CONJUNTOS DE CANTOR, BIFURCAÇÕES DINÂMICAS E APROXIMAÇÕES DIOFANTINAS

INTRODUÇÃO

Conjuntos de Cantor desempenham um papel importante em áreas bastante distintas da matemática, como topologia, sistemas dinâmicos, teoria da medida e teoria dos números. O objetivo deste trabalho é descrever como o estudo de delicadas propriedades geométricas de conjuntos de Cantor, ligadas às chamadas dimensões fractais, tem um papel fundamental em determinados aspectos de sistemas dinâmicos, em especial no estudo de bifurcações homoclínicas, e também no estudo de aproximações de números reais por números racionais, particularmente no estudo de propriedades geométricas dos espectros de Markov e Lagrange.

Boa parte deste livro é dedicada ao estudo das técnicas utilizadas pelo autor, em colaboração com J.C. Yoccoz, que permitiram resolver afirmativamente uma conjectura de J. Palis, do início da década de 80, segundo a qual genericamente a diferença aritmética $K_1 - K_2 = \{x - y, x \in K_1, y \in K_2\}$ de dois conjuntos de Cantor regulares K_1 e K_2 ou tem medida nula ou contém um intervalo. Esta conjectura tem estreita relação com o estudo de bifurcações homoclínicas em superfícies, como veremos no Capítulo 2, mas o estudo de propriedades geométricas de somas e diferenças aritméticas de conjuntos de Cantor regulares também tem relevância em outras áreas da matemática, como no estudo dos espectros de Markov e Lagrange, relacionados com aproximações diofantinas.

Discutiremos esses temas no Capítulo 3, onde pretendemos descrever como adaptar técnicas de [MY] para obter resultados geométricos sobre esses espectros, relacionados principalmente com medida e dimensões de Hausdorff.

Este livro têm como referências principais os artigos [M1], [M2], a tese de doutorado do autor (IMPA, 1993) e o Capítulo 4 de [PT2], as quais indicamos para provas detalhadas de vários dos resultados discutidos neste trabalho.

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS DE CANTOR REGULARES E DIMENSÕES FRACTAIS

1.0 Conjuntos de Cantor

Normalmente as pessoas ouvem falar no "Conjunto de Cantor" antes de ouvir falar em "conjuntos de Cantor" em geral. O conjunto de Cantor é um engenhoso exemplo de um subconjunto da reta que é compacto, não-enumerável e totalmente desconexo, que serve como fonte de exemplos interessantes em análise e topologia. O Conjunto de Cantor, que denotaremos por K, pode ser definido de várias maneiras. Por exemplo, K é o conjunto de todos os números do intervalo $[0,1]$ que podem ser escritos em base 3 utilizando apenas os algarismos 0 e 2, ou seja, $K = \left\{ \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{3^n} \ , \ \sigma_n \in \{0,2\}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Outra maneira de descrever o conjunto K é descrevendo explicitamente seu complementar: tomamos o intervalo $[0,1]$, retiramos seu terço central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e obtemos dois intervalos fechados: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Retiramos os terços centrais desses intervalos e obtemos quatro intervalos fechados: $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ e $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Continuamos o processo, sempre retirando os terços centrais dos intervalos restantes. Os pontos do intervalo $[0,1]$ que não pertencem a nenhum dos intervalos retirados formam o conjunto de Cantor K. Notemos que, na n-ésima etapa da construção de K sobram 2^n intervalos de comprimento $1/3^n$ cada, cuja união contém K. Isso implica que K tem medida nula.

A terceira construção do conjunto K que mostraremos a seguir é de particular importância para nós, pois será generalizada para definir conjuntos de Cantor *regulares* ou dinamicamente definidos. Consideremos a função $\psi\colon \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \to [0,1]$ definida por $\psi(x) = \begin{cases} 3x \text{ se } \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 3x - 2 \text{ se } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$. O domínio da função ψ é a primeira etapa da construção anterior do conjunto K. Se denotarmos $\underbrace{\psi \circ \psi \circ \cdots \circ \psi}_{n \text{ vezes}}$ por ψ^n, temos que ψ^n não está definida para todo x. Por exemplo, se $n = 2$ e $x = 0,2$, temos que $\psi(x) = 3x = 0,6$, que não pertence ao domínio de ψ, donde $\psi^2(0,2)$ não está definido. Podemos caracterizar o Conjunto de Cantor K como o conjunto dos $x \in [0,1]$ tais que $\psi^n(x)$ está definido para todo natural n, ou seja, $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^{-n}([0,1])$. Podemos observar que $\psi^{-n}([0,1])$, ou seja, o domínio de ψ^n coincide com o conjunto obtido na n-ésima etapa da construção anterior.

K é claramente compacto, pois pela segunda construção, por exemplo, seu complementar é aberto. Além disso, K é não-enumerável, o que segue do fato de que a primeira construção fornece uma bijeção entre K e $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, que de fato é um homeomorfismo, se dotarmos $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ da topologia produto.

Em geral dizemos que um conjunto de Cantor é um espaço topológico homeomorfo a K. Nosso principal interesse será nos conjuntos de Cantor contidos na reta real, que podem ser caracterizados como os compactos de interior vazio sem pontos isolados.

Em geral, espaços métricos (ou metrizáveis) compactos, totalmente desconexos (i.e., cujas componentes conexas são os pontos) e sem pontos isolados são conjuntos de Cantor (i.e., são homeomorfos a K). Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor. (Sugestão: dado um conjunto como acima, tente decompô-lo como uma união disjunta de abertos e fechados com diâmetro menor que a metade do diâmetro original, repetir o processo e usar isso para reduzir o problema ao caso de subconjuntos da reta. no qual é possível construir homeomorfismos monótonos razoavelmente explícitos).

1.1 Conjuntos de Cantor regulares

Mencionamos que a terceira construção que exibimos para o conjunto K, que o caracteriza como o maximal invariante pela função ψ no intervalo $[0, 1]$ é de particular interesse, pois caracteriza K como um conjunto de Cantor dinamicamente definido. Vamos discutir informalmente algumas propriedades dos conjuntos de Cantor dinamicamente definidos, ou regulares (que serão nosso assunto principal) antes de defini-los mais precisamente. Uma propriedade fundamental do conjunto de Cantor K é a sua *auto-semelhança*: pequenas partes de K são cópias reduzidas de todo o conjunto K. De fato, dado $x \in K$ e $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto aberto e fechado de K contendo x e de diâmetro menor que ε que é semelhante ao conjunto K (por exemplo uma peça de uma etapa avançada da construção de K que contenha o ponto x). Esta semelhança será dada por um certo iterado da função afim expansora ψ.

Os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos, ou regulares, sempre apresentam um certo tipo de auto-semelhança: pequenas partes deles são difeomorfas ao conjunto todo, ou a partes grandes dele, com distorção uniformemente limitada. Assim, aspectos locais desses conjuntos não diferem muito de aspectos globais. Este tipo de propriedade é a principal característica dos conjuntos de Cantor regulares, e está ligada ao fato desses conjuntos, por definição, serem caracterizados como maximais invariantes de funções diferenciáveis expansoras (as quais suporemos de classe pelo menos $C^{1+\varepsilon}$).

Vamos passar a definições mais precisas:

Sejam $I, I_1, I_2, \dots, I_k \subset \mathbb{R}$ intervalos fechados tais que os intervalos I_j, $1 \leq j \leq k$ são disjuntos e I é o fecho convexo de $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$, e seja $\psi: I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k \to I$ uma função expansora de classe $C^{1+\varepsilon}$ para um certo $\varepsilon > 0$, isto é, ψ é de classe C^1, $|\psi'(x)| > 1$ para todo $x \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$ e existe $C > 0$ tal que $|\psi'(x) - \psi'(y)| \leq C|x-y|^\varepsilon \ \ \forall\, x, y \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$. Suponhamos ainda que para todo j com $1 \leq j \leq k$, $\psi(I_j)$ é o fecho convexo de uma união de intervalos I_i, e que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\psi^n(I_j) \supset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$.

Dizemos que o conjunto de Cantor regular $K = K_\psi$ associado à função ψ e à *partição de Markov* $(I_1, I_2, \dots, I_k)$ é o conjunto dos $x \in I$ tais que $\psi^n(x)$ está definido para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é $K_\psi = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi^{-n}(I_1 \cup \dots \cup I_k)$. Se ψ é de classe C^r, com $1 < r \leq \infty$, dizemos que K é um (conjunto de) Cantor regular de classe C^r.

Como indicamos na definição acima, o conjunto dos intervalos I_j com $1 \leq j \leq k$ é denominado a partição de Markov de K. O conjuntos $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$ será chamado de *domínio de Markov* de K, e pode ser visto como a etapa inicial da construção de K.

Para entender melhor a estrutura do conjunto K podemos considerar a *matriz de transição* $B = (b_{ij})_{k \times k}$ associada a uma partição de Markov $(I_1, \dots, I_k)$ e a uma função ψ como acima definida por $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } \psi(I_i) \supset I_j \\ 0, \text{ se } \psi(I_i) \cap I_j = \emptyset \end{cases}$. A condição diz que $\psi^n(I_j) \supset I_1 \cup \dots \cup I_k$ para todo n grande equivale a todos os termos de B^n serem estritamente positivos se n é grande. A uma tal matriz B podemos associar um *shift de Markov mixing de tipo finito*, isto é, o conjunto $\Sigma_B = \{\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots) \subset \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{N}} \mid$

$b_{\theta_i \theta_{i+1}} = 1, \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, no qual está definida a função *shift unilateral* $\sigma\colon \Sigma_B \to \Sigma_B$, por $\sigma((\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots)) = (\theta_2, \theta_3, \ldots)$, isto é, $\sigma((\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\theta_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$.

Veremos que há uma identificação natural entre o par (K, ψ) e o par (Σ_B, σ) (de fato um homeomorfismo que conjuga as dinâmicas). Para cada palavra finita $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{1, 2, \ldots, k\}^n$ dizemos que $\underline{a}$ é uma palavra de Σ_B se existe algum elemento de Σ_B que começa por $\underline{a}$, ou, equivalentemente, se $b_{a_i a_{i+1}} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. A uma tal palavra $\underline{a}$ associamos o intervalo $I_{\underline{a}} = I_{a_1} \cap \psi^{-1}(I_{a_2}) \cap \psi^{-2}(I_{a_3}) \cap \cdots \cap \psi^{-(n-1)}(I_{a_n})$, e a condição $\underline{a}$ ser uma palavra de Σ_B equivale a $I_{\underline{a}}$ ser não-vazio. Por outro lado, a expansividade de ψ faz com que o comprimento $|I_{\underline{a}}|$ do intervalo $I_{\underline{a}}$ seja exponencialmente pequeno se n é grande, isto é, existe $\lambda < 1$ tal que para todo $\underline{a} \in \{1, 2, \ldots, k\}^n$ que é uma palavra de Σ_B (de tamanho n), $|I_{\underline{a}}| < \lambda^n |I|$.

Dado $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots) \in \Sigma_B$, para cada n definimos $\underline{\theta}^{(n)} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$. Note que $\underline{\theta}^{(n)}$ é sempre uma palavra de Σ_B. Podemos definir uma função $h\colon \Sigma_B \to K$ definida por $\{h(\underline{\theta})\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_{\underline{\theta}^{(n)}}$, isto é, $h(\underline{\theta})$ é o único ponto que pertence a $I_{\underline{\theta}^{(n)}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Não é difícil verificar que h é um homeomorfismo, e que $\psi \circ h = h \circ \sigma$, isto é, h é uma conjugação entre σ e ψ. Se $x = h(\underline{\theta})$, dizemos que $\underline{\theta}$ é o endereço do ponto x.

1.2 Distorção limitada e geometrias limite

Vamos agora provar uma proposição de grande importância, segundo a qual conjuntos de Cantor regulares têm a propriedade de *distorção limitada*:

Proposição 1.1: Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor regular, definido por uma função expansora $\psi \in C^{1+\varepsilon}$ como acima. Dado $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$ função decrescente de δ

com $\lim_{\delta \to 0} C(\delta) = 0$ tal que para todo $x, y \in K$ satisfazendo

i) $|\psi^n(x) - \psi^n(y)| \leq \delta$

ii) O intervalo $[\psi^j(x), \psi^j(y)]$ está contido no domínio de Markov $I_1 \cup \cdots \cup I_k$ para $0 \leq j \leq n$ temos $\log|(\psi^n)'(y)| - \log|(\psi^n)'(x)| \leq C(\delta)$.

Prova: Se $\sigma > 1$ é tal que $|\psi'(t)| > \sigma$ para todo t no domínio de Markov, teremos $|\psi^j(y) - \psi^j(x)| \leq \sigma^{1-n} \cdot \delta$ para $0 \leq j \leq n$, donde

$$|\log|(\psi^n)'(y)| - \log|(\psi^n)'(x)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\log|\psi'(\psi^j(y))| - \log|\psi'(\psi^j(x))||,$$

e, como ψ' (e também $\log|\psi'|$) é de classe C^ε, existe $C > 0$ tal que $|\log|\psi'(s)| - \log|\psi'(t)| \leq C|s-t|^\varepsilon$ para s, t no domínio de Markov, donde as expressões acima são majoradas por

$$c\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma^{j-n} \cdot \delta)^\varepsilon < c\delta^\varepsilon \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^{-m\varepsilon} = c\delta^\varepsilon \cdot \frac{\sigma^{-\varepsilon}}{1-\sigma^{-\varepsilon}} \cdot \qquad \square$$

Uma maneira de reformular a proposição acima com significado geométrico mais evidente é dizer que se x, y e z pertencem a um mesmo intervalo $I_{\underline{\theta}^{(n)}}$ da n-ésima etapa da construção de K então

$$e^{-c}\,\frac{|z-x|}{|y-x|} \leq \frac{|\psi^n(z) - \psi^n(x)|}{|\psi^n(y) - \psi^n(x)|} \leq e^c\,\frac{|z-x|}{|y-x|}$$

onde $c = c(|I|)$ é uma constante. Além disso, se $\psi^n(x)$, $\psi^n(y)$ e $\psi^n(z)$ estão próximos, c pode ser tomada pequena. Isto significa que distâncias relativas numa escala microscópica são no máximo distorcidas por um fator constante em relação a distâncias relativas correspondentes numa escala maior, e cada vez menos distorcidas se diminuimos o tamanho da escala maior.

Vamos agora introduzir o conceito de *geometrias limite* de um conjunto de Cantor regular, que dão informações mais precisas sobre a estrutura local de um conjunto de Cantor regular.

Para isto, seja K um conjunto de Cantor regular e Σ_B seu shift de Markov associado. Vamos considerar o shift dual associado a Σ_B, denotado por Σ_B^-, dado por $\Sigma_B^- - \{\underline{\theta} = (\theta_n)_{n \leq 0},\ f_{\theta_i \theta_{i+1}} = 1, \forall\, i < 0\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}^{\mathbb{Z}^-}$.

Dados $\underline{\theta} \neq \underline{\tilde{\theta}}$ em Σ_B^-, definimos $\underline{\theta} \wedge \underline{\tilde{\theta}}$ como $(\theta_{-n}, \theta_{1-n}, \ldots, \theta_0) \in \{1, 2, \ldots, k\}^{n+1}$, onde n é tal que $\tilde{\theta}_{-j} = \theta_{-j}$ para $0 \leq j \leq n$ e $\tilde{\theta}_{-n-1} \neq \theta_{-n-1}$, e equipamos Σ_B^- com a seguinte distância:

$$d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \theta_0 \neq \tilde{\theta}_0 \\ |I_{\underline{\theta} \wedge \underline{\tilde{\theta}}}|, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dado $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-$ e $n > 0$, definimos $\underline{\theta}^n = (\theta_{-n}, \ldots, \theta_0)$, e $B(\underline{\theta}^n)$ como sendo a função afim que leva $I_{\underline{\theta}^n}$ em I_{θ_0} tal que o difeomorfismo $k_n^{\underline{\theta}} = B(\underline{\theta}^n) \circ f_{\underline{\theta}^n}$ preserva orientação, onde $f_{\underline{\theta}^n} := \left(\psi^n\big|_{I_{\underline{\theta}^n}}\right)^{-1}$.

Com essas definições, $k_n^{\underline{\theta}}$ é um difeomorfismo de I_{θ_0} em I_{θ_0}, e a imagem de $K \cap I_{\theta_0}$ por $k_n^{\underline{\theta}}$ é uma cópia ampliada de $K \cap I_{\underline{\theta}^n}$.

Com essas notações, temos o seguinte resultado, que caracteriza as geometrias limite de um Cantor regular (ver [Su]):

Proposição 1.2: Seja $r \in (1, +\infty)$, e K um conjunto de Cantor regular de classe C^r como acima, então:

i) Para cda $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-$ existe um difeomorfismo de classe C^r que preserva orientação $k^{\underline{\theta}} = I_{\theta_0} \to I_{\theta_0}$ tal que $k_n^{\underline{\theta}}$ converge a $k^{\underline{\theta}}$ na topologia C^α para todo $\alpha < r$. A convergência é uniforme numa C^r-vizinhança de ψ.

ii) Se $r \geq 2$ é um inteiro então $k_n^{\underline{\theta}}$ converge a $k^{\underline{\theta}}$ em $\mathrm{Diff}_+^r(I_{\theta_0})$. Além disso, existe $C > 0$ tal que $||k_n^{\underline{\theta}} - k^{\underline{\theta}}||_{C^{r-1}} \leq C|I_{\underline{\theta}^n}|$.

Do item ii) segue que $\underline{\theta} \to k^{\underline{\theta}}$ é Lipschitziana: $||k^{\underline{\theta}} - k^{\underline{\tilde{\theta}}}||_{C^{r-1}} \leq C \cdot d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}})$, $\forall\, \underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}} \in \Sigma_B^-$. Além disso, se $r = 1 + \alpha$, com $0 < \alpha < 1$, então, para

$$||k^{\underline{\theta}} - k^{\underline{\tilde{\theta}}}||_{C^1} \leq C \cdot d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}})^\beta, \ \forall\, \underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}} \in \Sigma_B^- .$$

Esta proposição diz que conjuntos de Cantor regulares têm a seguinte propriedade: se ampliarmos a interseção de um conjunto de Cantor regular K com intervalos pequenos de sua construção, obtemos conjuntos de Cantor difeomorfos a partes fixas de todo o conjunto K (as interseções $K \cap I_a$, com $a \in \{1, 2, \ldots, k\}$), estando esses difeomorfismos muito próximos da família compacta $\{k^{\underline{\theta}}, \underline{\theta} \in \Sigma_B^-\}$ que tem dimensão de Hausdorff finita por exemplo na métrica C^1 (ver a próxima seção sobre dimensão de Hausdorff).

