro $\left|x - \left(k + \frac{r_n}{10^n}\right)\right|$ é menor que $\frac{1}{10^n}$, que é um número bem pequeno se n for grande. A representação decimal de um número real fornece pois uma seqüência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10.

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q natural não nulo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$, e portanto $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ e $\left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$. Em particular há aproximações de x por racionais com denominador q com erro menor que $\frac{1}{q}$. A representação decimal de x equivale a dar essas aproximações para os denominadores q que são potências de 10, e tem méritos como sua praticidade para efetuar cálculos que a fazem a mais popular das representações dos números reais. Por outro lado, envolve a escolha arbitrária da base 10, e oculta freqüentemente aproximações racionais de x muito mais eficientes do que as que exibe. Por exemplo,

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right| \text{ e } \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|$$

mostram que $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores, e de fato são aproximações muito mais espetaculares do que se podia esperar.

O objetivo deste artigo é apresentar uma outra maneira de representar números reais, que sempre fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, e de fato fornece todas essas aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural e conceitualmente simples: a representação por frações contínuas.

Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $[x]$ como o único inteiro tal que $[x] \leq x < [x]+1$. Definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = [\alpha_n], \quad \text{e, se} \quad \alpha_n \in Z,\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}, \text{ para todo } n \in N.$$

Se, para algum n, $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Senão denotamos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

O sentido dessa última notação ficará claro mais tarde. A representação acima se chama a representação por frações contínuas de x.

Curiosidade: O denominador da n-ésima aproximação em base B de um número real é B^n. Já o denominador q_n da n-ésima aproximação por fração contínua de x depende de x. Apesar disso, para quase todo real x, $\sqrt[n]{q_n}$ converge a $e^{\pi^2/12\ln 2} = 3,27582291872\ldots$ (meu número real preferido!) e $\sqrt[n]{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|}$ converge a $e^{-\pi^2/6\ln 2} = 0,093187822954\ldots$.

Observação: Os α_n (como funções de x) são funções distintas do tipo $\frac{ax+b}{cx+d}$ com

a, b, c, d inteiros. Se a fração contínua de x é periódica, ou seja, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, então x será raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros, ou seja, será um irracional da forma $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$. A recíproca é verdadeira (de fato já foi enunciada no artigo de José Paulo Carneiro na RPM, ver referências), mas sua prova é mais difícil, e será apresentada no Apêndice.

Se $x \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita, e seus coeficientes a_n vêm do algoritmo de Euclides:

$$
\begin{array}{lll}
x = \dfrac{p}{q}, \quad q > 0 & p = a_0 q + r_0 & 0 \leq r_0 < q \\
 & q = a_1 r_0 + r_1 & 0 \leq r_1 < r_0 \\
 & r_0 = a_2 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\
 & \quad \vdots & \quad \vdots \\
 & r_{n-2} = a_n r_{n-1} &
\end{array}
$$

Isso já é uma vantagem da representação por frações contínuas (além de não depender de escolhas artificiais de base), pois o reconhecimento de racionais é mais simples que na representação decimal.

Seção 1: Reduzidas e boas aproximações.

Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Sejam $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre si tais que $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $n \geq 0$. O seguinte resultado será fundamental no que seguirá.

Proposição: (p_n) e (q_n) satisfazem a recorrência $p_{n+2} = a_{n+2} p_{n+1} + p_n$, e $q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n$, para todo $n \geq 0$. Temos ainda $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_0 = 1$,

$q_1 = a_1$. Além disso, $p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1} = (-1)^n$, $\forall\, n \geq 0$.

