A Desigualdade Isoperimétrica

Carlos Gustavo T. de A. Moreira
Nicolau Corção Saldanha

A desigualdade isoperimétrica afirma que qualquer curva fechada de comprimento ℓ cerca uma área menor ou igual a $\frac{\ell^2}{4\pi}$ e que este valor só é atingido se a curva for um círculo de raio $\frac{\ell}{2\pi}$. Existem muitas demonstrações conhecidas deste fato. Vamos aqui apresentar uma demonstração simples e totalmente elementar deste teorema. Vamos primeiro demonstrar um resultado análogo para polígonos: dentre os polígonos de n lados com perímetro fixo o de maior área é o regular. Depois veremos como a partir destes resultados demonstrar a desigualdade isoperimétrica usual.

Vamos começar vendo dois resultados de geometria clássica.

Afirmação 0: *Dentre todos os triângulos ABC de base AB fixa e perímetro dado, aquele de maior área é o isósceles. Além disso, dados dois triângulos ABC e ABC' com mesmo perímetro e $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$, a área de ABC é maior que a área de ABC'.*

Esta afirmação é conseqüência fácil da fórmula de Heron: a área de um triângulo de lados a, b e c é dada por

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Afirmação 1: *Dentre todos os quadriláteros com lados dados, aquele de maior área é o inscritível. Mais ainda, se consideramos dois quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com lados correspondentes iguais, se $|\hat{A} + \hat{C} - \pi| < |\hat{A}' + \hat{C}' - \pi|$ então a área de $ABCD$ é maior que a área de $A'B'C'D'$.*

Estas afirmações seguem da fórmula abaixo: a área S de um quadrilátero de lados $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ e $d = \overline{DA}$ e ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ é dada por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}))},$$

onde $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Esta fórmula pode ser obtida elevando ao quadrado o valor de S dado por $S = \frac{1}{2}ad\,\mathrm{sen}\hat{A} + \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\hat{C}$ (este valor é obtido somando as áreas de DAB e BCD) usando a identidade $a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$ (os dois lados dão o quadrado da diagonal BD pela lei dos cossenos).

Afirmação 2: *Dado um polígono não convexo, temos outro polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.*

Para isto, queremos obter dois vértices não consecutivos tais que a reta determinada por eles tem o polígono inteiramente contido em um dos semi-planos por ela determinados. Obteremos o novo polígono substituindo a parte interior da poligonal ligando estes dois pontos pelo segmento que os liga (Fig. 1).

Para obter estes vértices, considere no plano cartesiano o vértice de maior coordenada x, chamemo-lo de P_0. A reta vertical que passa por este ponto tem todo o polígono de um lado. Vamos girar esta reta no sentido anti-horário ao redor deste vértice até encontrarmos o primeiro outro vértice; esta reta ainda tem todo o polígono de um lado. Se a intersecção desta reta com o polígono não for um dos lados, o vértice inicial e o outro que estiver em cima da reta (ou, caso exista mais de um, o mais distante do vértice inicial) serão os dois vértices que buscamos. Caso contrário precisamos continuar nossa busca; obtivemos um lado P_0P_1 *de convexidade* do polígono, i.e., um lado tal que o polígono está inteiramente contido em um dos semi-planos determinados por sua reta suporte. Prosseguimos girando esta reta suporte no sentido anti-horário ao redor de P_1 até encontrarmos um novo vértice. Novamente temos os dois casos acima e se tivermos um novo lado de convexidade continuamos o processo. Este processo ou deve parar (com o sucesso) ou deve resultar em que voltemos até P_0, mas neste caso todos os lados seriam de convexidade e o polígono seria convexo, contradizendo a hipótese.

Se repetirmos o processo descrito na afirmação 2 um número suficiente de vezes chegaremos em um polígono convexo chamado o *fecho convexo*. Nossa construção garante que o conjunto dos vértices do fecho convexo é um subconjunto do conjunto de vértices do polígono original. Mais ainda, o fecho convexo tem número de lados menor, perímetro menor e área maior que o polígono inicial.

Afirmação 3: *Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual, e área maior.*

Demonstramos isto por indução sobre o número de lados. Vamos descrever um processo para a partir de um polígono qualquer obter primeiramente um equilátero e depois um regular com o mesmo número de lados que o inicial, sempre aumentando a área a cada passo. Adotaremos este processo enquanto o polígono for convexo e se em algum momento o polígono for não convexo a afirmação 2 nos fornece um polígono com número de lados menor, área maior e perímetro menor, o que conclui a demonstração por hipótese de indução.