Definimos, para $\underline{\theta} \in \Sigma_B^-$, o conjunto de Cantor $K^{\underline{\theta}} := k^{\underline{\theta}}(K)$. Os conjuntos $K^{\underline{\theta}}$ são conjuntos de Cantor regulares tão diferenciáveis quanto K, e são conhecidos como as *geometrias limite* de K.

Demonstração: A prova da Proposição 1.2 não é muito difícil. De fato, $k_n^{\underline{\theta}} = B(\underline{\theta}^n) \circ f_{\underline{\theta}^n}$, onde $f_{\underline{\theta}^n} = \left(\psi|_{I_{\underline{\theta}^n}}\right)^{-1}$ pode ser escrito como $g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1$, onde, para $1 \leq k \leq n$, $g_k = g_k^{\underline{\theta}}: I_{\theta_0} \to I_{\theta_0}$ é dada por $g_k = A_k \circ \left(\psi|_{I_{\underline{\theta}}^k}\right)^{-1} \circ A_{k-1}^{-1}$, e os $A_k: I_{\underline{\theta}^k} \to I_{\theta_0}$ são difeomorfismos afins tais que A_0 é a identidade e g_k preserva orientação para todo K.

O resultado segue do fato de que os difeomorfismos g_k, para K grande, estão exponencialmente perto da identidade (de modo uniforme em $\underline{\theta}$), nas topologias indicadas no enunciado da proposição, e portanto a composição deles converge exponencialmente nessas topologias. Os detalhes ficam como exercício para o leitor. $\square$

1.3 Dimensões fractais

1.3.1 - A dimensão de Hausdorff

Quase todos os conjuntos de Cantor que consideramos neste livro têm medida de Lebesgue nula. Entretanto, há medidas mais finas do tamanho de subconjuntos da reta (e, em geral, de um espaço métrico). Começaremos pelo conceito que será mais importante para nós: a dimensão de Hausdorff:

Se X é um espaço métrico compacto e $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ é uma cobertura finita de X, definimos a medida de Hausdorff de dimensão $\alpha > 0$ associada à cobertura $\mathcal{U}$ por $m_\alpha(\mathcal{U}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(U_i)^\alpha$, onde

$$\operatorname{diam}(U_i) = \sup_{x,y \in U_i} d(x,y) \quad \text{é o diâmetro de } U_i\,,$$

e definimos a medida de Hausdorff de dimensão α de X por $m_\alpha(X) = \liminf\limits_{||\mathcal{U}|| \to 0} m_\alpha(\mathcal{U})$, onde U denota uma cobertura finita de X e $||\mathcal{U}|| = \max\limits_{U \in \mathcal{U}} (\operatorname{diam} U)$ é a norma da partição $\mathcal{U}$. É fácil mostrar que existe um único h em $[0, +\infty]$ tal que se $\alpha < h$ então $m_\alpha(X) = +\infty$ e se $\alpha > h$ então $m_\alpha(X) = 0$. Esse número h é, por definição, a *dimensão de Hausdorff* de X. A dimensão de Hausdorff tem algumas propriedades importantes. Uma delas é que, se $f\colon X \to X$ é Lipschitziana e $K \subset X$ tem dimensão de Hausdorff d então $f(K)$ tem dimensão de Hausdorff menor ou igual a d. Em particular, se X e Y são intervalos fechados e f é um difeomorfismo então as dimensões de Hausdorff de

K e $f(K)$ são iguais. Outra observação simples é que se $K \subset \mathbb{R}^n$ tem dimensão de Hausdorff menor que n então tem medida de Lebesgue nula.

É possível provar que a dimensão de Hausdorff de conjuntos de Cantor regulares da reta depende continuamente da dinâmica que os define (mesmo na topologia C^1), e, no caso da dinâmica ser pelo menos $C^{1+\varepsilon}$, está sempre estritamente entre 0 e 1, e a medida de Hausdorff correspondente é finita e positiva no conjunto de Cantor (ver [PT2]).

Podemos definir outra dimensão fractal, a *capacidade limite*, como segue: Se K é um espa co métrico compacto, definimos $N_\varepsilon(K)$ como sendo o número mínimo de conjuntos de Diâmetro menor ou igual a ε necessários para cobrir K. A capacidade limite de K é, por definição, $d(K) = \limsup_{\varepsilon \to 0} -\dfrac{\log N_\varepsilon(K)}{\log \varepsilon}\cdot$ É possível provar que, se K é um conjunto de Cantor regular (mesmo que apenas de classe C^1) então sua dimensão de Hausdorff coincide com sua capacidade limite (ver [PT2]). Também é verdade que, se $f\colon X \to Y$ é Lipschitziana e $K \subset X$ então $d(f(K)) \le d(K)$ e que $d(K_1 \times K_2) \le d(K_1) + d(K_2)$. Além disso, em geral a dimensão de Hausdorff de K é sempre menor ou igual a $d(K)$ (às vezes a desigualdade é estrita, como por exemplo se $K = \{0\} \cup \{1/n,\ n \text{ inteiro positivo}\}$, que tem dimensão de Hausdorff 0 e capacidade limite 1/2).

Deixamos a prova destas últimas afirmações como exercício para o leitor.

1.3.2 - Espessuras

Definição: Um *gap* de um conjunto de Cantor é uma componente conexa de seu complementar.

Dado um gap U de um conjunto de Cantor K, associamos a ele os intervalos

E_U e D_U, que são os intervalos à sua esquerda e à sua direita que o separam dos gaps maiores que ele mais próximos:

Definimos

$\tau_D(U) = \dfrac{|D_U|}{|U|},\ \tau_E(U) = \dfrac{|E_U|}{|U|},$

$\tau_D(K) = \inf\{\tau_D(U)|U$ gap limitado de $K\}$, a *espessura direita* de K;

$\tau_E(K) = \inf\{\tau_E(U)|U$ gap limitado de $K\}$, a *espessura esquerda* de K, e

$\tau(K) = \min\{\tau_D(K), \tau_E(K)\}$, a *espessura* de K.

Observação: Dado um conjunto de Cantor K, uma apresentação de K é uma enumeração $\{U_1, U_2, \dots\}$ de seus gaps limitados. Podemos definir os intervalos E_U e D_U como sendo os intervalos entre U e os gaps de índice menor que o de U mais próximos. No nosso caso estamos usando a apresentação pela ordem de tamanho dos gaps, o que maximiza a espessura $\tau(K)$. Veja [PT2].

A importância das espessuras reside no seguinte resultado, que é uma adaptação do "gap lemma".

Afirmação: Dados K_1 e K_2 conjuntos de Cantor, se $\tau_D(K_1) \cdot \tau_E(K_2) > 1$ e $\tau_E(K_1) \cdot \tau_D(K_2) > 1$, então ou K_1 está contido num gap de K_2 ou K_2 está contido num gap de K_1 ou $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Observação: Isso vale em particular se $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$, que é a hipótese do "gap lemma" clássico. O gap lemma tal como enunciado aqui fornece mais informação, como veremos adiante.

Demonstração: Considere o caso em que nenhum dos K_i's está contido num gap do outro. Então existe um par de gaps encaixados, como nas figuras abaixo (dizemos nesse caso que K_1 e K_2 estão *intercalados*)

a)

Como $\tau_D(U_1)\tau_E(U_2) > 1$, ou $|D_{U_1}| > |U_2|$ ou $|E_{U_2}| > |U_1| \Rightarrow$ existe novo par de gaps como em b) menor que o par (U_1, U_2)

b)

Como $\tau_E(U_1)\tau_D(U_2) > 1$, ou $|E_{U_1}| > |U_2|$ ou $|D_{U_2}| > |U_1| \Rightarrow$ existe novo par de gaps como em a) menor que o par (U_1, U_2).

Em qualquer caso obtemos um par de gaps menor, por exemplo no sentido de que a soma dos comprimentos dos gaps dos pares decresce, e reaplicando o argumento obtemos uma seqüência de pares de gaps convergindo a um ponto que necessariamente pertence a $K_1 \cap K_2$. $\square$

Podemos definir, para $p \in K$, $\tau_{\text{loc}}(K,p) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \tau(\overline{K \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon)})$, e analogamente $(\tau_D)_{\text{loc}}(K,p)$ e $(\tau_E)_{\text{loc}}(K,p)$. Para conjuntos de Cantor dinamicamente definidos, $\tau_{\text{loc}}(K,p)$ não depende de p (ver [PT2]), e a mesma prova mostra que $(\tau_D)_{\text{loc}}(K,p)$ e $(\tau_E)_{\text{loc}}(K,p)$ também não dependem de p. Vamos, portanto, denotá-los por $\tau_{\text{loc}}(K)$, $(\tau_D)_{\text{loc}}(K)$ e $(\tau_E)_{\text{loc}}(K)$ (as *espessuras locais* de K).

A afirmação acima implica que se $(\tau_D)(K_1) \cdot (\tau_E)(K_2) \geq 1$ e se $(\tau_E)(K_1) \cdot (\tau_D)(K_2) \geq 1$ então $K_1 - K_2$ contém intervalo.

Como conseqüência, se $(\tau_D)_{\text{loc}}(K_1) \cdot (\tau_E)_{\text{loc}}(K_2) > 1$ e $(\tau_E)_{\text{loc}}(K_1) \cdot (\tau_D)_{\text{loc}}(K_2) > 1$ então $K_1 - K_2$ contém intervalo. Para este último resultado necessitamos desigualdades estritas.

fato, no exemplo de Sannami de um conjunto de Cantor dinamicamente definido K com $\lambda(K-K) > 0$ e $\text{int}(K-K) = \emptyset$ temos $\tau_{\text{loc}}(K) = 1$. (Ver Exemplo 4 da Seção 2.1.4.2).

CAPÍTULO 2

INTERSEÇÕES ESTÁVEIS DE CONJUNTOS DE CANTOR REGULARES

2.1 Diferenças aritméticas, interseções estáveis e bifurcações homoclínicas

2.1.0 - Conjuntos de Cantor e Bifurcações Homoclínicas: definições básicas

Dado um difeomorfismo $\varphi\colon M \overset{C^k}{\to} M$ de uma superfície e p um ponto fixo de φ, definimos

$$W^s(p) := \{x \in M \mid \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x) = p\} \quad \Big(\text{a } \textbf{variedade estável de } p\Big)$$

$$W^u(p) := \{x \in M \mid \lim_{n\to-\infty} \varphi^n(x) = p\} \quad \Big(\text{a } \textbf{variedade instável de } p\Big).$$

É possível provar que se $\varphi \in C^k$ então $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são variedades C^k.

Dizemos que x é um *ponto homoclínico* associado a p se $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$, e que se $W^s(p)$ for tangente a $W^u(p)$ em x então existe uma *tangência homoclínica* em x associada a p.

Seja $\Lambda \subset M$. Dizemos que Λ é um conjunto hiperbólico para $\varphi\colon M \to M$ se $\varphi(\Lambda) = \Lambda$, e existe uma decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ tal que $D\varphi|_{E^s}$ é uniformemente contrativa e $D\varphi|_{E^u}$ é uniformemente expansora. Dado $x \in \Lambda$, definimos

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(\varphi^n(y), \varphi^n(x)) = 0\} \qquad \text{e}$$

$$W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n\to-\infty} d(\varphi^n(y), \varphi^n(x)) = 0\},$$

que são variedades C^k. A união dessas variedades forma folheações $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ que podem ser estendidas a uma vizinhança de Λ e são φ-invariantes.

O conjunto não-errante de $\varphi, \Omega(\varphi)$, é definido por:

$$\Omega(\varphi) := \{x \in M \mid \forall \text{ vizinhança } U(x),\ \exists n \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ tal que } \ \varphi^n(U(x)) \cap U(x) \neq \emptyset\}.$$

Dizemos que φ é hiperbólico se $\Omega(\varphi)$ é hiperbólico. Uma família a um parâmetro (φ_μ) de difeomorfismos de M^2 tem uma Ω-explosão homoclínica em $\mu = 0$ se

i) Para $\mu < 0$, φ_μ é persistentemente hiperbólico

ii) $\Omega(\varphi_0) = \Lambda \cup \mathcal{O}$ onde Λ é hiperbólico e $\mathcal{O}$ é uma órbita de tangência homoclínica associada a um ponto fixo de sela p, tal que $W^s(p)$ e $W^u(p)$ têm tangências quadráticas nos pontos de $\mathcal{O}$.

Considere uma tangência homoclínica associada a um ponto de sela P de um difeomorfismo φ de uma variedade de dimensão 2. Suponha que P pertença a um conjunto básico Λ (do tipo de um horseshoe). A interseção da variedade estável local de P com Λ é um conjunto de Cantor regular que denotaremos por K^s, e a interseção da variedade instável local de P com Λ é outro conjunto de Cantor regular que denotaremos por K^u.

Se q é o ponto de tangência, ao desdobrarmos a tangência por meio de uma família genérica φ_μ ($\varphi_0 = \varphi$) de difeomorfismos, teremos uma "linha de tangências" ℓ transversal a $W^s(p)$ passando por P (ℓ é o conjunto dos pontos de tangência entre as folheações estável $\mathcal{F}^s$ e instável $\mathcal{F}^u$ de Λ estendidas a uma vizinhança), e as interseções de ℓ com a folheação instável e estável de Λ são difeomorfas a K^s e K^u, respectivamente, para $\mu = 0$. Chamaremos essas interseções de $(K_1)_\mu$ e $(K_2)_\mu$. Se $(K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset$, estaremos criando nova tangência entre $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$, caso em que φ_μ não será persistentemente hiperbólico. Com algumas hipóteses genéricas podemos concluir (talvez via reparametrização) que o par $((K_1)_\mu, (K_2)_\mu)$ está próximo do par $(K_1, K_2 + \mu)$ (embora possa haver deformações internas) o que nos leva a indagar sobre o tamanho do conjunto $\{\mu \mid K_1 \cap (K_2 + \mu) \neq \emptyset\} = K_1 - K_2 = \{x - y \mid x \in K_1, \text{ e } y \in K_2\}$. Dizemos que $K_1 - K_2$ é a *diferença aritmética* entre K_1 e K_2. Existem resultados parciais sobre esse problema. Por exemplo, se a soma das dimensões de Hausdorff de K_1 e K_2 é menor que 1 então $K_1 - K_2$ terá medida nula. Por outro lado, se o produto das espessuras (ver seção II) de K_1 e K_2 é maior que 1 então $K_1 - K_2$ conterá um intervalo.

Se $K_0 = [a, b]$ e $K_1 = [a, x_1]$ é usual supor $\psi_1 \colon K_1 \to K_0$ crescente e sobrejetiva (é o que acontece para conjuntos de Cantor associados a conjuntos hiperbólicos). Isso corresponde à auto-semelhança de K (talvez com distorção). Nesse caso, existe um difeomorfismo $\alpha \colon K_0 \to K_0$ com $\alpha'(a) = 1$, tal que $\alpha \circ \psi_1 \circ \alpha^{-1}$ é linear, pois $|\psi_1'(a)| > 1$. Nesse caso o conjunto $\tilde{K} = \alpha(K)$ definido pelas funções $\tilde{\psi}_i = \alpha \circ \psi_i \circ \alpha^{-1}$ é auto-semelhante (tem $\tilde{\psi}_1$ linear), e é chamado o *linearizado* de K. Para maiores detalhes sobre a relação entre conjuntos de Cantor dinamicamente definidos e bifurcações homoclínicas veja [PT2].

2.1.1 - Interseções de conjuntos de Cantor e diferenças aritméticas

Como vimos em I.1, o estudo de bifurcações homoclínicas leva naturalmente ao estudo de interseções de conjuntos de Cantor dinamicamente definidos. Numa primeira aproximação, leva ao estudo de diferenças aritméticas de conjuntos de Cantor. Sobre isso, existia uma conjectura de Jacob Palis segundo a qual a diferença aritmética entre dois conjuntos de Cantor dinamicamente definidos ou tem medida nula ou contém intervalo. Foi dado um contra-exemplo para essa conjectura por A. Sannami ([S]), mas esse contra-exemplo é rígido o suficiente para que se continue conjecturando que genericamente a afirmação de Palis é verdadeira. Para conjuntos de Cantor afins (cuja definição veremos daqui a pouco) não há nenhum contra-exemplo, e a conjectura permanece sem restrições.

Neste trabalho iremos abordar um conceito relacionado com o da diferença aritmética, porém mais básico: o da *interseção estável*. Dizemos que dois conjuntos de Cantor dinamicamente definidos K_1 e K_2 têm *interseção estável* se existe uma vizinhança do par (K_1, K_2) (Em alguma topologia razoável. Aqui trabalharemos quase sempre com a topologia $C^{1+\varepsilon}$, que definiremos em breve) tal que para todo par $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ nessa vizinhança $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \neq \emptyset$.

Existem relações entre os conceitos de diferença aritmética e de interseção estável. Uma relação óbvia entre os dois conceitos é que, se K_1 intersecta K_2 estavelmente, então $K_1 - K_2$ contém intervalo. Mais geralmente, se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que K_1 intersecta $(K_2 + t)$ estavelmente então $t \in \operatorname{int}(K_1 - K_2)$. Na direção da recíproca, temos o seguinte resultado abstrato (que perdeu o interesse no caso geral em virtude dos resultados do autor e de Yoccoz sobre a conjecture de Palis, mas pode ser aplicado, por exemplo, no caso afim ou no caso C^1, onde continuam em aberto as versões correspondentes da conjectura de Palis.

Teorema: Suponha que exista um aberto U de pares de conjuntos de Cantor tal que se $(K_1, K_2) \in U$ e $t \in \mathbb{R}$ então K_1 não tem interseção estável com $(K_2 + t)$. Então existe $R \subset U$ residual tal que $(K_1, K_2) \in R \Rightarrow \text{int}(K_1 - K_2) = \emptyset$.