Prova: Por indução em n, provaremos que se $t_k > 0$, para $k > 1$ então $[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n] = \dfrac{x_k}{y_k}$ onde as seqüências (x_m) e (y_m) são definidas por $x_0 = t_0$, $y_0 = 1$, $x_1 = t_0 t_1 + 1$, $y_1 = t_0$ $x_{n+2} = t_{n+2}\, x_{n+1} + x_n$, $y_{n+2} = t_{n+2}\, y_{n+1} + y_n$, $\forall\, n$. Suponha que a afirmação seja válida para $k = n$. Para $k = n + 1$ temos

$$[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}] = [t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}] =$$

$$= \frac{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1} + x_{n-2}}{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1} + y_{n-2}} = \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} = \frac{t_{n+1} x_n + x_{n-1}}{t_{n+1} y_n + y_{n-1}} \,.$$

Por outro lado as igualdades

- $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1$
- $p_{n+2} q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2} = (a_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_{n+1}$

  $-(a_{n+2}\, q_{n+1} + q_n) p_{n+1} = -(p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1})$

mostram que $p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1} = (-1)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, o que implica em particular que os p_n , q_n dados pelas recorrências acima são primos entre si. $\square$

Corolário: $x = \dfrac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$ e $\alpha_n = \dfrac{p_{n-2} - q_{n-2}\alpha}{q_{n-1}\alpha - p_{n-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: A primeira igualdade é conseqüência direta da prova, e a segunda é conseqüência direta da primeira pois $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n]$.

Note que as reduzidas de ordem par são menores e as de ordem ímpar maiores que $x = [a_0; a_1, \ldots]$.

Teorema 1: $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leq \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Além disso, $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{2q_n^2}$ ou $\left|x - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \dfrac{1}{2q_{n+1}^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: x sempre pertence ao segmento de extremos $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Rightarrow \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

Além disso, se

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \text{ e } \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| > \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Rightarrow q_{n+1} = q_n\,, \text{ absurdo.} \qquad \square$$

Observação: De fato $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < \dfrac{1}{a_{n+1} q_n^2}$. Quanto maior for a_{n+1} melhor será a aproximação $\dfrac{p_n}{q_n}$ de x. O próximo resultado nos dá explicitamente o erro da aproximação de x por $\dfrac{p_n}{q_n}$.

Proposição:

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2}\,, \text{ onde } \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1].$$

Demonstração: Temos $\alpha_{n+1} = \dfrac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_n x - p_n}$. Portanto,

$$\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_n x - p_n} + \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(q_n x - p_n)} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n x - p_n)} \Rightarrow x - \frac{p_n}{q_n} =$$

$$= \frac{q_n(q_n x - p_n)}{q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}. \qquad \square$$

Como aplicação podemos provar o seguinte.

Teorema (Hurwitz, Markov). Para todo α irracional, $n \geq 1$ temos $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ para pelo menos um racional $\dfrac{p}{q} \in \left\{\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}$. Em particular $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais p/q.

Demonstração: Suponha que o teorema seja falso. Então existe α irracional, $n \geq 1$ com $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}$, $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5}$ e $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq 5$. Devemos portanto ter $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ (todos são claramente no máximo 2, e se algum a_k é igual a 2 com $k \in \{n, n+1, n+2\}$, teríamos $a_k + \beta_k \geq 2 + \dfrac{1}{3} > \sqrt{5}$, absurdo.)

Seja $x = 1/\alpha_{n+2}$ e $y = \beta_{n+1}$. As desigualdades acima se traduzem em

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \sqrt{5},\ \ 1 + x + y \leq \sqrt{5} \text{ e } e\frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \sqrt{5}.$$

Temos

$$1 + x + y \leq \sqrt{5} \Rightarrow 1 + x \leq \sqrt{5} - y \Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - y} + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5} - y)}$$

e portanto $y(\sqrt{5}-y) \geq 1 \Rightarrow y \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot$ Por outro lado temos

$$x \leq \sqrt{5}-1-y \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{1+4} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1-y}+\frac{1}{1+4}=\frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)}$$

e portanto $(1+4)(\sqrt{5}-1-y) \geq 1 \Rightarrow y \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, e portanto devemos ter $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, o que é absurdo pois $y=\beta_{n+1}=\dfrac{q_{n=1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$.