Vamos tornar o polígono equilátero fazendo com que cada um de seus lados seja igual à média ℓ de todos os lados do polígono. Suponha que tenhamos dois lados vizinhos AB e BC, um maior e outro menor que ℓ. Podemos, pela afirmação 0, encontrar um ponto B' para substituir B, mantendo o perímetro fixo e aumentando a área, tornando $\overline{AB'}$ igual a ℓ. Caso não existam dois tais lados vizinhos mas o polígono não seja equilátero, permutaremos os lados de tal forma a chegar nesta situação. De fato, dados dois lados vizinhos AB e BC podemos substituir B por B' de tal forma que $\overline{AB'} = \overline{BC}$, $\overline{B'C} = \overline{AB}$; escolhendo B' do mesmo lado que B em relação à reta AC, a área e o perímetro ficam inalterados. Após uma seqüência finita apropriada de tais permutações, chegaremos na situação descrita acima. Assim aumentaremos o número de lados iguais a ℓ até que o polígono se torne equilátero, sempre aumentando a área.

Vamos agora descrever um processo análogo para tornar o polígono equiângulo e portanto regular, sempre aumentando a área. Vamos chamar os vértices cujos ângulos internos são iguais ao ângulo interno para o polígono regular de *bons* e os demais de *maus*. Observe que não podemos ter menos de quatro ângulos maus a não ser que o polígono seja regular. De fato, suponha um polígono $A_1A_2\ldots A_n$ com únicos vértices possivelmente maus A_i, A_j e A_k. Seja $B_1B_2\ldots B_n$ um polígono regular de mesmo lado ℓ. Os polígonos $A_iA_{i+1}\ldots A_j$ e $B_iB_{i+1}\ldots B_j$ são congruentes, também $A_jA_{j+1}\ldots A_j$ é congruente a $B_jB_{j+1}\ldots B_k$ e $A_kA_{k+1}\ldots A_i$ é congruente a $B_kB_{k+1}\ldots B_i$; além disso, os triângulos $A_iA_jA_k$ e $B_iB_jB_k$ são congruentes. Tudo isto implica que $A_1A_2\ldots A_n$ é regular (Fig. 2).

Em um polígono equilátero mas não regular considere o conjunto dos vértices maus. Podemos tomar neste conjunto dois vértices maus A e B, A com ângulo muito grande e B com ângulo muito pequeno, consecutivos no conjunto dos vértices maus. Considere agora o quadrilátero $ABCD$, onde C é consecutivo a B no conjunto dos vértices maus assim como A é consecutivo a D no mesmo conjunto (Fig. 3). Queremos deformar este quadrilátero no sentido de diminuir os ângulos A e C e aumentar os ângulos B e D até A ou B tornar-se bom. Ao deformar o quadrilátero deformaremos simultâneamente o polígono mantendo rígidos os arcos entre dois vértices consecutivos do quadrilátero. Resta verificar que este processo aumenta a área do quadrilátero e portanto do polígono: para isso, usando a afirmação 1, basta verificar que enquanto A for grande e B for pequeno $A+C$ será maior que π.

Na figura 4, o círculo indicado tem raio igual ao do círculo circunscrito ao polígono regular de lado ℓ. Sejam C' e D' conforme indicado na figura as intersecções de CD com o círculo. Temos $B\hat{A}D > B\hat{A}D'$ e $B\hat{C}D > B\hat{C'}D$ donde $B\hat{A}D + B\hat{C}D > B\hat{A}D' + B\hat{C'}D = \pi$. Isto mostra que sempre podemos aumentar o número de vértices bons até chegarmos ao polígono regular. Isto conclui a demonstração da afirmação 3.