Demonstração: Seja $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ uma enumeração dos racionais, e seja $U_n = \{(K_1, K_2) \in U \mid K_1 \cap (K_2 + r_n) = \emptyset\}$. Por hipótese, U_n é denso, e claramente U_n é aberto (é aberto até na topologia dada pela métrica de Hausdorff). Portanto, $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ é residual, e $(K_1, K_2) \in R \Rightarrow K_1 \cap (K_2 + t) = \emptyset, \quad \forall\, t \in \mathbb{Q} \Rightarrow (K_1 - K_2) \cap \mathbb{Q} = \emptyset \Rightarrow \text{int}(K_1 - K_2) = \emptyset$. $\square$

Observação: Esse resultado é verdade em qualquer topologia mais fina que a topologia C^0. Em geral, trabalharemos com a topologia $C^{1+\varepsilon}$, na qual um conjunto de Cantor K definido por uma função expansora ψ e com partição de Markov $(K_1, \dots, K_r)$ está próximo de um conjunto $\tilde{K}$ definido por $\tilde{\psi}$ com partição de Markov $(\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_r) \leftrightarrow r = r'$, $(K_1, \dots, K_r)$ está próximo (os extremos de K_i estão próximos dos correspondentes extremos) de $(\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_r)$ e, supondo que $\psi \in C^{1+\varepsilon}$ com constante de Hölder C, exigimos que, para que $\tilde{K}$ esteja próximo de $K, \tilde{\psi}$ pertença a $C^{1+\tilde{\varepsilon}}$ com constante de Hölder $\tilde{C}$ de forma que $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{C})$ está próximo de (ε, c) e que $\tilde{\psi}$ esteja próximo de ψ na topologia C^1.

Essa topologia é natural pois de um lado garante o controle da distorção de K e de $\tilde{K}$ (ver [PT2]). Em particular, se K tem distorção pequena então $\tilde{K}$ também terá, desde que suficientemente próximo de K (em muitos exemplos usaremos esse fato com K afim, ou seja, sem distorção). Por outro lado, os conjuntos K^s e K^u associados a um difeomorfismo φ dependem continuamente de φ na toplogia $C^{1+\varepsilon}$.

Usaremos freqüentemente o conceito de conjuntos de Cantor afins. Dizemos que K é afim se as funções ψ_i que o definem são afins e sobrejetoras. Isso implica que K é semelhante (sem distorção) a $K \cap K_i, \quad 1 \leq i \leq r$. Se não supomos sobrejetividade das ψ_i, dizemos que K é afim generalizado. Vamos fixar uma notação para um certo tipo de conjunto de Cantor afim, que será muito utilizado em exemplos:

Quando nos referimos ao "conjunto de Cantor afim

queremos dizer o conjunto definido com esse domínio de Markov por transformações afins sobrejetivas crescentes.

Estudar interseções estáveis tem a vantagem de ser um problema mais básico e de aplicação mais imediata a dinâmica que o estudo de diferenças aritméticas. Resultados sobre diferença aritmética necessitam por vezes de adaptações não triviais para se transformarem em teoremas de dinâmica, como por exemplo no teorema de Palis e Yoccoz ([PY]), onde foi necessária uma adaptação fina do teorema de Marstrand para garantir tangências com densidade positiva em $\mu = 0$ sob a hipótese de $HD(K^s) + HD(K^u) > 1$ (O teorema de Marstrand diz que nesse caso para quase todo $\lambda \in \mathbb{R}, K^s - \lambda K^u$ tem medida positiva), mesmo assim com a necessidade de considerar famílias a 2 parâmetros. Veremos agora uma relação entre interseções estáveis e dinâmica:

Teorema: No caso da bifurcação homoclínica, se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(\tilde{K}_1)_0$ intersecta

$((\tilde{K}_2)_0 + t)$ estavelmente, onde $(\tilde{K}_1)_0$ e $(\tilde{K}_2)_0$ são os linearizados de $(K_1)_0$ e $(K_2)_0$, respectivamente então o conjunto $\{\mu > 0 \mid (K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset\}$ contém um aberto com densidade positiva em $\mu = 0$.

Demonstração: Temos K^s e K^u difeomorfos a conjuntos de Cantor autosemelhantes com autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, onde λ_1 e λ_2 são autovalores de $D\varphi(p)$. Quando μ varia, K^s e K^u admitem continuações K^s_μ e K^u_μ, difeomorfos a conjuntos de Cantor autosemelhantes com autovalores $(\lambda_1)_\mu$ e $(\lambda_2)_\mu$ (os autovalores de $D\varphi_\mu$): $K^s_\mu = f_\mu(\tilde{K}^s_\mu)$ e $K^u_\mu = g_\mu(\tilde{K}^u_\mu)$, onde $(\lambda_1)_\mu \cdot \tilde{K}^s_\mu \subset \tilde{K}^s_\mu$, $(\lambda_2)^{-1}_\mu \tilde{K}^u_\mu \subset \tilde{K}^u_\mu$, $f'_\mu(0) = g'_\mu(0) = 1$ ($\tilde{K}^s_\mu$ e $\tilde{K}^u_\mu$ são os linearizados de K^s_μ e K^u_μ). Pela diferenciabilidade da família (φ_μ) em relação a μ deduzimos que existe $K > 0$ tal que $|(\lambda_i)_\mu - \lambda_i| \leq K\,|\mu|\,, \quad i = 1, 2$. Além disso, existem difeomorfismos $(h_1)_\mu$ e $(h_2)_\mu$ que variam $C^{1+\varepsilon}$-continuamente com μ tais que $(K_1)_\mu = (h_1)_\mu \cdot K^s_\mu$ e $(K_2)_\mu = (h_2)_\mu \cdot K^u_\mu$. Se $(\tilde{h}_1)_\mu = h_\mu \circ f_\mu$ e $(\tilde{h}_2)_\mu = (h_2)_\mu \circ g_\mu$ então $(K_1)_\mu = (\tilde{h}_1)_\mu \cdot \tilde{K}^s_\mu$ e $(K_2)_\mu = (\tilde{h}_2)_\mu \cdot \tilde{K}^u_\mu$. Sejam $a = (\tilde{h}_1)'_0(p)$ e $b = (\tilde{h}_2)'_0(p)$.

Por hipótese, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se (K, K') está próximo de $(K_1)_0, (K_2)_0 + t$, com $|t - t'| < \varepsilon$, então K intersecta K' estavelmente. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|\lambda_1^m \lambda_2^n - 1|$ seja suficientemente pequeno. Suporemos, talvez via uma reparametrização da família (φ_μ), que $(\tilde{h}_1)_\mu(p) = \mu$ e $(\tilde{h}_2)_\mu(p) = 0$ (em uma dada parametrização de ℓ_μ). Então, afirmamos que para $\mu \in (\lambda_2^{-n}(t-\varepsilon), \lambda_2^{-n}(t+\varepsilon))$, onde n é suficientemente grande, teremos $(K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset$. De fato, temos $(\lambda_1)^m_\mu\, \tilde{K}^s_\mu \subset \tilde{K}^s_\mu$ e $(\lambda_2)^{-n}_\mu\, \tilde{K}^u_\mu \subset \tilde{K}^u_\mu$. Basta provar, portanto, que $(\tilde{h}_1)_\mu\,((\lambda_1)^m_\mu\, \tilde{K}^s_\mu) \cap (\tilde{h}_2)_\mu\,((\lambda_2)^{-n}_\mu\, \tilde{K}^u_\mu) \neq \emptyset$, ou, equivalentemente, que $(\lambda_1)^{-m}_\mu\,(\tilde{h}_1)_\mu\,((\lambda_1)^m_\mu\, \tilde{K}^s_\mu) \cap (\lambda_1)^{-m}_\mu\,(\tilde{h}_2)_\mu\,((\tilde{\lambda}_2)^{-n}_\mu\, \tilde{K}^u_\mu) \neq \emptyset$, mas isso seguirá do fato de que o primeiro conjunto está próximo de $a\tilde{K}^s_0 + \lambda_1^{-m}\mu$ na topologia $C^{1+\varepsilon}$, e o segundo está próximo de $b\tilde{K}^u_0$, pois $a\tilde{K}^s_0 = (\tilde{K}_1)_0$ e $b\tilde{K}^u_0 = (\tilde{K}_2)_0$ (são os linearizados de conjuntos de Cantor difeomorfos. Isso segue da unicidade da linearização com derivada em 0 dada). Para provar esses fatos, basta observar que $(\tilde{h}_1)_\mu(x) \sim ax + \mu$ e $(\tilde{h}_2)_\mu(x) \sim bx$, para x próximo de 0, e que $\lambda_1^m/(\lambda_1)_\mu^m$ e $\lambda_2^n/(\lambda_2)_\mu^n$ estão próximos de 1 se m e n são suficientemente grandes.

Nossas últimas afirmações vêm do fato de $|(\lambda_i)_\mu - \lambda_i| \leq K\,|\mu| \leq K'\lambda_2^{-n} \leq K^{''}\lambda_1^m$, onde K, K' e $K^{''}$ são constantes. Assim, por exemplo, $((\lambda_1)_\mu/\lambda_1)^m \sim (1 \pm K^{''}\lambda_1^{m-1})^m \sim 1$, pois $m\lambda_1^{m-1} \to 0$ se $m \to \infty$.

Para concluir que $\liminf\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\lambda(\{\mu \in [0,\delta] \mid (K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset\})}{\delta} > 0$ basta provar que

(*) Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $K \in \mathbb{N}$ existem m com $K \leq m \leq K + N$ e $n \in \mathbb{N}$ com $|\lambda_1^m \lambda_2^n - 1|$ suficientemente pequeno, mas isso segue do fato de que

(**) Existem N', $N^{''} \in \mathbb{N}$ tais que $\lambda_1^{N'}\lambda_2^{N^{''}}$ está muito próximo de 1 (pois isso equivale a $N' \log\lambda_1 + N^{''}\log\lambda_2 \sim 0$, o que se pode obter tanto se $\log\lambda_1/\log\lambda_2$ for irracional, pelo teorema de Dirichlet, quanto se $\log\lambda_1/\log\lambda_2 = -p/q,\ p, q \in \mathbb{N}$, caso em que podemos tomar $N' = q$ e $N^{''} = p$).

De fato, para provar (*) a partir de (**), observemos que se $\lambda_1^{N'}\lambda_2^{N^{''}} = \lambda_1^\tau$ com $|\tau|$ muito pequeno. Temos 2 casos:

- $\tau = 0$: Tome $N = N'$, $m = KN'$ e $n = KN^{''} (K \in \mathbb{N})$

- $\tau \neq 0$: Tome $\tilde{N} = \left[\dfrac{1}{|\tau|}\right] + 1$, $N = N'\tilde{N}$, $m = N'\left|\left[\dfrac{K}{\tau}\right]\right| - K\dfrac{\tau}{|\tau|}$ e

$$n = N'' \left| \left[\frac{K}{\tau} \right] \right| \quad (K \in \mathbb{N}).$$

Observação 1: Se $\dfrac{\log \lambda_1}{\log \lambda_2} \notin \mathbb{Q}$, basta supor que existem $\alpha > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha(\tilde{K}_1)_0$ intersecta $(\tilde{K}_2)_0 + t$ estavelmente.

Observação 2: As hipóteses do Teorema I.2 são abertas, e como escólio pode-se obter uma cota inferior positiva uniforme numa vizinhança da família (φ_μ) para $\liminf\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\lambda(\{\mu \in [0,\delta]\}(K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset\})}{\delta}$.

Consideraremos agora um conceito mais forte que o da interseção estável.

Dizemos que o par de conjuntos de Cantor (K_1, K_2) tem *interseção extremal estável* se o extremo direito de K_1 coincide com o extremo esquerdo de K_2, e para qualquer par de conjuntos de Cantor $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ próximo de (K_1, K_2), tais que os intervalos suportes de $\tilde{K}_1$ e de $\tilde{K}_2$ tenham interseção não vazia, vale $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \neq \emptyset$. Isso implica em particular que K_2 intersecta $K_1 + t$ estavelmente para todo $t > 0$ suficientemente pequeno.

A importância deste conceito para o estudo de bifurcações homoclínicas é o seguinte: se numa bifurcação homoclínica como antes os conjuntos K_1 e K_2 tiverem interseção extremal estável então $\{\mu > 0 | (K_1)_\mu \cap (K_2)_\mu \neq \emptyset\}$ contém um intervalo do tipo $[0, \delta]$ para algum $\delta > 0$.

No decorrer deste trabalho encontraremos condições que garantem interseção estável e interseção extremal estável para conjuntos de Cantor dinamicamente definidos.

2.1.2 - Não-interseções e hiperbolicidade

Faremos agora uma definição: dados conjuntos de Cantor K_1 e K_2 com domínios de Markov P_1 e P_2 e fechos convexos $[a,b]$ e $[c,d]$, dizemos que $K_1 \to K_2 :\Leftrightarrow P_1 \to P_2 : \Leftrightarrow (a < c, b < d$ e $c < b)$.

Teorema. Seja $(K, \tilde{K})$ um par de conjuntos de Cantor dinamicamente definidos cujas partições de Markov são $P = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ e $\tilde{P} = \{\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots, \tilde{K}_m\}$ respectivamente, tais que o extremo direito de K_1 coincide com o extremo esquerdo de K_2. Se K e $\tilde{K}$ são definidos por transformações expansoras ψ e $\tilde{\psi}$, supomos que $\psi|_{K_n}$ e $\tilde{\psi}|_{\tilde{K}_1}$ são afins, crescentes e sobrejetivas. Supomos ainda que $\log(\psi'|_{K_n})/\log(\tilde{\psi}'|_{\tilde{K}_1}) \notin \mathbb{Q}$. Então, $K_2 - K_1$ não contém nenhum intervalo do tipo $[0,\delta]$, $\delta > 0$ se e só se os domínios de Markov de alguma etapa da construção de $(K, \tilde{K}), (P_i, \tilde{P}_i)$ são tais que existem $\lambda, t \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ com $(\lambda P_i + t) \to \tilde{P}_i$ e $(\lambda P_i + t) \cap \tilde{P}_i = \emptyset$ (essa última condição equivale a existir uma reta ℓ que só cruze os lados inferior e direito do retângulo $K_0 \times \tilde{K}_0$ e que não intersecte a etapa $P_i \times \tilde{P}_i$ da construção de $K \times \tilde{K}$)

NOTAS

- Se $\psi|_{K_n}$ e $\tilde{\psi}|_{\tilde{K}_1}$ não forem lineares, podemos linearizá-las via um difeomorfismo $C^{1+\varepsilon}$. O mesmo resultado será válido, desde que as hipóteses sejam testadas para os linearizados.
- A hipótese $\log(\psi'|_{K_n})/\log(\tilde{\psi}'|_{\tilde{K}_1}) \notin \mathbb{Q}$ pode ser suprimida, se supusermos que $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $(P_i + t) \to \tilde{P}_i$ e $(P_i + t) \cap \tilde{P}_i = \emptyset$

Demonstração: Sejam $\lambda_1 = \psi'|_{K_n}$ e $\lambda_2 = \tilde{\psi}|_{\tilde{K}_1}$. Como $\log \lambda_1 / \log \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$, existem, para cada $\delta > 0$, infinitos valores naturais de m e n tais que $|\lambda_1^m/\lambda_2^n - \lambda| < \delta$. Como $t \notin \tilde{K} - \lambda K$, existe $\delta > 0$ tal que $t' \notin \tilde{K} - \lambda' K \quad \forall\ \lambda', t'$ com $|t - t'| < \delta$, e $|\lambda - \lambda'| < \delta \Rightarrow$ existem infinitos $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $t \notin \tilde{K} - \lambda_1^m/\lambda_2^n\ K \Leftrightarrow \lambda_2^n t \notin \lambda_2^n \tilde{K} - \lambda_1^m K$, com $(\lambda_1^m K + \lambda_2^n t) \to \lambda_2^n \tilde{K} \Rightarrow$ como $\tilde{K}_0 \cap (K_0 + \lambda_2^n t) = (\lambda_1^m K_0 + \lambda_2^n t) \cap (\lambda_2^n \tilde{K}_0)$, $\lambda_2^n t \notin \tilde{K} - K$. Assim, não existe nenhum intervalo do tipo $[0, \varepsilon] \subset K_2 - K_1, \varepsilon > 0$. A recíproca é evidente. $\square$

Observação 1: A demonstração acima mostra, como no Teorema I.2, que nesse caso $(K_2 - K_1)^c$ tem densidade positiva em 0. Adaptaremos esse resultado na Seção 2.1.3 para mostrar que, no caso de bifurcações homoclínicas, se $K_1 = K^s$ e $K_2 = K^u$, com as hipóteses do Teorema, teremos φ_μ hiperbólico para um conjunto de valores de μ com densidade positiva em $\mu = 0$.

Observação 2: No caso de K_1 e K_2 serem conjuntos de Cantor afins definidos por funções expansoras crescentes, se existem $\lambda > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que ou $\lambda K_1 + t \to K_2$ ou $K_2 \to \lambda K_1 + t$ e $(\lambda K_1 + t) \cap K_2 = \emptyset$, então, pelo teorema, (K_1, K_2) ou (K_2, K_1) não terão interseção extremal estável, pois (talvez mudando um pouco o par (K_1, K_2) para que as hipóteses sobre λ_1 e λ_2 sejam satisfeitas) sua diferença aritmética não conterá $[0,\varepsilon]$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

2.1.3 - Variações sobre um Teorema de Palis e Takens

No artigo de Palis e Takens ([PT1]) foi provado o seguinte

Teorema. Seja $\{\varphi_\mu; \mu \in \mathbb{R}\}$ uma família de difeomorfismos de M^2 com uma Ω-explosão homoclínica em $\mu = 0$. Suponha que $d^s(\Lambda) + d^u(\Lambda) < 1$, onde Λ é o conjunto básico de φ_0 associado à tangência homoclínica.
Então $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\lambda(B\cap[0,\delta])}{\delta} = 0$, onde $B = \{\mu > 0 | \varphi_\mu$ não é persistentemente hiperbólico$\}$ e λ a medida de Lebesgue.
No artigo de Palis e Yoccoz [PY] foi provado que no caso em que $d^s(\Lambda) + d^u(\Lambda) > 1$ ($d^s(\Lambda) = HD(K^s)$ e $d^u(\Lambda) = HD(K^u)$), genericamente é falso que $\lim\limits_{\delta\to 0} \dfrac{\lambda(B\cap[0,\delta])}{\delta} = 0$.