Observação: Em particular provamos que $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais $\dfrac{p}{q}$, para todo α irracional. $\sqrt{5}$ é o maior número com essa propriedade. De fato, se

$$\varepsilon > 0, \quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \left|\alpha-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2},$$

temos

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-p\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q} \Rightarrow \left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-p\right|\left|q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-p\right| < \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\varepsilon},$$

ou seja,

$$|p^2-pq-q^2| < \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}-\sqrt{5}\right| \Big/ (\sqrt{5}+\varepsilon).$$

Se q é grande, $1/q^2$ é pequeno, e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{p}{q}$ é muito próximo de 0, donde $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{p}{q}-\sqrt{5}\right| \Big/ (\sqrt{5}+\varepsilon)$ é muito próximo de $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\varepsilon} < 1$, absurdo, pois

$|p^2 - pq - q^2| \geq 1$ (de fato $p^2 - pq - q^2$ é um inteiro não nulo, pois se $p^2 - pq - q^2 = 0$ teríamos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\},$$

absurdo, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.)

Outra maneira de ver que, para todo $\varepsilon > 0$, $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ é observar que as melhores aproximações racionais de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são as reduzidas $\frac{p_n}{q_n}$ de sua fração contínua $[1, 1, 1, 1, \ldots]$ (ver seção 2 e exemplos), para as quais temos $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} q_n^2}$, com $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$ se aproximando cada vez mais de

$$[1; 1, 1, 1, \ldots] + [0; 1.1.1. \ldots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

Exemplos:

- $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \ldots]$, portanto

  $\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} \ldots$

- $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots]$, (isso não é fácil de provar.)

- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ pois

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \cdots$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots] \text{ pois } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \cdots$$

Isto prova em particular que $\sqrt{2}$ e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são irracionais, pois sua fração contínua é infinita.

Seção 2: Boas aproximações são reduzidas.

O próximo teorema (e seu Corolário 2) caracteriza as reduzidas em termo do erro reduzido da aproximação de x por p/q, o qual é, por definição, a razão entre $|x - p/q|$ e o erro máximo da aproximação por falta com denominador q, que é $1/q$. Assim, o erro reduzido da aproximação de x por p/q é $|qx - p|$.

Teorema 2: $|q_n x - p_n| < |qx - p|, \forall\, p, q \in \mathbb{Z}, 0 < q < q_n \; \dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n} \cdot$. Além disso, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|, \;\forall\, p, q \in \mathbb{Z}, 0 < q < q_{n+1}$.

Prova: $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \geq \dfrac{1}{qq_n} > \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$ se $q < q_{n+1}$, e assim $\dfrac{p}{q}$ está fora do intervalo

$\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$. Portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \Rightarrow |qx - p|$$

$$\geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Além disso, se vale a igualdade, então $x = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$, e $q_{n+1} > 2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último coeficiente a_n é sempre maior que 1. Nesse caso, se $q < q_n$, teremos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}}$$

$$> \frac{1}{qq_{n+1}} \Rightarrow |qx - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Corolário 1: $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \dfrac{p}{q}\right|, \forall\, q < q_n$.

Corolário 2: Se $|qx - p| < |q'x - p'|, \forall\, q' \leq q, \ \dfrac{p}{q} \neq \dfrac{q'}{q'}$ então p/q é uma reduzida da fração contínua de x.

Prova: Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$.

Teremos $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$, e portanto $p/q = p_n/q_n$. $\square$

Teorema 3: Se $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$ então $\dfrac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.