Aliás, observe que o raciocínio usado na parte final da demonstração desta última afirmação mostra que dentre todos os polígonos com lados dados o de maior área é o inscritível; além disso, a ordem dos lados não afeta a área máxima. De fato, basta chamar de 'bom' a um ângulo igual a seu correspondente no polígono inscritível. Devemos continuar o processo mesmo que isso envolva polígonos não convexos ou até entrecruzados. Para isso, é necessário definir a área de um polígono entrecruzado de forma adequada: a área que for cercada várias vezes deve ser contada com a multiplicidade do número de voltas que a poligonal dá a seu redor onde voltas no sentido anti-horário contam positivamente e voltas no sentido horário contam negativamente. Esta definição coincide com a usual para polígonos simples percorridos no sentido anti-horário. Não consideramos este ponto de vista aqui exatamente para evitar estas dificuldades técnicas.

Afirmação 4: *Se $n < m$ a área de um polígono regular de n lados é menor que a área de um polígono regular de m lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

Vamos provar a primeira parte da afirmação por indução sobre m. Para isto basta provar, dado que a afirmação é correta para $n < m \leq m_0$, que a área de um polígono regular de $m_0 + 1$ lados é maior que a área de um polígono regular de m_0 lados com o mesmo perímetro. Considere um polígono regular de m_0 lados e pense nele como um polígono de $m_0 + 1$ lados, sendo um dos lados igual a zero. A afirmação 3 nos fornece, se necessário após uma expansão, um polígono regular de perímetro igual, área maior e número de lados menor ou igual a $m_0 + 1$. Observe que na primeira etapa da construção o lado de tamanho zero será tornado positivo. Este número de lados só pode ser igual a $m_0 + 1$ pois senão estaríamos contradizendo a hipótese de indução.

Para a segunda parte, devemos apenas observar que as áreas dos polígonos de n lados e perímetro dado tendem para a área do círculo de mesmo perímetro quando n cresce. Isto segue do fato de que o polígono regular de perímetro ℓ tem lado maior que o do polígono de mesmo tipo inscrito no círculo de circunferência ℓ e menor do que o do polígono circunscrito a este círculo.

Teorema: (Desigualdade Isoperimétrica) *Toda curva fechada de comprimento ℓ engloba uma área menor ou igual a $\ell^2/4\pi$. Além disso, este valor só é alcançado para o círculo de raio $\ell/2\pi$.*

Suponha que temos uma curva de comprimento ℓ englobando uma área A. Vamos escolher um número inteiro positivo N e tomar N pontos ao longo da curva, igualmente espaçados em termos do comprimento do arco de curva entre eles. Vamos ligar estes pontos por linhas retas para obter um polígono de N lados e perímetro menor que ℓ. Tomemos o fecho convexo deste polígono: seu perímetro é menor que ℓ donde, pelas afirmações anteriores, sua área B é menor que $\ell^2/4\pi$. Consideremos o conjunto dos pontos que ou estão dentro deste fecho convexo ou, estando fora dele, distam menos de $\ell/2N$ de algum dos N pontos originais: a curva original está totalmente contida nesta região pois qualquer ponto da curva dista menos de $\ell/2N$ de algum destes N pontos. Por outro lado, a área desta região será menor ou igual a $B + N\pi(\ell/2N)^2$ pois está contida na união do fecho convexo com N círculos de raio $\ell/2N$ e centros nos N pontos. Assim, $A \leq B + N\pi(\ell/2N)^2 \leq \ell^2/4\pi + \pi\ell^2/4N$, e, como esta estimativa vale para qualquer N, $A \leq \ell^2/4\pi$.

Finalmente, consideremos uma curva de comprimento ℓ englobando área $\ell^2/4\pi$ e vamos provar que ela é um círculo. Primeiro, observemos que ela é convexa. De fato, para uma curva não convexa sempre existe um segmento de reta ligando dois pontos da curva e contido inteiramente no exterior da mesma. Este segmento divide a parte do plano fora da curva em duas regiões, uma limitada e a outra não. Tomando a porção da curva que toca a região ilimitada mais o segmento de reta temos uma nova curva fechada de perímetro menor e área maior, contradizendo o primeiro parágrafo (Fig. 5). Agora, para uma curva convexa distinta do círculo tome quatro pontos não cocirculares. Se deformarmos o quadrilátero com estes quatro vértices mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até o quadrilátero tornar-se inscritível estaremos aumentando a área sem mudar o perímetro (Fig. 6).

IMPA, Estr. D. Castorina 110
Jardim Botânico, Rio de Janeiro
RJ 22460-320, Brasil

gugu@impa.br
nicolau@impa.br, http://www.impa.br/~nicolau/