Provaremos aqui que nas hipóteses do Teorema IV.1 (que são abertas) temos $\liminf\limits_{\delta\to 0} \dfrac{\lambda(B^c\cap[0,\delta])}{\delta} > 0$, e veremos exemplos onde isso acontece com $HD(\Lambda) > 1$, caso em que coexistirão os fenômenos de hiperbolicidade com densidade positiva em $\mu = 0$ e tangências com densidade positiva em $\mu = 0$. A prova desse resultado será uma combinação dos argumentos de [PT1] com os argumentos dos teoremas I.2 e IV.1 deste trabalho.

Teorema. Seja (φ_μ) uma família de difeomorfismos de M^2 que apresenta uma Ω-explosão homoclínica em $\mu = 0$ associada a um ponto de sela p que pertence a um conjunto básico Λ. Sejam $(\tilde{K}_1)_0$ e $(\tilde{K}_2)_0$ como no Teorema I.2. Suponha que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$((\tilde{K}_1)_0 + t) \to (\tilde{K}_2)_0$ e $((\tilde{K}_1)_0 + t) \cap (\tilde{K}_2)_0 = \emptyset$.

Então $\liminf_{\delta \to 0} \lambda(\{\mu \in [0, \delta] | \varphi_\mu$é persistentemente hiperbólico$\})/\delta > 0$.

Demonstração: Sejam $\mathcal{O}$ a órbita de tangência homoclínica, $q^s \in \mathcal{O} \cap W^s_{\text{loc}}(p)$ e $q^u \in \mathcal{O} \cap W^u_{\text{loc}}(p)$. Sejam $q^s_\mu \in W^{s,\mu}_{\text{loc}}(p_\mu)$ e $q^u_\mu \in W^{u,\mu}_{\text{loc}}(p_\mu)$ dependendo continuamente de μ tais que $q^s_0 = q^s$ e $q^u_0 = q^u$, e sejam $\mathcal{O}^s_\mu$ e $\mathcal{O}^u_\mu$ suas órbitas por φ_μ. Sejam $A(\mu) = K^s_\mu \cup \mathcal{O}^s_\mu$ e $B(\mu) = K^u_\mu \cup \mathcal{O}^u_\mu$, onde $K^s_\mu = W^{s,\mu}_{\text{loc}}(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$ e $K^u_\mu = W^{u,\mu}_{\text{loc}}(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$. Escolhemos parametrizações adequadas para $W^{s,\mu}_{\text{loc}}(p_\mu)$ e $W^{u,\mu}_{\text{loc}}(P_\mu)$ (que tornam φ_μ restrito a cada uma dessas variedades linear) de forma que K^s_μ e K^u_μ coincidem com $(\tilde{K}_1)_\mu$ e $(\tilde{K}_2)_\mu$ e que $A(\mu)$ e $B(\mu)$ são conjuntos escalados, com fatores de escala $\lambda_1(\mu)$ e $\lambda_2(\mu)$, respectivamente, onde $\lambda_1(\mu)$ e $\lambda_2(\mu)$ são os autovalores de φ_μ.

As hipóteses do teorema implicam que existe $t > 0$ tal que $(A(0) + t) \cap B(0) = \emptyset$ (talvez mudando um pouco o t original para que não haja interseções envolvendo os conjuntos enumeráveis $\mathcal{O}^s_0$ e $\mathcal{O}^u_0$). Assim, haverá vizinhanças na topologia de conjuntos escalados $V(A(0))$ e $W(B(0))$ e $\varepsilon > 0$ tais que se $\tilde{A} \in V(A(0)), \tilde{B} \in W(B(0)), |t' - t| < \varepsilon$ então temos $(\tilde{A} + t') \cap \tilde{B} = \emptyset$. A partir daí, observando que pequenas vizinhanças escaladas ${}_\delta A = \{x \in \mathbb{R} | \exists x' \in A \text{ t.q. } |x - x'| \leq \delta |x'|\}$ estão próximas de A na topologia dos conjuntos escalados, podemos usar a mesma demonstração do teorema I.2 (o espírito desse argumento é o fato de que não-interseções de compactos são sempre estáveis) para concluir que se ${}_\varepsilon\tilde{A}^{K \cdot \mu}(\mu') = \pi^{-1}_{s,\mu'}({}_\varepsilon A(\mu') \cap [-K\mu, K\mu])$,e ${}_\varepsilon\tilde{B}^{K \cdot \mu} = \pi^{-1}_{u,\mu'}({}_\varepsilon B(\mu') \cap [-K\mu, K\mu])$ onde $\pi_{s,\mu'}$ e $\pi_{u,\mu'}$ são as projeções associadas às folheações estável e instável de $\varphi_{\mu'}$ sobre a linha de tangências, e se

$$B_{\mu,\varepsilon} = \{\mu' \in (0, \mu) | \text{distância entre } {}_\varepsilon\tilde{A}^{K \cdot \mu}(\mu') \text{ e } {}_\varepsilon\tilde{B}^{K \cdot \mu}(\mu') \text{ é maior ou igual a } \varepsilon\mu\}$$

então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\liminf_{\mu \to 0} \frac{\lambda(B_{\mu,\varepsilon})}{\mu} > 0$. A partir daí, concluímos o teorema exatamente como em [PT1] $\square$

Observação 1: Na hipótese desse teorema, assim como na hipótese do teorema I.2, devemos supor que $(\tilde{K}_1)_0$ e $(\tilde{K}_2)_0$ estão contidos em $\mathbb{R}$, estando $(\tilde{K}_1)_0$ contido em $\mathbb{R}_+$ e $(\tilde{K}_2)_0$ em $\mathbb{R}_-$.

Observação 2: Se $\log(\lambda_1(0))/\log(\lambda_2(0)) \notin \mathbb{Q}$, basta supor que existem $\alpha > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $(\alpha(\tilde{K}_1)_0 + t) \to (\tilde{K}_2)_0$ e $(\alpha(\tilde{K}_1)_0 + t) \cap (\tilde{K}_2)_0 = \emptyset$.

Exemplo: Suponha que K_0^s e K_0^u são conjuntos de Cantor afins como nas figuras B e C abaixo, associados a um Horseshoe Λ como o da figura A que tem a mesma combinatória do quadrado do horseshoe usual, e portanto pode ser realizado na esfera.

Suponha que (φ_μ) apresente uma Ω-explosão homoclínica em $\mu = 0$ associada ao ponto fixo P no extremo inferior esquerdo de Λ. Então, como as hipóteses do teorema são satisfeitas teremos hiperbolicidade com densidade positiva em $\mu = 0$. Entretanto, como mostra a figura D, K_0^s contém um conjunto de Cantor afim com expessura $17/10 > 1$ ("esquecemos" o intervalo extremal). Analogamente, podemos mostrar que K_0^u contém um conjunto de Cantor afim com espessura maior que $1 \Rightarrow$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(K_0^s + t)$ intersecta K_0^u estavelmente, donde pelo teorema I.2 haverá tangências com densidade positiva em $\mu = 0$. Os mesmos fenômenos se verificam numa vizinhança da família (φ_μ).

2.1.4 - Exemplos sobre interseções estáveis e diferenças aritméticas

2.1.4.1 - Espessuras e interseções estáveis: Como conseqüência da Seção 1.3.2, se $\tau_D(K_1)\cdot\tau_E(K_2)>1$ e $\tau_E(K_1)\cdot\tau_D(K_2)>1$, e se τ_D e τ_E são contínuas em K_1 e K_2 então, para todo $t\in\mathbb{R}$ tal que K_1 e K_2+t estão intercalados, K_1 intersecta K_2+t estavelmente.

A espessura $\tau(K)$ é contínua na topologia $C^{1+\varepsilon}$ (ver [PT2]). O mesmo não acontece com as espessuras laterais:

Exercício: No conjunto

as espessuras laterais não são contínuas.

De fato, temos, próximos de K, os conjuntos para os quais $\tau_D(K'_\varepsilon) = \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ ($\to 1$ quando $\varepsilon \to 0$) e $\tau_E(K'_\varepsilon) = \dfrac{2}{1-\varepsilon}$ ($\to 2$ quando $\varepsilon \to 0$), $\tau_D(K''_\varepsilon) = \dfrac{2+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ ($\to 2$ quando $\varepsilon \to 0$) e $\tau_E(K''_\varepsilon) = \dfrac{2}{1-\varepsilon}$ ($\to 1$ quando $\varepsilon \to 0$), o que mostra que τ_D e τ_E são descontínuas em K.

É possível provar que existe um aberto denso U na topologia $C^{1+\varepsilon}$ onde as espessuras laterais são contínuas.

Não é difícil provar que as espessuras laterais são contínuas nos conjuntos de Cantor afins do tipo

para os quais a espessura direita $\tau_D(K) = \dfrac{c}{b}$ e a esquerda $\tau_E(K) = \dfrac{a}{b}$ (isso se deve ao fato de não haver gaps vizinhos com comprimentos demasiado próximos em conjuntos desse tipo).

Conseqüentemente, se $\dfrac{a_1 c}{b_1 b} > 1$ e $\dfrac{c_1 a}{b_1 b} > 1$, então os conjuntos

têm interseção estável sempre que intercalados, e sua diferença aritmética conterá um intervalo, sendo esse fenômeno estável dentre os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos.

Há uma desigualdade cuja prova pode ser encontrada em [PT2] que afirma que $HD(K) \geq \log 2 / \log(2 + \dfrac{1}{\tau(K)})$, o que implica que se $\tau(K) \geq 1$, então

$HD(K) \geq \log 3/\log 2 > 0,6$. Assim, se K_1 e K_2 tem dimensão de Hausdorff 0,6 cada um, o produto de suas espessuras é menor que 1, e portanto o teste da espessura não pode garantir a existência de intersecção estável entre K_1 e K_2.

Entretanto, o conceito de espessura lateral nos permite provar o seguinte resultado:

Teorema: Dados h_1 e h_2 no intervalo (0,1) com $h_1 + h_2 > 1$, existem conjuntos de Cantor afins K_1 e K_2 com dimensões de Hausdorff h_1 e h_2 respectivamente que se intersectam estavelmente. Além disso podemos conseguir que (K_1, K_2) e $(K_2, K_1 + 1)$ tenham interseção extremal estável.

Demonstração: Procuraremos exemplos do tipo

Num conjunto

com $a + b + c = 1$ temos $HD(K) = \lambda$ onde λ é o único real tal que $a^\lambda + c^\lambda = 1$ (ver [PT2]), $\tau_D(K) = c/b$ e $\tau_E(K) = a/b$.

Assim, se tivermos $\dfrac{a_1 c_2}{b_1 b_2} > 1$ e $\dfrac{a_2 c_1}{b_1 b_2} > 1$, (K_1, K_2) terá interseção estável, desde que intercalados.

Além disso, quando na posição onde os extremos se tocam, (K_1, K_2) e (K_2, K_1) terão interseção extremal estável.

Tentaremos obter exemplos como acima, com $a_1+b_1+c_1 = a_2+b_2+c_2 = 1$ e $a_1c_2 = a_2c_1$ (ou seja, $\dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{c_2}{a_2} =: r$), para que as condições $\dfrac{a_1c_2}{b_1b_2} > 1$ e $\dfrac{a_2c_1}{b_1b_2} > 1$ sejam equivalentes. Dados h_1 e h_2 no intervalo (0,1) com $h_1 + h_2 > 1$ obteremos esses exemplos com $HD(K_1) = h_1$ e $HD(K_2) = h_2$, ou seja, $a_1^{h_1} + c_1^{h_1} = 1$ e $a_2^{h_2} + c_2^{h_2} = 1$.

Num conjunto de Cantor

com $c = ra$, $a+b+c = 1$ e $HD(K) = h$ devemos ter $a^h + (ra)^h = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{(1+r^h)^{1/h}}$, $c = \dfrac{r}{(1+r^h)^{1/h}}$ e $b = \dfrac{(1+r^h)^{1/h} - 1 - r}{(1+r^h)^{1/h}}$. No nosso caso, queremos $a_1c_2 > b_1b_2 (\Leftrightarrow a_2c_1 > b_1b_2)$, donde o nosso problema é encontrar $r > 0$ satisfazendo

$$\frac{1}{(1+r^{h_1})^{1/h_1}} \cdot \frac{r}{(1+r^{h_2})^{1/h_2}} > \frac{((1+r^{h_1})^{1/h_1} - 1 - r)}{(1+r^{h_1})^{1/h_1}} \cdot \frac{((1+r^{h_2})^{1/h_2} - 1 - r)}{(1+r^{h_2})^{1/h_2}} \Leftrightarrow$$

$$(*) \qquad r > ((1+r^{h_1})^{1/h_1} - 1 - r)\,((1+r^{h_2})^{1/h_2} - 1 - r).$$

Temos

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{((1+r^h)^{1/h} - 1 - r)}{r^h} = \frac{1}{h}, \quad \lim_{r\to 0_+} \frac{((1+r^{h_1})^{1/h_1} - 1 - r)\,((1+r^{h_2})^{1/h_2} - 1 - r)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0_+} \frac{((1+r^{h_1})^{1/h_1} - 1 - r)}{r^{h_1}} \cdot \lim_{r\to 0_+} \frac{(1+r^{h_2})^{1/h_2} - 1 - r)}{r^{h_2}} \cdot \lim_{r\to 0_+} \frac{r^{h_1+h_2}}{r} = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{1}{h_2} \cdot 0 = 0$$

pois $h_1 + h_2 > 1$, enquanto $\lim\limits_{r\to 0_+} \dfrac{r}{r} = 1$, donde, se r é suficientemente pequeno, o lado direito de (*) é menor que o lado esquerdo. Assim, para todo r suficientemente pequeno (ou suficientemente grande) obtemos exemplos como desejados

$a_i = \frac{1}{(1+r^{h_i})^{1/h_i}}, \ \ c_i = \dfrac{r}{(1+r^{h_i})^{1/h_i}}, \ \ b_i = 1 - a_i - c_i$, para $i = 1, 2$. $\square$

Em [M] há vários exemplos de pares de conjuntos de Cantor regulares cujo produto das espessuras (e mesmo das espessuras laterais) é menor que 1 mas cuja diferença aritmética contém intervalos persistentemente, o que é devido a critérios que generalizam o gap lemma. A essência desses exemplos, assim como do gap lemma clássico, é mostrar que determinados tipos de configurações de etapas finitas da construção de um par de conjuntos de Cantor regulares na reta (as quais são uniões finitas de intervalos) que se intersectam forçam a existência de configurações do mesmo tipo de etapas superiores que se intersectam (em escala menor). Esta idéia será generalizada no próximo capítulo para mostrar que genericamente se a soma das dimensões de Hausdorff de dois conjuntos de Cantor regulares é maior que 1 então sua diferença aritmética contém intervalos, provanod assim uma conjectura de J. Palis.

2.1.4.2 - Exemplos diversos

Exemplo 1: Consideremos os conjuntos

Sua dimensão de Hausdorff é igual a: $-\dfrac{\log 2}{\log(\dfrac{1-\alpha}{2})}$ (ver [PT2]), e $\tau(K_\alpha) = \tau_E(K_\alpha) =$

$= \tau_D(K_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2\alpha}$. Se $\alpha > \frac{1}{2}$ teremos $HD(K_\alpha) < \frac{1}{2}$, e $(K_\alpha - \lambda K_\alpha)$ terá medida nula para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha < \dfrac{1}{3}$, $\tau(K_\alpha) > 1$ e $(K_\alpha, \lambda K_\alpha)$ terá interseção estável (e mesmo interseção extremal estável) quando intercalados, donde $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ conterá intervalo, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Provaremos aqui que, quando $\dfrac{1}{3} < \alpha < \dfrac{1}{2}$, $K_\alpha - K_\alpha$ terá medida nula, mas existirão intervalos de valores de λ (que dependerão de α) para os quais $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ conterá intervalo.

Prova: Considere o conjunto $K = K_\alpha \times K_\alpha \subset \mathbb{R}^2$. $K_\alpha - K_\alpha$ será sua projeção sobre $\mathbb{R} \times \{0\}$ num ângulo de $45°$ (Fig.1).

Na primeira etapa da construção de $K_\alpha \times K_\alpha$ sobram 4 quadrados congruentes, sendo que o do canto inferior esquerdo se projeta exatamente sobre o do canto superior direito. (Ver Fig.2).

Assim, pela autosemelhança dos K_α, a construção continua como se eles fossem um só quadrado. No caso $\alpha > \dfrac{1}{3}$, a projeção da primeira etapa da construção não é todo o intervalo $[0,1]$, mas o conjunto $[-1, -\alpha] \cup [\dfrac{\alpha - 1}{2}, \dfrac{1-\alpha}{2}] \cup [\alpha, 1]$ consistindo de

3 componentes conexas. A partir daí, a diferença é construída como um conjunto de Cantor afim, sendo igual ao conjunto

que tem medida nula (e até dimensão de Hausdorff < 1).

O conjunto de Cantor usual $K_{\frac{1}{3}}$ pode ser aproximado por um lado por conjuntos $K_{\frac{1}{3}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ que têm auto-interseção estável (e mesmo extremal estável), e por outro por conjuntos $K_{\frac{1}{3}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, que têm auto-diferença aritmética com medida nula e dimensão de Hausdorff < 1.

Se a projeção da primeira etapa da construção de $K_\alpha \times (\lambda K_\alpha)$ for sobrejetiva sobre o intervalo $[-\lambda, 1]$, pelo mesmo argumento de auto-semelhança, as projeções de todas as etapas serão sobrejetivas, e teremos $K_\alpha - \lambda K_\alpha = [-\lambda, 1]$. Vamos determinar quando isso acontece:

$= [-\lambda, \frac{1-\alpha}{2} - \lambda(\frac{1+\alpha}{2})] \cup [\frac{1+\alpha}{2} - \lambda, 1 - \lambda(\frac{1+\alpha}{2})] \cup [-\lambda(\frac{1-\alpha}{2}), \frac{1-\alpha}{2}] \cup [\frac{1+\alpha}{2} - \lambda(\frac{1-\alpha}{2}), 1]$, que é igual ao intervalo $[-\lambda, 1]$ se $\Big(\frac{1-\alpha}{2} - \lambda(\frac{1+\alpha}{2}) \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda,\ 1 - \lambda(\frac{1+\alpha}{2}) \geq -\lambda(\frac{1-\alpha}{2})$ e $\frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda(\frac{1-\alpha}{2})\Big)$ ou se $\Big(\frac{1-\alpha}{2} - \lambda(\frac{1+\alpha}{2}) \geq -\lambda(\frac{1-\alpha}{2}), \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda,$ e $1 - \lambda(\frac{1+\alpha}{2}) \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda(\frac{1-\alpha}{2})\Big)$, ou seja, se $\Big(\lambda \geq \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ e $\lambda \leq 1\Big)$ ou $\Big(\lambda \leq \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ e $\lambda \geq \alpha\Big)$.