Prova: Seja n tal que $q_n < q \leq q_{n+1}$. Suponha que $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Então, temos duas possibilidades:

a) $\quad q \geq \dfrac{q_{n+1}}{2} \Rightarrow \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \geq \dfrac{1}{q q_{n+1}} \geq \dfrac{1}{2q^2}$.

b) $\quad q < \dfrac{q_{n+1}}{2} \Rightarrow q_{n+1} > 2q_n \Rightarrow \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \geq \left| \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p}{q} \right| - \left| \dfrac{p_{nm}}{q_{nm}} - \dfrac{p_n}{q_n} \right| \geq \dfrac{1}{q q_n} -$

$\dfrac{1}{q_n q_{n+1}} = \dfrac{q_{n+1} - q}{q q_n q_{n+1}} > \frac{1}{2qq_n} > \frac{1}{2q^2}$.

Seção 3: Frações contínuas periódicas

Nesta seção provaremos que os números reais com fração contínua periódica são exatamente as raízes de equações do segundo grau com coeficientes inteiros.

Lembramos que na representação de x por fração contínua, a_n , α_n são definidos por recursão por

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = [\alpha_n], \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \cdot$$

E temos

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Isso dá uma prova explícita do fato de que se a fração contínua de x é periódica, então x é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. De fato, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ então

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}} \quad \Rightarrow (q_{n-1}\, q_{n+k-2} - q_{n-2}\, q_{n+k-1})x^2$$

$$+ (p_{n+k-1}\, q_{n-2} + p_{n-2}\, q_{n+k-1} - p_{n+k-2}\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_{n+k-2})x$$

$$+ p_{n-1}\, p_{n+k-2} - p_{n-2}\, p_{n+k-1} = 0.$$

Note que o coeficiente de x^2 é não-nulo, pois $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível (de fato $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$) de denominador q_{n-2} e $\dfrac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ é uma fração irredutivel de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, donde $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \dfrac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}} \Rightarrow q_{n-1}\, q_{n+k-2} - q_{n-2}\, q_{n+k-1} \neq 0$.

Vamos provar agora um resultado devido a Lagrange segundo o qual se x é uma *irracionalidade quadrática*, isto é, se x é um irracional do tipo $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ então a fração contínua de x é periódica, i.e., existem $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ com $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. Neste caso, existem a, b, c inteiros tais que $ax^2 + bx + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. Como vimos na seção 1,

$$x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}},$$

e portanto

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0,$$

onde

$$A_n = a\,p_{n-1}^2 + b\,p_{n-1}q_{n-1} + c\,q_{n-1}^2$$

$$B_n = 2a\,p_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2c\,q_{n-1}q_{n-2}$$

$$C_n = a\,p_{n-2}^2 + b\,p_{n-2}q_{n-2} + c\,q_{n-2}^2\,.$$

Note que $C_n = A_{n-1}$. Vamos provar que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = a\,p_{n-1}^2 + b\,p_{n-1}q_{n-1} + c\,q_{n-1}^2 = a\,q_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

onde x e $\bar{x}$ são as raízes de $a, X^2 + b\,X + c = 0$, mas

$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \le 1 \Rightarrow |A_n| = a\,q_{n-1}^2 \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

$$\le a\left(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \le a(|\bar{x} - x| + 1) =: M.$$

Notemos agora que $B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac, \forall\, n \in \mathbb{N}$. De fato, $B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac$. Portanto, $B_n^2 \le 4A_nC_n + b^2 - 4ac = 4M^2 + b^2 - 4ac \Rightarrow B_n \le M' = \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Provamos assim que A_n , B_n e C_n estão uniformemente limitados, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$, e portanto de possíveis valores de α_n . Assim, necessariamente $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ para alguma escolha de $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Referências

- N. Beskin - Frações contínuas - Iniciação à Matemática - Editora Mir.
- José Paulo Q. Carneiro - Um processo finito para a raiz quadrada - RPM 34, 1997, pp. 36–44.
- C.D. Olds - Continued Fractions - New Mathematical Library - Random House.
- A.M. Rockett, P. Szüsz - Continued Fractions - World Scientific.

Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Est. D. Castorina 110, 22460-320 Rio de Janeiro, Brasil

e-mail: gugu@impa.br