Como $\alpha > \frac{1}{3}, \frac{2\alpha}{1-\alpha} > 1$ e a primeira possibilidade nunca ocorre. Porém, como $\alpha < 1/2$, o intervalo $[\alpha, \frac{1-\alpha}{2\alpha}]$ é não vazio, e é um intervalo de valores de λ para os quais $K_\alpha - \lambda K_\alpha = [-\lambda, 1]$. Por auto-semelhança, se $\lambda \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \Big[(\frac{1-\alpha}{2})^k \alpha, (\frac{1-\alpha}{2})^k \cdot \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Big]$, $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ conterá intervalo.

Uma observação interessante é que a segunda parte desse exemplo não é tão rígida quanto parece. Na verdade, se $\lambda \in \left(\alpha, \frac{1-\alpha}{2\alpha}\right), \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ e $t \in (-\lambda, 1)$ então K_α tem uma interseção com $\lambda K_\alpha + t$ que conjecturamos que não seja estável, e que não é extremal estável, como provaremos na próxima seção. Entretanto, essas interseções são semi-estáveis, no sentido que não podem ser destruídas aplicando difeomorfismos φ e ψ C^1-próximos da identidade a K_α e $\lambda K_\alpha + t$. Mais precisamente, dado $t \in (-\lambda, 1)$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|\varphi - Id\|_1 < \delta$ e $\|\psi - Id\|_1 < \delta$ então $\varphi(K_\alpha) \cap \psi(\lambda K_\alpha + t) \neq \emptyset$. Além disso, $(K_\alpha, \lambda K_\alpha + 1)$ e $(\lambda K_\alpha - \lambda, K_\alpha))$ têm interseção extremal semi-estável, no sentido que $\exists\, \delta > 0$ tal que se $\|\varphi - Id\|_1 < \delta$ e $\|\psi - Id\|_1 < \delta$ então $\varphi(K_\alpha) \cap \psi(\lambda K_\alpha + 1) \neq \emptyset$ e $\varphi(K_\alpha) \cap \psi(\lambda K_\alpha - \lambda) \neq \emptyset$, desde que os seus intervalos suportes tenham interseção não-vazia.

De fato, a razão entre os comprimentos de um gap de λK_α e de um gap de K_α é da forma $\lambda(\frac{1-\alpha}{2})^k, \exists k \in \mathbb{Z}$. Se $\lambda \in (\alpha, \frac{1-\alpha}{2\alpha})$ e δ é suficientemente pequeno então a razão entre um gap de $\varphi(K_\alpha)$ e um gap de $\psi(K_\alpha)$ será maior que $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ ou menor que $\frac{1-\alpha}{2\alpha}$, para todos os $\varphi, \psi \in C^1$ com $\|\varphi - Id\|_1 < \delta$ e $\|\psi - Id\|_1 < \delta$. Assim, como na prova do "gap lemma", se tivermos um par de gaps encaixados $(U, \tilde{U})$, por exemplo como abaixo

onde supomos $U > \tilde{U} \Rightarrow U > \dfrac{2\alpha}{1-\alpha}\,\tilde{U}$, mas temos $\tau_E(\psi(\lambda K_\alpha)) \simeq \tau_E(K_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2\alpha} \Rightarrow$ garantimos que $|E_U| > \left|\tilde{U}\right| \Rightarrow$ obtemos um par de gaps menor. Continuamos como na prova do "gap lemma", e obtemos o resultado desejado (ou seja, se $\varphi(K_a)$ e $\psi(\lambda K_\alpha + t)$ têm um par de gaps encaixados então têm interseção não vazia).

Exemplo 2: Exibiremos aqui exemplos de conjuntos de Cantor afins cuja dimensão de Hausdorff é muito próxima de 1 e cuja auto-diferença aritmética tem medida nula.
Seja $\overline{K}_k =$

A projeção da primeira etapa da construção de $\overline{K}_k \times \overline{K}_k$ é $\bigcup\limits_{j=-k}^{k} [\dfrac{4j-1}{4k+1}, \dfrac{4j+1}{4k+1}]$, que não é todo o intervalo $[-1,1]$, e pelo mesmo argumento de auto-semelhança aplicado a $K_\alpha - K_\alpha, \overline{K}_k - \overline{K}_k$ terá medida nula (e até dimensão de Hausorff< 1: será um conjunto de Cantor afim), pois a etapa inicial da construção de $\overline{K}_k \times \overline{K}_k$ consistirá de vários quadrados congruentes tais que as projeções de dois deles ou coincidem ou têm interseção vazia.

Outra maneira de ver isso é observar que $\overline{K}_k$ é o conjunto dos números de $[0,1]$ em cuja representação na base $4k+1$ só aparecem os algarismos $0, 4, 8, \ldots, 4k \Rightarrow \overline{K}_k - \overline{K}_k = \overline{K}_k + \overline{K}_k - 1$, onde $\overline{K}_k + \overline{K}_k$ é igual ao conjunto de Cantor afim $\{x \in [0,2] |$ todos os algarismos de $x/2$ na base $4k+1$ são pares$\}$.

A dimensão de Hausdorff de $\overline{K}_k$ é $\dfrac{\log(k+1)}{\log(4k+1)}$ (é o único λ tal que $(k+1)\cdot (\dfrac{1}{4k+1})^\lambda = 1$; ver [PT2]).

Portanto, como $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\log(k+1)}{\log(4k+1)} = 1$, obtemos os exemplos desejados.

Exemplo 3: Seja $K = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\delta_i}{9^i};\ \delta_i \in \{0,4,6,8\} \Big\}$. K é um conjunto de Cantor afim. Temos

$$K + K = \{x + y \mid x \in K, y \in K\} = \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{9^i}, \mu_i \in \{0,4,6,8\} + \{0,4,6,8\}$$

$$= \{0,4,6,8,10,12,14,16\} \Big\} \quad \text{e}$$

$$K - K = \{x - y \mid x \in K, y \in K\} = \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{9^i}, \lambda_i \in \{0,4,6,8\} - \{0,4,6,8\} =$$

$$= \{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\} \Big\}.$$

Assim, $K + K = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x}{2} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\tilde{\mu}_i}{9^i},\ \tilde{\mu}_i \in \{0,2,3,4,5,6,7,9\} \Big\}$, que é um conjunto de Cantor afim, de medida nula e dimensão de Hausdorff menor que um, enquanto

$$K - K = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_i}{9^i};\ \tilde{\lambda}_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \Big\} = [-1,1].$$

Portanto, $K + K$ tem medida nula, e $K - K$ é um intervalo.

Exemplo 4: Consideremos os exemplos de Sannami ([S]) e de Bamón-Plaza-Vera ([BPV]), de conjuntos de Cantor dinamicamente definidos cuja auto-diferença aritmética é um conjunto de Cantor de medida positiva. Nesses exemplos os conjuntos de Cantor são centrais: É dada uma seqüência $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ de números reais (nesses casos temos $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \frac{1}{3}$ e $\alpha_i > \frac{1}{3}$, $\forall\ i$) e o conjunto de Cantor central $K_{\underline{\alpha}}$ é definido do seguinte modo: toma-se o intervalo [0,1], faz-se um gap de proporção α_1, no centro do intervalo, sobrando duas componentes conexas na primeira etapa. Na k-ésima etapa sobrarão 2^k componentes conexas, e serão feitos gaps de proporção α_k em cada componente conexa resultante da etapa $k-1$. A interseção dos conjuntos resultantes de cada etapa é o conjunto $K_{\underline{\alpha}}$. A diferenciabilidade de $K_{\underline{\alpha}}$ está ligada à rapidez de convergência da seqüência (α_i). Podemos aproximar $\underline{\alpha}$ por $\underline{\alpha} + \varepsilon := (\alpha_i + \varepsilon)_{i\in\mathbb{N}}$, obtendo conjuntos $K_{\underline{\alpha}+\varepsilon}$ tão diferenciáveis quanto $K_{\underline{\alpha}}$. Do cálculo de medida da diferença aritmética (que é feito nos artigos citados) podemos deduzir que, se $\varepsilon > 0$ então $\lambda(K_{\underline{\alpha}+\varepsilon} - K_{\underline{\alpha}+\varepsilon}) = 0$. Por outro lado, se $\varepsilon > 0$ temos $\tau_{\text{loc}}(K_{\underline{\alpha}+\varepsilon}) > 1$, e portanto $(K_{\underline{\alpha}+\varepsilon}, K_{\underline{\alpha}+\varepsilon})$ terá interseção estável, e $(K_{\underline{\alpha}+\varepsilon}, K_{\underline{\alpha}+\varepsilon} + 1)$ terá interseção extremal estável. Nessas últimas considerações nos referimos a seqüências $\underline{\alpha}$ que aparecem nos exemplos citados (para as quais $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \frac{1}{3}$). Nesses casos temos $\tau_{\text{loc}}(K_{\underline{\alpha}}) = 1$, como observamos nos comentários sobre espessuras locais após a prova da afirmação.

2.2 - Interseções estáveis e dimensão de Hausdorff

2.2.1 - Enunciados

Vimos na seção anterior que estudar diferenças aritméticas e interseções estáveis de conjuntos de Cantor regulares é de grande importância para entender o desdobramento de bifurcações homoclínicas em superfícies perto do parâmetro inicial de bifurcação. Por outro lado, estudar somas aritméticas de conjuntos de Cantor tem um papel importante em certos tópicos de teoria dos números, em particular no estudo de frações contínuas e aproximações diofantinas, como veremos em detalhe no Capítulo . Note que estudar somas e diferenças aritméticas de conjuntos de Cantor regulares são problemas equivalentes, pois $K_1 + K_2 = \{x + y;\, x \in K_1, y \in K_2\} = K_1 - (-K_2)$, e, se K_2 é um conjunto de Cantor regular então $-K_2 = \{-y;\, y \in K_2\}$ também é.

É fácil ver que se $d(K_1)+d(K_2) < 1$ então K_1+K_2 (e K_1-K_2) tem medida nula, e, de fato, dimensão de Hausdorff menor que 1. Isso segue do fato de que $K_1 + K_2 = f(K_1 \times K_2)$, onde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$ é Lipschitziana, donde $d(K_1 + K_2) \leq d(K_1 \times K_2) \leq d(K_1) + d(K_2) < 1$. Em particular, se $d(K_1) + d(K_2) < 1$ então K_1 e $\lambda K_2 + t$ nunca têm interseção estável, $\forall\, \lambda, t \in \mathbb{R}$.

O seguinte resultado, em colaboração com J.-Ch. Yoccoz, prova uma versão forte da Conjectura de Palis citada acima:

Teorema 2.1: Seja $\Omega = \{(K_2, K_2)$ conjuntos de Cantor regulares tais que $d(K_1) + d(K_2) > 1\}$. Existe $\mathcal{U} \subset \Omega$ aberto e denso (na topologia C^q, para todo q com $1 < q \leq \infty$) tal que, se $(K_1, K_2) \in \mathcal{U}$, então $S(K_1, K_2) := \{t \in \mathbb{R} \mid K_1$ tem interseção estável com $K_2 + t\}$ é (aberto e) denso em $K_1 - K_2$ (em particular é não-vazio. Além disso, $HD((K_1 - K_2) \backslash S(K_1, K_2)) < 1$.

O teorema diz, em particular, que, com condições abertas e densas (e, como veremos mais adiante, de medida total num sentido bastante forte), se $d(K_1) + d(K_2) > 1$ então $K_1 - K_2$ contém (estavelmente) intervalos não-triviais. Este capítulo será dedicado a discutir as idéias centrais da prova deste resultado e de alguns refinamentos e conseqüências. Para a prova completa referimos a [MY].

O primeiro refinamento do Teorema 2.1 que mencionaremos diz respeito ao tamanho das interseções $K_1 \cap (K_2 + t)$. Dizemos que K_1 tem interseção d-estável com K_2 se para qualquer par de conjuntos de Cantor regulares $(\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2)$ próximo a (K_1, K_2) tivermos $HD(\tilde{K}_1 \cap \widetilde{K}_2)$, onde HD denota dimensão de Hausdorff.

Teorema 2.2: Dados $(K_1, K_2) \in \Omega$ e $0 < d < d(K_1) + d(K_2) - 1$, podemos aproximar (K_1, K_2) por $(\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2)$ de modo que $S_d(K_1, K_2) := \{t \in \mathbb{R} \mid K_1$ tem interseção d-estável com $K_2 + t\}$ é (aberto e) denso em $K_1 - K_2$, e $HD((K_1 - K_2) \backslash S_d(K_1, K_2)) < 1$.

O segundo refinamento diz respeito ao tamanho do conjunto $\mathcal{U}$: podemos tomar $\mathcal{U}$ satisfazendo às condições do enunciado de modo que seu complementar em Ω tenha codimensão infinita, isto é, tal que para todo n natural, famílias genéricas $\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \Omega$ têm sua imagem contida inteiramente em $\mathcal{U}$.

2.2.2 - Idéias das demonstrações

Estes resultados podem ser adaptados para estudar bifurcações homoclínicas genéricas em superfícies associadas a conjuntos hiperbólicos não triviais: se, na situação da Seção 2.1.0, a dimensão de Hausdorff de Λ é maior que 1, então os difeomorfismos φ_μ apresentam tangências homoclínicas persistentes para um conjunto aberto de valores do parâmetro com densidade persistentemente positiva em $\mu = 0$. Além disso, os resultados da Seção 2.1.2 combinados com o fato de que genericamente vale que dois conjuntos de Cantor K_1 e $K_2 + t$ ou não se intersectam ou se intersectam estavelmente para quase todo valor de t (conseqüência do Teorema 2.1) podem ser usados para mostrar que genericamente a união dos conjuntos de valores do parâmetro correspondentes a tangências homoclínicas estáveis e a hiperbolicidade tem densidade total no parâmetro inicial de bifurcação $\mu = 0$.

Vamos agora ver condições que asseguram que dois conjuntos de Cantor regulares K e K' tenham interseção estável. Suponha que K e K' sejam definidos por ψ e ψ' e tenham shifts associados Σ_B e $\Sigma'_{B'}$. Dadas palavras finitas $\underline{\alpha} = (a_{-n}, a_{1-n}, \ldots, a_0)$ de Σ_B e $\underline{\beta} = (b_{-m}, \ldots, b_0)$ de $\Sigma'_{B'}$, às quais estão associados intervalos $I_{\underline{\alpha}}$ e $I'_{\underline{\beta}}$ de K e K', respectivamente, podemos definir o *operador de renormalização* $F_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}: \Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}{}'^- \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \Sigma_B^- \times \Sigma'^-_{B'} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ da seguinte forma: dado $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \Sigma_B^- \times \Sigma'^-_{B'} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, consideramos os intervalos $I_{\underline{\alpha}}^{\underline{\theta}} = k^{\underline{\theta}}(I_{\underline{\alpha}})$ e $\lambda I'^{\underline{\theta}'}_{\underline{\beta}} + t = \lambda k'^{\underline{\theta}'}(I'_{\underline{\beta}}) + t$ das construções de $K^{\underline{\theta}}$ e $\lambda K'^{\underline{\theta}'} + t$ e aplicamos a ambos a única transformação afim que preserva orientação tal que a imagem de $I_{\underline{\alpha}}^{\underline{\theta}}$ é I_{a_0}. A imagem de $\lambda I'^{\underline{\theta}'}_{\underline{\beta}} + t$ será $\tilde{\lambda} I'_{b_0} + \tilde{t}$ para algum $(\tilde{\lambda}, \tilde{t}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Definimos $R_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) = (\underline{\theta\,\alpha}, \underline{\theta'\beta}, \tilde{\lambda}, \tilde{t})$.

Vamos agora interpretar geometricamente este operador. O espaço $\Sigma_B^- \times \Sigma'^-_{B'} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ deve ser visto como o espaço das posições relativas de geometrias limite de K e K' na reta. Devemos pensar que os intervalos $I_{\underline{\alpha}}$ e$I'_{\underline{\beta}}$ têm tamanhos comparáveis. Se os conjuntos de Cantor $K^{\underline{\theta}}$ e $\lambda K'^{\underline{\theta}'} + t$ têm um ponto de interseção que pertença aos intervalos $I_{\underline{\alpha}}^{\underline{\theta}}$ e $\lambda\, I'^{\underline{\theta}'}_{\underline{\beta}} + t$, então este ponto pertencerá a $\big(\lambda(K^{\underline{\theta}'} \cap I'^{\underline{\theta}'}_{\underline{\beta}}) + t\big) \cap \big(K^{\underline{\theta}} \cap I_{\underline{\alpha}}^{\underline{\theta}}\big)$, mas, ao aplicar a transformação afim citada na definição de $R_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$, $K^{\underline{\theta}} \cap I_{\underline{\alpha}}^{\underline{\theta}}$ é transformado em $K^{\underline{\theta\alpha}}$ e $\lambda\big(K'^{\underline{\theta}'} \cap I'^{\underline{\theta}'}_{\underline{\beta}}\big) + t$ é transformado em $\tilde{\lambda}\, K'^{\underline{\theta'\beta}} + \tilde{t}$, donde $K^{\underline{\theta\alpha}}$ e $\tilde{\lambda}\, K'^{\underline{\theta'\beta}} + \tilde{t}$ têm interseção não vazia. Assim, aplicar o operador de renormalização $R_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ signfica olhar com lente de aumento para possíveis pontos de interseção de $K^{\underline{\theta}}$ e $\lambda\, K'^{\underline{\theta}'} + t$ que pertençam a $I^{\underline{\theta}}_{\underline{\alpha}} \cap (\lambda\, I'^{\underline{\theta}'}_{\underline{\beta}} + t)$.

Se não há tais pontos de interseção, os conjuntos de Cantor em questão estão a uma distância positiva e, ao olhá-los com lente de aumento, eles parecerão cada vez mais distantes. Reciprocamente, se podemos aplicar infinitas vezes operadores de renormalização a um ponto $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t)$ de $\Sigma^- \times \Sigma^{-\prime} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sem que os iterados saiam de uma parte compacta, então necessariamente $K^{\underline{\theta}}$ e $\lambda\, K'^{\underline{\theta}'} + t$ devem intersectar-se, pois parecerão intersectar-se em escalas arbitrariamente pequenas (devidamente ampliadas).

O leitor deve ter notado que nessa discussão estamos falando de interseções de conjuntos de Cantor que são geometrias limite. Nosso primeiro objetivo será obter um critério robusto que assegure interseções estáveis de geometrias limite. Após isso, usaremos o fato de que geometrias limite reproduzem a geometria de pequenos pedaços dos conjuntos de Cantor originais com distorção pequena, isto é, ao renormalizarmos repetidamente pedaços pequenos de um conjunto de Cantor regular tendemos para o espaço das geometrias limite, o que permitirá mostrar que o critério que teremos obtido será suficiente para assegurar interseção estável no universo de todos os conjuntos de Cantor regulares. O instrumento fundamental que usaremos para determinar interseções estáveis será

Proposição 2.2.2: Se existe um conjunto compacto $\mathcal{L} \subset \Sigma'_B \times \Sigma'^{-}_{B'} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de interior $\operatorname{int} \mathcal{L} \neq \emptyset$ tal que, para cada $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \mathcal{L}$ existe um operador de renormalização $R_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ tal que $R_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \operatorname{int} \mathcal{L}$ então, para cada $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \mathcal{L}$, $\;K_{\underline{\theta}}$ tem interseção estável com $\lambda\, K'_{\underline{\theta}'} + t$ (no universo de todos os conjuntos de Cantor regulares que são de classe $C^{1+\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$).

As condições da Proposição 2.2.2 são claramente abertas, pois $\mathcal{L}$ é compacto e os operadores $R_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ são contínuos. Assim, a afirmação sobre interseções estáveis seguirá do fato das interseções $K_{\underline{\theta}} \cap (\lambda\, K'_{\underline{\theta}'}, \lambda, t)$ serem não vazias para $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \mathcal{L}$, o que, por sua vez, segue do fato de podermos aplicar repetidamente operadores de renormalização sem sair do compacto $\mathcal{L}$.

Um conjunto $\mathcal{L}$ como o da proposição acima é dito um compacto recorrente. Para provar o Teorema 2.1, mostraremos que dado $(K, K') \in \Omega$ é possível encontrar pares de conjuntos de Cantor regulares $(\widetilde{K}, \widetilde{K}')$ arbitrariamente próximos para os quais existe algum compacto recorrente.

A prova do Teorema 2.2 baseia-se numa variação do conceito de compacto recorrente: dado $d > 0$, dizemos que $\mathcal{L} \subset \Sigma_B^- \times \Sigma'^-_{B'} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ é um compacto d-recorrente se para todo $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \mathcal{L}$ existem (não mais um, mas vários) operadores de renormalização $R_{\underline{\alpha_i},\underline{\beta_i}}$, $1 \leq i \leq N = N(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t)$ tais que, $R_{\underline{\alpha_i},\underline{\beta_i}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \in \operatorname{int} \mathcal{L}$ e $\lambda_i = |I_{\underline{\alpha}_i^{\underline{\theta}}}| / |I^{\underline{\theta}\,\underline{\alpha}}_{a_0^i}|$ é o inverso da taxa de expansão em t de $R_{\underline{\alpha_i},\underline{\beta_i}}$, então $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^d > 1$.

Se há um compacto d-recorrente $\mathcal{L}$, então cada operador de renormalização $R_{\underline{\alpha_i},\underline{\beta_i}}$ indica uma região de $K^{\underline{\theta}}$ que intersecta $\lambda\, K'^{\underline{\theta}'} + t$. Em cada região dessas, depois de ampliada, há várias outras sub-regiões onde há interseção, e, repetindo o argumento, encontramos todo um conjunto de Cantor de interseções entre $K^{\underline{\theta}}$ e $\lambda\, K'^{\underline{\theta}'} + t$. A estimativa sobre os λ_i fornece a estimativa inferior de d para a dimensão de Hausdorff da interseção. O resto do argumento segue as mesmas linhas da prova do Teorema 2.1, que continuaremos discutindo.

Um resultado fundamental de teoria geométrica da medida para nossa tarefa de encontrar um compacto invariante $\mathcal{L}$ é o Teorema de Marstrand, que implica que, se $HD(K) + HD(K') > 1$ então, para quase todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $K - \lambda\, K'$ tem medida positiva.

Mais precisamente, a prova de Kaufman do teorema de Marstrand (ver [PT2]) mostra que, se $\pi_\lambda : K \times K' \to \mathbb{R}$, $\quad \pi_\lambda(x, y) = x - \lambda y$, $\quad d = d(K)$, $\quad d' = d(K')$ e $m = m_d \times m_{d'}$ é a medida de Hausdorff produto em $K \times K'$ então, para quase todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a medida $\mu_\lambda = \pi_\lambda^* m$ (ou seja, $\mu_\lambda(A)$ é, por definição $m(\pi_\lambda^{-1}(A))$) é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue na reta, e, além disso, sua densidade χ_λ é L^2 e, para cada $c > 1$, $\int_{1/c}^{c} ||\chi_\lambda||_{L^2} \, d\lambda < \infty$. Dizer que χ_λ é L^2 significa que $K \times K'$ não está muito longe de ser um produto na direção de π_λ. Em particular, conseguimos um conjunto $P_\lambda \subset K - \lambda K'$ de medida positiva tal que para cada $t \in P_\lambda$, não apenas $K \cap (\lambda K' + t) \neq \emptyset$ como também $K \cap (\lambda K' + t)$ tem dimensão "quase igual" a $d + d' - 1$. Em outras palavras, existe um conjunto relativamente grande (i.e., com medida positiva) de valores de t tais que $K \cap (\lambda K' + t)$ é relativamente grande (tem dimensão positiva).

Este resultado nos leva a crer intuitivamente que temos uma boa chance de encontrar um compacto invariante $\mathcal{L}$, pois algo como $\{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \mid t \in P_{\lambda, \underline{\theta}, \underline{\theta}'}\}$ tem boa chance de funcionar: temos muitas possíveis escolhas para operadores de renormalização, e cada um deles tem uma probabilidade razoável de voltar ao mesmo conjunto $\mathcal{L}$.

Mais precisamente, fixamos $\varepsilon > 0$ pequeno e tomamos $P_\lambda = P_\lambda(\underline{\theta}, \underline{\theta}') = \{t \in \mathbb{R}$ tal que a interseção das ε-vizinhanças de $K_{\underline{\theta}}$ e $\lambda K'_{\underline{\theta}'} + t$ tem pelo menos $c \cdot \varepsilon^{-b}$ componentes conexas$\}$, onde $c > 0$ e $0 < b < d + d' - 1$ são fixados inicialmente (independentes de ε), e $\mathcal{L}_\varepsilon = \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda, t) \mid m(P_\lambda(\underline{\theta}, \underline{\theta}') \cap [-A, A]) > 2A - \tilde{c}$ e $t \in P_\lambda(\underline{\theta}, \underline{\theta}')\}$ onde $A \gg 0$ e $0 < \tilde{c} \ll 1$ são constantes. O Teorema de Marstrand garante que a medida de $\mathcal{L}_\varepsilon$ é pelo menos uma constante positiva independente de ε. Se pensarmos que, para cada ponto de $\mathcal{L}_\varepsilon$ e cada componente conexa da interseção das ε-vizinhanças de $K_{\underline{\theta}}$ e $\lambda K'_{\underline{\theta}'}$ temos probabilidade positiva uniforme p de que o operador de renormalização associado o envie ao interior de $\mathcal{L}_\varepsilon$ a uma distância de pelo menos ε^2 da fronteira de $\mathcal{L}_\varepsilon$, se houvesse independência em relação às componentes conexas, teríamos probabilidade da ordem de $(1-P)^{c\cdot\varepsilon^{-b}}$ de que nenhum desses operadores voltasse como queremos ao interior de L_ε. Por outro lado, a margem de segurança de ε^2 faz com que precisemos apenas que ε^{-k} desses pontos voltem, onde K é uma constante, e, como $\varepsilon^{-k}(1-P)^{c\varepsilon^{-b}} \ll 1$ temos muita esperança de que o $\mathcal{L}_\varepsilon$ funcione.

Assim, o teorema de Marstrand nos dá candidatos naturais para o compacto invariante $\mathcal{L}$. Nossa estratégia será mostrar que, talvez após uma pequena perturbação dos conjuntos de Cantor originais, esses candidatos a compacto invariante inspirados pelo teorema de Marstrand funcionarão.

Se examinarmos os operadores de renormalização $R_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$, veremos que eles são bastante expansivos em t, bastante contrativos em $(\underline{\theta},\underline{\theta}')$ e essencialmente neutros em λ. Assim, pequenas perturbações nos conjuntos de Cantor originais podem fazer variar bastante a posição relativa t, mas não fazem variar muito a escala λ após a renormalização. Isso faz com que as variáveis λ e t tenham um papel bastante diferente na demonstração. De fato, primeiro mostraremos que existe um compacto invariante a nível das variáveis $\underline{\theta},\underline{\theta}'$ e λ, sem a necessidade de perturbações, supondo apenas que os conjuntos de Cantor envolvidos não são "essencialmente afins". Este resultado é conhecido como o lema de recorrência de escalas (ou lema de seleção). Após isso, a prova do teorema assume um caráter probabilístico: construiremos uma família de perturbações de (K,K') com um grande número de parâmetros e mostraremos que para a maioria das escolhas desses parâmetros os candidatos naturais a $\mathcal{L}$ são de fato compactos invariantes.

O lema de recorrência de escalas garante que, se K é "essencialmente não-afim", então, dado um conjunto $L \subset \Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}'^- \times \mathbb{R}^*$ tal que, para um certo $A>0$ grande a medida do conjunto $\{\lambda \in [-A,A] \mid (\underline{\theta},\underline{\theta}',\lambda) \notin L\}$ é uniformemente pequena para todo

$(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$, então existe um conjunto F contido em uma pequena vizinhança de L tal que, para todo $(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ a medida do conjunto $\{\lambda \in [-A, A] \mid (\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda) \notin F\}$ é pequena e F é um compacto muito recorrente a nível de $\Sigma_B^- \times \Sigma_{B'}'^- \times \mathbb{R}^*$, o que significa que, para cada ponto de F existem muitos operadores de renormalização que, restritos às coordenadas $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', \lambda)$ levam esse ponto ao interior de F.

A hipótese de ser "essencialmente não-afim" significa que existem $\underline{\theta}, \widetilde{\underline{\theta}} \in \Sigma_B^-$ e $x \in K_{\widetilde{\underline{\theta}}}$ tais que $(k_{\underline{\theta}} \circ k_{\widetilde{\underline{\theta}}}^{-1}))''(x) \neq 0$, e "muitos operadores de renormalização" significa uma proporção fixa do número de todos os operadores de renormalização de uma determinada ordem de grandeza de escala.

Mais precisamente, supomos que K e K' são de classe C^2 (de fato basta supor que K é C^2 e K' é $C^{1+\varepsilon}$), e eixstem $\underline{\theta}_0$ e $\underline{\theta}_1 \in \Sigma^-$, com $\theta_0^0 = \theta_0^1$ e $x_0 \in K^{\underline{\theta}^0} \cap I_{\theta_0^0}$ tais que $|D \log D(k^{\underline{\theta}^1} \circ (k^{\underline{\theta}^0})^{-1})(x_0)| \neq 0$, onde D indica derivada, e a conclusão do lema é que se $\Sigma(\varepsilon)$ é o conjunto das palavras finitas $\underline{a}$ de $\Sigma = \Sigma_B$ (o shift associado ao Cantor K) tais que $I(\underline{a})$ tem comprimento da ordem de ε (m dulo fator constante) e $\Sigma'(\varepsilon)$ é definido de modo análogo, então, para $R > 0$ suficientemente grande, vale o seguinte resultado:

Se denotarmos por J_R o conjunto $[-R, -R^{-1}] \cup [R^{-1}, R]$, se $R > 0$ é suficientemente grande, e $E = \{E(\underline{a}, \underline{a}'), (\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\varepsilon) \times \Sigma'(\varepsilon)\}$ é uma família de subconjuntos de J_R tal que $m(J_R \backslash E(\underline{a}, \underline{a}')) < \delta$ para todo $\underline{a}$, $\underline{a}'$ (onde δ é uma constante pequena) então é possível achar uma outra família de subconjuntos de J_R, $E^* = \{E^*(\underline{a}, \underline{a}')\}$ tal que

i) para todo $(\underline{a}, \underline{a}')$, $E^*(\underline{a}, \underline{a}')$ está contida numa C_ε vizinhança de $E(\underline{a}, \underline{a}')$, onde C é uma constante.

ii) Se $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\varepsilon) \times \Sigma'(\varepsilon)$ e $\lambda \in E^*(\underline{a}, \underline{a}')$, podemos achar pelo menos $c\,\varepsilon^{-(d+d')}$ pares

$(\underline{b},\underline{b}') \in \Sigma(\varepsilon) \times \Sigma'(\varepsilon)$ (com $\underline{b},\underline{b}'$ começando respectivamente com a última letra de $\underline{a}$, $\underline{a}'$) tais que, se $\underline{\theta} \in \Sigma'$, $\underline{\theta}' \in \Sigma'^{-}$ terminam respectivamente com $\underline{a}$, $\underline{a}'$ e $R_{\underline{b},\underline{b}'}(\underline{\theta},\underline{\theta}',\lambda) = (\widetilde{\underline{\theta}},\widetilde{\underline{\theta}}',\tilde{\lambda})$ então $(\tilde{\lambda}-\varepsilon,\tilde{\lambda}+\varepsilon) \subset E^*(\underline{b},\underline{b}')$. $\square$

Sob as hipóteses do lema de recorrência de escalas sobre K e K' (e usando suas conclusões), é possível provar o

Teorema 2.2.2: $HD(K+K') = \min\{1, HD(K)+HD(K')\}$, desde que K seja um conjunto de Cantor regular de classe C^2 e não seja essencialmente afim, e K' seja um conjunto de Cantor regular de classe $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Prova: Veja [M2]. $\square$

2.3 - Comentários sobre generalizações e problemas em aberto

A extensão dos resultados deste livro para conjuntos de Cantor em dimensões superiores a 1 é dificultada pelo fato de que em dimensão maior que 1, conjuntos de Cantor regulares não têm geometria limitada, isto é, não é óbvio como estender os espaços de geometrias limite de modo natural. Entretanto, há alguma esperança de conseguir provar que projeções ao longo de folheações estáveis fortes de tais conjuntos contenham conjuntos de Cantor regulares em dimensão menor e as fibras destas projeções intersectadas com os conjuntos contenham conjuntos de Cantor com alguma propriedade de auto-semelhança, o que forneceria ferramentas para atacar os problemas em dimensão maior com uma estratégia parecida à que utilizamos aqui.

Por outro lado, há um trabalho em andamento do autor com M. Viana e J. Palis no sentido de estender para dimensão qualquer os resultados sobre bifurcações homoclínicas em dimensão 2. A estratégia é obter genericamente folheações estável forte e instável forte de codimensões iguais a 1 num subconjunto "grande" do conjunto hiperbólico em questão, e passar ao quociente por elas, reduzindo o problema essencialmente a estudar interseções de conjuntos de Cantor regulares em dimensão 1.

CAPÍTULO 3

OS ESPECTROS DE MARKOV E LAGRANGE

3.1 - Definições e enunciados

Seja α um número irracional. De acordo com o teorema de Dirichlet, a desigualdade $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ tem uma infinidade de soluções racionais p/q. Markov e Hurwitz melhoraram este resultado, provando que, para todo irracional α, a desigualdade $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot q^2}$ tem uma infinidade de soluções racionais, e que $\sqrt{5}$ é a melhor constante com esta propriedade: para $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e para qualquer $\varepsilon > 0$, a desigualdade $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ tem apenas um número finito de soluções (ver apêndice). Entretanto, fixado α irracional, pode-se esperar resultados melhores, o que nos leva a associar a cada α a sua constante de melhor aproximação $k(\alpha) = \sup\{k > 0 \mid \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{kq^2}$ tem uma infinidade de soluções racionais $p/q\} = \limsup\limits_{p,q \in \mathbb{Z}} \left(|q(q\alpha - p)|^{-1}\right) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nossa discussão inicial mostra que $k(\alpha) \geq \sqrt{5}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e $k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$. Não é difícil provar que $k(\alpha) = +\infty$ para quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Estaremos interessados nos $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $k(\alpha) < +\infty$, e, mais particularmente, na imagem da função k, isto é, no conjunto $L = \{k(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \text{ e } k(\alpha) < +\infty\}$. Este conjunto é conhecido como o *espectro de Lagrange*.

Provamos no apêndice uma fórmula para $k(\alpha)$: escrevemos α em fração contínua, $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ e definimos, para $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ e $\beta_n = [0, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots]$. Temos então $k(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n)$. Isto é um corolário da Proposição A.2 (e do Teorema A.3).

É interessante observar que se mudássemos um pouco as funções envolvidas na definição do espectro de Lagrange ele seria um conjunto bastante trivial: se para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ considerarmos o conjunto $k_f(\alpha) := \sup\big\{k > 0 \mid |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{f(q)}{k}$ tem infinitas soluções racionais $p/q\big\}$ então, caso tenhamos $\lim_{q\to+\infty} q^2 f(q) = 0$ então a imagem de k_f seria $(0, +\infty]$ (ou $[0, +\infty]$, se consideramos $\sup(\emptyset) = 0$ neste contexto) e, caso $\lim_{q\to+\infty} q^2 f(q) = +\infty$, então a imagem de k_f seria $\{+\infty\}$.

O conjunto L encodifica uma série de propriedades diofantinas de números reais, e vem sendo estudado há bastante tempo. Talvez o primeiro resultado não-trivial sobre ele se deva a Markov, que provou em 1879 (ver [Ma]) que $L \cap (-\infty, 3) = \{k_1 = \sqrt{5} < k_2 = 2\sqrt{2} < k_3 = \frac{\sqrt{221}}{5} < \cdots\}$, onde (k_n) é uma seqüência convergente a 3 tal que $k_n^2 \in \mathbb{Q}$ para todo n. Assim, o "começo" do espectro de Lagrange é discreto. Essa afirmação não é verdadeira para todo o conjunto L. Marshall Hall prova em 1947 ([H]) que L contém toda uma semi-reta (por exemplo $[6, +\infty)$), e G. Freiman determinou em 1975 a maior semi-reta que está contida em L, que é $\left[4 + \frac{253589820 + 283748\sqrt{462}}{491993569}, +\infty\right)$. Estes dois últimos resulados baseam-se fortemente no estudo de somas de conjuntos de

Cantor regulares, cuja relação com o espectro de Lagrange tem origem na fórmula que apresentamos para $k(\alpha)$, e é o tema principal deste capítulo. Por exemplo, o resultado que M. Hall enuncia em seu artigo [H] é o seguinte: se $C(4)$ é o conjunto de Cantor regular dos reais de $[0,1]$ em cuja fração contínua aparecem apenas os coeficientes 1, 2, 3 e 4 então $C(4)+C(4)=[\sqrt{2}-1, 4(\sqrt{2}-1)]$, do qual não é difícil deduzir que $L \supset [6,+\infty)$ via a fórmula para $k(\alpha)$.

De $k(\alpha)=\limsup\limits_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)$ podemos obter a seguinte caracterização do espectro de Lagrange: seja $\Sigma = \left(\mathbb{N}^*\right)^{\mathbb{N}}$, o conjunto das seqüências bi-infinitas de inteiros positivos, e $\sigma\colon\Sigma\to\Sigma$ o shift definido por $\sigma((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Se $f\colon\Sigma\to\mathbb{R}$ é definida por $f((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \alpha_0+\beta_0 = [a_0,a_1,a_2,\ldots]+[0;a_{-1},a_{-2},\ldots]$ então $L = \{\limsup\limits_{n\to+\infty} f(\sigma^n\underline{\theta}), \underline{\theta}\in\Sigma\}$. Outro conjunto de números reais que será de nosso interesse é o *espectro de Markov* M, que é igual a $\{\sup\limits_{n\to\infty} f(\sigma^n\underline{\theta}), \underline{\theta}\in\Sigma\}$. O espectro de Markov tem a seguinte interpretação aritmética: $M = \{(\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} |f(x,y)|)^{-1};$ $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2,\ b^2-4ac=1\}$. São fatos conhecidos que L e M são subconjuntos fechados da reta e que $L\subset M$. Provamos em [M2] os seguintes resultados, que pretendemos discutir neste capítulo:

Teorema 1: Para todo $t\in\mathbb{R}$, as dimensões de Hausdorff de $L\cap(-\infty,t)$ e de $M\cap(-\infty,t)$ são iguais. Se denotarmos essas dimensões por $d(t)$, temos os seguintes fatos:

i) $d\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ é contínua e sobrejetiva.

ii) $d(t)=\min\{1, 2\cdot HD(k^{-1}(-\infty,t))\}$

iii) $\max\{t\in\mathbb{R} \mid d(t)=0\}=3$

iv) $\quad d(\sqrt{12}) = 1$

(As afirmações iii) e iv) são conseqüências simples de ii)).

Teorema 2: O conjunto dos pontos de acumulação de L é perfeito, isto é, $L' = L''$.

Teorema 3: $\quad 0 < HD(M \backslash L) < 1$.

Estes teoremas são baseados na idéia de aproximar partes de M e de L por dentro e por fora por somas de conjuntos de Cantor regulares de dimensões próximas. A prova do Teorema 1 depende de modo essencial de um resultado sobre dimensões de Hausdorff de somas aritméticas de conjuntos de Cantor regulares, que será discutido na próxima seção, e cuja prova depende do lema de recorrência de escala de [MY].

3.2 - Dimensões de Hausdorff e somas aritméticas de conjuntos de Cantor de frações contínuas

Vimos no capítulo anterior que, se K_1 e K_2 são conjuntos de Cantor C^2 que satisfazem as hipóteses do lema de recorrência de escalas, então vale a fórmula $HD(K_1 + K_2) = \min\{1, HD(K_1) + HD(K_2)\}$.

Iremos aplicar este resultado a conjuntos de Cantor regulares definidos por restrições da função de Gauss $g: (0,1] \to (0,1]$ definida por $g(x) = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ (cuja relação com frações cont´ inuas é evidente) a determinados domínios de Markov (que serão uniões finitas de intervalos cujos extremos serão irracionalidades quadráticas). Para isso, precisamos provar que tais conjuntos de Cantor satisfazem as hipóteses do lema de recorrência de escalas, isto é, que não são essencialmente afins.

Observemos inicialmente que qualquer conjunto de Cantor regular de Gauss (nome que atribuiremos aos conjuntos de Cantor descritos no parágrafo anterior) contém um conjunto de Cantor *completo* de Gauss, nome que atribuímos ao seguinte tipo de conjunto de Cantor: A cada conjunto finito de seqüências finitas de inteiros positivos B associamos o conjunto $K(B) = \{[0;\beta_1,\beta_2,\dots] \mid \beta_i \in B,\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, que, excetuando os casos triviais onde $K(B)$ é um ponto, é um conjunto de Cantor regular completo de Gauss. Este fato pode ser provado do seguinte mod: tomamos duas palavras finitas admissíveis $\gamma_1 = b_1 b_2 \dots b_n b_1$ e $\gamma_2 = b_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3 \dots \tilde{b}_m b_1$ começando e terminado em b_1 que não sejam ambas cópias múltiplas do mesmo bloco de símbolos (aqui os símbolos b_i são inteiros positivos corespondentes a ramos $\dfrac{1}{x} - b_i$ da função de Gauss g, que aparecem na construção do Cantor regular de Gauss em questão K). Se $\tilde{\gamma}_1 = b_1 b_2 \dots b_n$ e $\tilde{\gamma}_2 = b_1 \tilde{b}_2 \dots \tilde{b}_m$ então o Cantor completo de Gauss $K(\{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2\})$ está contido em K.

Basta provar agora que nenhum Cantor completo de Gauss é essencialmente afim. Observemos que $K(B)$ é definido por $\psi\colon \bigcup\limits_{\beta \in B} I_\beta \to I$, onde $I = [0,1]$ e, para cada $\beta \in B$, $I_\beta = \{[0;\beta,\alpha], \alpha \geq 1\}$ e $\psi_\beta = \psi|_{I_\beta}$ é o iterado de g definido por $\psi_\beta([0;\beta,\alpha]) = 1/\alpha$.

Seja $x_\beta = [0;\beta,\beta,\beta,\dots]$ o ponto fixo de ψ_β. Se $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ e $p_k/q_k = [0; b_1, b_2, \dots, b_k]$ são as reduzidas de $[0;\beta]$, então $\psi_\beta(x) = \dfrac{q_{n-1}x - p_{n-1}}{p_n - q_n x}$, e os pontos fixos de ψ_β (estendido à reta pela sua fórmula) são as raízes de $q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0$ (ver Seção 3 do Apêndice).

Existe um difeomorfismo $\alpha_\beta\colon I \to I$ tal que $\alpha_\beta(x_\beta) = x_\beta$ $\alpha'_\beta(x_\beta) = 1$ e $\alpha_\beta \circ \psi_\beta \circ \alpha_\beta^{-1}$ é afim. Além disso, podemos tomar um tal α_β da forma $\alpha_\beta(x) = \dfrac{a_\beta x + b_\beta}{c_\beta x + d_\beta}$ (isto é um exercício sobre triangularização de matrizes...). Não há perda de generalidade em supor que B contém dois elementos β de γ do mesmo tamanho (i.e., com o mesmo número de símbolos), pois, se não for esse o caso, podemos considerar etapas mais avançada da construção de $K(B)$ onde hja tais elementos. É suficiente agora mostrar que se $\alpha_\beta \circ \alpha_\varepsilon^{-1}$ é afim e γ tem o mesmo número de elementos que β então $\gamma = \beta$, pois isso implicaria que $\alpha_\beta \circ \psi_\gamma \circ \alpha_\beta^{-1}$ não é afim, donde é uma transformação da forma $\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$, cuja derivada segunda é zero apenas num conjunto finito, ou seja, $\alpha_\beta \circ \psi \circ \alpha_\beta^{-1}$ tem uma componente afim (a de ψ_β), e outra componente cuja derivada segunda é não-nula em muitos pontos de $K(B)$ (a de ψ_γ), o que implica que $K(B)$ não é essencialmente afim. Se $\alpha_\beta \circ \psi_\gamma \circ \alpha_\beta^{-1}$ é afim então ∞ é um ponto fixo comum de $\alpha_\beta \circ \alpha_\beta^{-1}$ e $\alpha_\beta \circ \psi_\beta \circ \alpha_\beta^{-1}$, e portanto $\alpha_\beta^{-1}(\infty)$ é ponto fixo comum de $\psi_\beta(x) = \dfrac{q_{n-1}x - p_{n-1}}{p_n - q_n x}$ e $\psi_\gamma = \dfrac{\tilde{q}_{n-1}x - \tilde{p}_{n-1}}{\tilde{p}_n - \tilde{q}_n x}$, donde é raiz comum dos polinômios $q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1}$ e $\tilde{q}_n x^2 + (\tilde{q}_{n-1} - \tilde{p}_n)x - \tilde{p}_{n-1}$, donde esses dois polinômios são iguais (pois são irredutíveis em $\mathbb{Z}[x]$), donde suas outras raízes coincidem, ou seja, $x_\beta = x_\gamma$ e portanto $\beta = \gamma$.

Provamos assim o seguinte resultado:

Proposição 3.2.1: Se K_1 e K_2 são conjuntos de Cantor regulares de Gauss então $HD(K_1 + K_2) = \min\{1, HD(K_1) + HD(K_2)\}$. $\square$

Outro fato importante na prova de nossos resultados sobre dimensões de Hausdorff de partes dos espectros de Markov e Lagrange será discutido a seguir:

Definição: Se $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ então $\beta^t = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_2, b_1)$, e se B é um conjunto de seqüências finitas então $B^t = \{\beta^t, \beta \in B\}$.

Se $q_n(\beta)$ é o denominador da fração contínua $[0;\beta] = [0, b_1, \ldots, b_n]$ então $q_n(\beta) = q_n(\beta^t)$. Este é um fator já conhecido por Euler, e uma boa referência sobre sua prova (que também pode ser considerada como um exercício para o leitor) está no apêndice 2 de [CF]. Como conseqüência deste restulado e do fato de que os comprimentos dos intervalos da construção de um conjunto de Cantor completo de Gauss dependerem essencialmente dos denominadores das frações contínuas finitas envolvidas, prova-se a seguinte

Proposição: $HD(K(B)) = HD(K(B^t))$ para todo conjunto finito B de seqüências finitas de inteiros positivos. $\square$

Corolário: $HD(K(B) + K(B^t)) = \min\{1, 2 \cdot HD(K(B))\}$. $\square$

3.3 - Idéias das demonstrações dos resultados sobre os espectros

Seja $\Sigma = \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$, $\ell\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por $\ell(\underline{\theta}) = \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n)$, onde, se $\underline{\theta} = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ então $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ e $\beta_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots]$ e $m\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por $m(\underline{\theta}) = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(\alpha_n + \beta_n)$. Então, como observamos no início deste capítulo, o espectro de Lagrange é o conjunto $L = \{\ell(\underline{\theta}), \underline{\theta} \in \Sigma\}$ e o espectro de Markov é o conjunto $M = \{m(\underline{\theta}), \underline{\theta} \in \Sigma\}$.

A prova dos resultados sobre a função $d(t)$ baseia-se, como mencionamos no início deste capítulo, no fato de que podemos aproximar por dentro e por fora pedaços dos espectros de Markov e Lagrange por somas de conjuntos de Cantor regulares de Gauss com dimensões de Hausdorff próximas (em geral essas somas serão do tipo $K(B)+K(B^t)$, e usaremos a proposição acima). A principal ferramenta que usaremos na construção de tais aproximações será o seguinte lema técnico, cuja prova (assim como os detalhes da prova dos teoremas deste capítulo) se encontra em [M2]:

Lema: Para cada $t > 0$ e $\varepsilon > 0$, seja $\Sigma(t) = \{\underline{\theta} \in \Sigma \mid m(\underline{\theta}) \leq t\}$, e seja $N_\varepsilon(t)$ o número de seqüências finitas α tais que o intervalo $I(\alpha) = \{x \in [0,1] \mid x = [0;\alpha, y],\ y \geq 1\}$ tem comprimento maior ou igual a ε e α aparece como subseqüência de algum elemento de $\Sigma(t)$. Definimos $D(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} -\dfrac{\log N_\varepsilon(t)}{\log \varepsilon}$ (o limite existe pois existe $C > 0$ tal que $N_{\varepsilon\delta}(t) \leq C\, N_\varepsilon(t) N_\delta(t)$, $\forall\, \varepsilon, \delta > 0$). Então, dado $\tau > 0$ existe $\delta > 0$ e um shift completo $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma(t-\delta)$ com $HD(\widetilde{\Sigma}_+, d) \geq D(t) - \tau$, onde $\Sigma_+ = \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}}$, $\widetilde{\Sigma}_+ = \widetilde{\Sigma} \cap \Sigma_+$, e $d\colon \Sigma_+ \times \Sigma_+ \to \mathbb{R}$ é a distância definida por $d(\underline{\theta}, \underline{\theta}') = |I(\underline{\theta} \wedge \underline{\theta}')|$. $\square$

A idéia da prova de que $L' = L''$ é criar conjuntos de Cantor regulares de Gauss usando seq"uências finits que aparecem infinitas vezes nas frações contínuas das preimagem por k de uma seqüência convergente de pontos de L. A imagem por k do Cantor de Gauss gerado por, digamos, duas seqüências dessas fornecerá um conjunto de Cantor contido em L próximo ao limiteda tal seqüência. Aumentando o comprimento das seqüências finitas consideradas obtemos o resultado.

Para estudar o complementar do espectro de Lagrange em relação ao espectro de Markov, primeiro mostramos que $M \backslash L$ contém conjuntos de Cantor regulares próximos a $\alpha_\infty = [2; \overline{1,1,2,2,2,1,2}] + [0; 1,2,2,2,1,1,2,1,\overline{2}] \cong 3{,}293044265\ldots$, que Freiman provou ser um ponto de acumulação de $M \backslash L$ (ver Capítulo 3 de [CF]) (as barras superiores indicam período nas frações contínuas pré-periódicas acima), com um argumento semelhante à prova de $L' = L''$. A prova de $HD(M\backslash L) < 1$ é mais técnica e delicada, e depende da análise de restrições à seqüências finitas que podem aparecer nas frações contínuas de elementos de conjuntos de Cantor cuja imagem por k esteja contida em $M\backslash L$. Veja [M2] para detalhes.

3.4 - Espectros de Markov e Lagrange dinâmicos

As caracterizações em termos de shift Σ e das funções ℓ e m dos espectros de Markov e Lagrange admitem uma generalização natural no contexto de dinâmica hiperbólica: seja $\varphi: M^2 \to M^2$ um difeomorfismo, $\Lambda \subset M^2$ um conjunto hiperbólico para φ e $f: M^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de classe C^2. Podemos definir espectros de Markov e Lagrange dinâmicos associados ao par (f, Λ) como segue: $L(f,\Lambda) = \{\limsup\limits_{n\to+\infty} f(\varphi^n(x)), x \in \Lambda\}$ e $M(f,\Lambda) = \{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(\varphi^n(x)), x \in \Lambda\}$. É possível provar de um modo análogo ao que descrevemos neste capítulo que para conjuntos abertos de (f, φ) (que contém abertos densos de $\{(f,\varphi) \mid \varphi$ preserva área $\}$ a função $d(t) = d_{f,\Lambda}(t) = HD(L(f,\Lambda) \cap (-\infty, t))$ coincide com $HD(M(f,\Lambda) \cap (-\infty, t))$, é contínua e sua imagem é o intervalo $[0, \min\{1, HD(\Lambda)\}]$. Genericamente, nesses casos, o ponto $t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid d(t) = 1\}$ pertence ao fecho do interior de $L(f,\Lambda) \subset M(f,\Lambda)$.

Vale notar que o resultado não é verdade em geral para φ dissipativo, pois há conjuntos abertos de contraexemplos onde $d(t)$ tem um número finito de descontinuidades, e sua imagem é uma união finita de intervalos não-degenerados.

As demonstrações desses últimos resultados aparecerão em [M3].

APÊNDICE

FRAÇÕES CONTÍNUAS,
REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS E APROXIMAÇÕES

(Publicado na revista Eureka! nº 3)

Introdução

A teoria de frações contínuas é um dos mais belos temas da matemática elementar, sendo ainda hoje assunto de pesquisa recente (incluindo a do autor destas linhas). O objetivo deste artigo é servir como referência didática em português a nível secundário sobre o assunto.

Nas inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é sem dúvida a mais complicada conceitualmente, e a representação de um número real está diretamente ligada à própria noção de número real.

De fato, o conceito de número natural é quase um conceito primitivo no ensino secundário. Já um número inteiro é um número natural com um sinal que pode ser $+$ ou $-$, e um número racional é a razão entre um número inteiro e um natural não nulo. Por outro lado, dizer o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mas há coisas que podemos dizer sobre eles. Uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$ é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais. Efetivamente, dado

$x \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ $(k = [x])$ tal que $0 \leq x - k < 1$. Podemos escrever a representação decimal de $x - k = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,\quad a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, o que significa que se $r_n = a_n + 10 \cdot a_{n-1} + 100 \cdot a_{n-2} + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_1$, então $\dfrac{r_n}{10^n} \leq x - k < \dfrac{r_n + 1}{10^n}$, e portanto $k + \dfrac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de x, no sentido que o erro $\left|x - \left(k + \dfrac{r_n}{10^n}\right)\right|$ é menor que $\dfrac{1}{10^n}$, que é um número bem pequeno se n for grande. A representação decimal de um número real fornece pois uma seqüência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10.

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q natural não nulo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\dfrac{p}{q} \leq x < \dfrac{p+1}{q}$, e portanto $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q}$ e $\left|x - \dfrac{p+1}{q}\right| \leq \dfrac{1}{q}$. Em particular há aproximações de x por racionais com denominador q com erro menor que $\dfrac{1}{q}$. A representação decimal de x equivale a dar essas aproximações para os denominadores q que são potências de 10, e tem méritos como sua praticidade para efetuar cálculos que a fazem a mais popular das representações dos números reais. Por outro lado, envolve a escolha arbitrária da base 10, e oculta freqüentemente aproximações racionais de x muito mais eficientes do que as que exibe. Por exemplo,

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right| \quad \text{e} \quad \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|$$

mostram que $\dfrac{22}{7}$ e $\dfrac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores, e de fato são aproximações muito mais espetaculares do que se podia esperar.

O objetivo deste artigo é apresentar uma outra maneira de representar números reais, que sempre fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, e de fato fornece todas essas aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural e conceitualmente simples: a representação por frações contínuas.

Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $[x]$ como o único inteiro tal que $[x] \leq x < [x] + 1$. Definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = [\alpha_n], \quad \text{e, se} \quad \alpha_n \in Z, \ \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}, \text{ para todo } n \in N.$$

Se, para algum n, $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Senão denotamos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

O sentido dessa última notação ficará claro mais tarde. A representação acima se chama a representação por frações contínuas de x.

Curiosidade: O denominador da n-ésima aproximação em base B de um número real é B^n. Já o denominador q_n da n-ésima aproximação por fração contínua de x depende de x. Apesar disso, para quase todo real x, $\sqrt[n]{q_n}$ converge a $e^{\pi^2/12 \ln 2} = 3,27582291872\ldots$

(meu número real preferido!) e $\sqrt[n]{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|}$ converge a $e^{-\pi^2/6\ln 2} = 0,093187822954\ldots$.

Observação: Os α_n (como funções de x) são funções distintas do tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ com a, b, c, d inteiros. Se a fração contínua de x é periódica, ou seja, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, então x será raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros, ou seja, será um irracional da forma $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$. A recíproca é verdadeira (de fato já foi enunciada no artigo de José Paulo Carneiro na RPN, ver referências), mas sua prova é mais difícil, e será apresentada no Apêndice.

Se $x \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita, e seus coeficientes a_n vêm do algoritmo de Euclides:

$$
\begin{array}{lll}
x = \dfrac{p}{q}, \quad q > 0 & p = a_0 q + r_0 & 0 \le r_0 < q \\
 & q = a_1 r_0 + r_1 & 0 \le r_1 < r_0 \\
 & r_0 = a_2 r_1 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & r_{n-2} = a_n r_{n-1} &
\end{array}
$$

Isso já é uma vantagem da representação por frações contínuas (além de não depender de escolhas artificiais de base), pois o reconhecimento de racionais é mais simples que na representação decimal.

Seção 1: Reduzidas e boas aproximações.

Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Sejam $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre si tais que

$\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $n \geq 0$. O seguinte resultado será fundamental no que seguirá.

Proposição: (p_n) e (q_n) satisfazem a recorrência $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$, e $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$, para todo $n \geq 0$. Temos ainda $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$. Além disso, $p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1} = (-1)^n$, $\forall\, n \geq 0$.

Prova: Por indução em n, provaremos que se $t_k > 0$, para $k > 1$ então $[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n] = \dfrac{x_k}{y_k}$ onde as seqüências (x_m) e (y_m) são definidas por $x_0 = t_0$, $y_0 = 1$, $x_1 = t_0t_1 + 1$, $y_1 = t_0$ $x_{n+2} = t_{n+2}\, x_{n+1} + x_n$, $y_{n+2} = t_{n+2}\, y_{n+1} + y_n$, $\forall\, n$. Suponha que a afirmação seja válida para $k = n$. Para $k = n + 1$ temos

$$[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}] = [t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}] =$$

$$= \frac{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1} + x_{n-2}}{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1} + y_{n-2}} = \frac{t_{n+1}(t_nx_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_ny_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} = \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}}\,.$$

Por outro lado as igualdades

- $p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1) - a_0a_1 = 1$
- $p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1}$
  $-(a_{n+2}\, q_{n+1} + q_n)p_{n+1} = -(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})$

mostram que $p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1} = (-1)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, o que implica em particular que os p_n, q_n dados pelas recorrências acima são primos entre si. $\square$

Corolário: $x = \dfrac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$ e $\alpha_n = \dfrac{p_{n-2} - q_{n-2}\alpha}{q_{n-1}\alpha - p_{n-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: A primeira igualdade é conseqüência direta da prova, e a segunda é conseqüência direta da primeira pois $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n]$.

Note que as reduzidas de ordem par são menores e as de ordem ímpar maiores que $x = [a_0; a_1, \ldots]$.

Teorema 1: $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leq \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Além disso, $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{2q_n^2}$ ou $\left|x - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \dfrac{1}{2q_{n+1}^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: x sempre pertence ao segmento de extremos $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Rightarrow \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

Além disso, se

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \text{ e } \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| > \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Rightarrow q_{n+1} = q_n \text{ , absurdo.} \qquad \square$$

Observação: De fato $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < \dfrac{1}{a_{n+1} q_n^2}$. Quanto maior for a_{n+1} melhor será a aproximação $\dfrac{p_n}{q_n}$ de x. O próximo resultado nos dá explicitamente o erro da aproximação de x por $\dfrac{p_n}{q_n}$.

Proposição:

$$x-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2}\,,\ \text{onde } \beta_{n+1}=\frac{q_{n-1}}{q_n}=[0;a_n,a_{n-1},a_{n-2},\dots,a_1].$$

Demonstração: Temos $\alpha_{n+1}=\dfrac{p_{n-1}-q_{n-1}x}{q_nx-p_n}$. Portanto,

$$\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=\frac{p_{n-1}-q_{n-1}x}{q_nx-p_n}+\frac{q_{n-1}}{q_n}=\frac{p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}}{q_n(q_nx-p_n)}=\frac{(-1)^n}{q_n(q_nx-p_n)}\Rightarrow x-\frac{p_n}{q_n}=$$

$$=\frac{q_n(q_nx-p_n)}{q_n^2}=\frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2}\,. \qquad \square$$

Como aplicação podemos provar o seguinte.

Teorema (Hurwitz, Markov). Para todo α irracional, $n\geq 1$ temos $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ para pelo menos um racional $\dfrac{p}{q}\in\left\{\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\dfrac{p_n}{q_n},\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}$. Em particular $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais p/q.

Demonstração: Suponha que o teorema seja falso. Então existe α irracional, $n\geq 1$ com $\alpha_n+\beta_n\leq\sqrt{5}$, $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}\leq\sqrt{5}$ e $\alpha_{n+2}+\beta_{n+2}\leq 5$. Devemos portanto ter $a_n=a_{n+1}=a_{n+2}=1$ (todos são claramente no máximo 2, e se algum a_k é igual a 2 com $k\in\{n,n+1,n+2\}$, teríamos $a_k+\beta_k\geq 2+\dfrac{1}{3}>\sqrt{5}$, absurdo.)

Seja $x=1/\alpha_{n+2}$ e $y=\beta_{n+1}$. As desigualdades acima se traduzem em

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{y}\leq\sqrt{5},\ \ 1+x+y\leq\sqrt{5}\text{ e }e\frac{1}{x}+\frac{1}{1+y}\leq\sqrt{5}.$$

Temos

$$1+x+y \leq \sqrt{5} \Rightarrow 1+x \leq \sqrt{5}-y \Rightarrow \frac{1}{1+x}+\frac{1}{y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-y}+\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5}-y)}$$

e portanto $y(\sqrt{5}-y) \geq 1 \Rightarrow y \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot$ Por outro lado temos

$$x \leq \sqrt{5}-1-y \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{1+4} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1-y}+\frac{1}{1+4}=\frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)}$$

e portanto $(1+4)(\sqrt{5}-1-y) \geq 1 \Rightarrow y \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, e portanto devemos ter $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, o que é absurdo pois $y=\beta_{n+1}=\dfrac{q_{n=1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$.

Observação: Em particular provamos que $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais $\dfrac{p}{q}$, para todo α irracional. $\sqrt{5}$ é o maior número com essa propriedade. De fato, se

$$\varepsilon>0, \quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2},$$

temos

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-p\right|<\frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q} \Rightarrow \left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-p\right|\left|q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-p\right|<\frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\varepsilon},$$

ou seja,

$$|p^2-pq-q^2|<\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}-\sqrt{5}\right| \Big/ (\sqrt{5}+\varepsilon).$$

Se q é grande, $1/q^2$ é pequeno, e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q}$ é muito próximo de 0, donde $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q} - \sqrt{5}\right| \Big/ (\sqrt{5} + \varepsilon)$ é muito próximo de $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\varepsilon} < 1$, absurdo, pois $|p^2 - pq - q^2| \geq 1$ (de fato $p^2 - pq - q^2$ é um inteiro não nulo, pois se $p^2 - pq - q^2 = 0$ teríamos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\},$$

absurdo, pois $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.)

Outra maneira de ver que, para todo $\varepsilon > 0$, $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ tem apenas um número finito de soluções $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ é observar que as melhores aproximações racionais de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são as reduzidas $\dfrac{p_n}{q_n}$ de sua fração contínua $[1, 1, 1, 1, \ldots]$ (ver seção 2 e exemplos), para as quais temos $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| = \dfrac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} q_n^2}$, com $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$ se aproximando cada vez mais de

$$[1; 1, 1, 1, \ldots] + [0; 1.1.1. \ldots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

Exemplos:

- $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \ldots]$, portanto

  $\dfrac{p_0}{q_0} = 3, \quad \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{22}{7}, \quad \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{333}{106}, \quad \dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{355}{113} \ldots$

- $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots]$, (isso não é fácil de provar.)
- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ pois

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \cdots$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \ldots] \text{ pois } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \cdots$$

Isto prova em particular que $\sqrt{2}$ e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são irracionais, pois sua fração contínua é infinita.

Seção 2: Boas aproximações são reduzidas.

O próximo teorema (e seu Corolário 2) caracteriza as reduzidas em termo do erro reduzido da aproximação de x por p/q, o qual é, por definição, a razão entre $|x - p/q|$ e o erro máximo da aproximação por falta com denominador q, que é $1/q$. Assim, o erro reduzido da aproximação de x por p/q é $|qx - p|$.

Teorema 2: $|q_n x - p_n| < |qx - p|, \forall\, p, q \in \mathbb{Z},\ 0 < q < q_n\ \dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}\cdot$. Além disso, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|,\ \ \forall\, p, q \in \mathbb{Z},\ 0 < q < q_{n+1}$.

Prova: $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \geq \dfrac{1}{qq_n} > \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$ se $q < q_{n+1}$, e assim $\dfrac{p}{q}$ está fora do intervalo

$\left(\dfrac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$. Portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \Rightarrow |qx - p|$$

$$\geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Além disso, se vale a igualdade, então $x = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$, e $q_{n+1} > 2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último coeficiente a_n é sempre maior que 1. Nesse caso, se $q < q_n$, teremos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}}$$

$$> \frac{1}{qq_{n+1}} \Rightarrow |qx - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Corolário 1: $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \dfrac{p}{q}\right|, \forall\, q < q_n$.

Corolário 2: Se $|qx - p| < |q'x - p'|, \forall\, q' \leq q, \dfrac{p}{q} \neq \dfrac{q'}{q'}$ então p/q é uma reduzida da fração contínua de x.

Prova: Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$.

Teremos $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$, e portanto $p/q = p_n/q_n$. $\square$

Teorema 3: Se $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$ então $\dfrac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.

Prova: Seja n tal que $q_n < q \leq q_{n+1}$. Suponha que $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Então, temos duas possibilidades:

a) $\quad q \geq \dfrac{q_{n+1}}{2} \Rightarrow \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \geq \dfrac{1}{q q_{n+1}} \geq \dfrac{1}{2q^2}$.

b) $\quad q < \dfrac{q_{n+1}}{2} \Rightarrow q_{n+1} > 2q_n \Rightarrow \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \geq \left| \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p}{q} \right| - \left| \dfrac{p_{nm}}{q_{nm}} - \dfrac{p_n}{q_n} \right| \geq \dfrac{1}{q q_n} -$

$\dfrac{1}{q_n q_{n+1}} = \dfrac{q_{n+1} - q}{q q_n q_{n+1}} > \frac{1}{2qq_n} > \frac{1}{2q^2}$.

Seção 3: Frações contínuas periódicas

Nesta seção provaremos que os números reais com fração contínua periódica são exatamente as raízes de equações do segundo grau com coeficientes inteiros.

Lembramos que na representação de x por fração contínua, a_n, α_n são definidos por recursão por

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = [\alpha_n], \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}\cdot$$

E temos

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Isso dá uma prova explícita do fato de que se a fração contínua de x é periódica, então x é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. De fato, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ então

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}} \quad \Rightarrow (q_{n-1}\, q_{n+k-2} - q_{n-2}\, q_{n+k-1})x^2$$

$$+ (p_{n+k-1}\, q_{n-2} + p_{n-2}\, q_{n+k-1} - p_{n+k-2}\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_{n+k-2})x$$

$$+ p_{n-1}\, p_{n+k-2} - p_{n-2}\, p_{n+k-1} = 0.$$

Note que o coeficiente de x^2 é não-nulo, pois $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível (de fato $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$) de denominador q_{n-2} e $\dfrac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ é uma fração irredutivel de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, donde $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \dfrac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}} \Rightarrow q_{n-1}\, q_{n+k-2} - q_{n-2}\, q_{n+k-1} \neq 0$.

Vamos provar agora um resultado devido a Lagrange segundo o qual se x é uma *irracionalidade quadrática*, isto é, se x é um irracional do tipo $r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ então a fração contínua de x é periódica, i.e., existem $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ com $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. Neste caso, existem a, b, c inteiros tais que $ax^2 + bx + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. Como vimos na seção 1,

$$x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\,,$$

e portanto

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= a\, p_{n-1}^2 + b\, p_{n-1}q_{n-1} + c\, q_{n-1}^2 \\ B_n &= 2a\, p_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2c\, q_{n-1}q_{n-2} \\ C_n &= a\, p_{n-2}^2 + b\, p_{n-2}q_{n-2} + c\, q_{n-2}^2\,. \end{aligned}$$

Note que $C_n = A_{n-1}$. Vamos provar que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = a\, p_{n-1}^2 + b\, p_{n-1}q_{n-1} + c\, q_{n-1}^2 = a\, q_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

onde x e $\bar{x}$ são as raízes de $a, X^2 + b\,X + c = 0$, mas

$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1 \Rightarrow |A_n| = a\,q_{n-1}^2 \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

$$\leq a\left(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \leq a(|\bar{x} - x| + 1) =: M.$$

Notemos agora que $B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac, \forall\, n \in \mathbb{N}$. De fato, $B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac$. Portanto, $B_n^2 \leq 4A_nC_n + b^2 - 4ac = 4M^2 + b^2 - 4ac \Rightarrow B_n \leq M' = \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Provamos assim que A_n , B_n e C_n estão uniformemente limitados, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$, e portanto de possíveis valores de α_n . Assim, necessariamente $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ para alguma escolha de $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^*$.

Referências

- N. Beskin - Frações contínuas - Iniciação à Matemática - Editora Mir.
- José Paulo Q. Carneiro - Um processo finito para a raiz quadrada - RPM 34, 1997, pp. 36–44.
- C.D. Olds - Continued Fractions - New Mathematical Library - Random House.
- A.M. Rockett, P. Szüsz - Continued Fractions - World Scientific.

REFERÊNCIAS

[BPMV] R. Bamón, S. Plaza, C.G. Moreira and J. Vera, Differentiable structures of central Cantor sets, Ergod. Th. and Dynam. Syst. 17 (1997), pp. 1027–1042.

[BPV] R. Bamón, S. Plaza and J. Vera, On Central Cantor Sets with self-arithmetic difference of positive Lebesgue measure, J. London Math. Soc. 51 (1995), pp. 137–146.

[CF] T.W. Cusick and M.E. Flahive, The Markoff and Lagrange spectra, Math. Surveys and Monographs, no. 30, A.M.S. (1989).

[F] G.A. Freiman, Diophantine approximation and geometry of numbers (The Markoff spectrum), Kalininskii Gosudarstvennyi Universitet, Moscow, 1975.

[H] M. Hall, On the sum and product of continued fractions, Annals of Math., Vol. 48, (1947), pp. 966–993.

[L] Larsson, Per, L'ensemble difference de deux ensembles de Cantor aleatoires, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 310 (1990), no. 10, 735–738.

[M] C.G. Moreira, Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996), no. 6, pp. 741–781.

[M2] C.G. Moreira, Geometric properties of the Markov and Lagrange spectra. Preprint-IMPA.

[M3] C.G. Moreira, Geometric properties of dynamical spectra. To appear

[MY] C.G. Moreira and J.-C. Yoccoz, Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions. Preprint - IMPA, 1998.

[MY2] C.G. Moreira and J.-C. Yoccoz, Tangences homoclines stables pour les ensembles hyperboliques de grande dimension fractale. To appear.

[Ma] A. Markoff, A new sequence of minima in the geometry of numbers, Math. Ann. 15 (1879), 381–406.

[MO] P. Mendes and F. Oliveira, On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets, Nonlinearity, Vol. 7, (1994), pp. 329–343.

[N1] S. Newhouse, Non density of Axiom $A(a)$ on S^2, Proc. A.M.S. Symp. Pure Math., Vol. 14, (1970), pp. 191–202.

[N2] S. Newhouse, Diffeomorphisms with infinitely many sinks, Topology, Vol. 13, (1974), pp. 9–18.

[N3] S. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, Publ. Math. IHES, Vol. 50, (1979), pp. 101–151.

[P] J. Palis, Homoclinic orbits, hyperbolic dynamics and fractional dimension of Cantor sets, Contemporary Mathematics 58, (1987), pp. 203–216.

[P1] J. Palis, Homoclinic bifurcations, sensitive chaotic dynamics and strange attractors, Dynamical Syst. and Related Topics. World Scientific, (1991), pp. 466-473.

[PT] J. Palis and F. Takens, Cycles and measure of bifurcation sets for two-dimensional diffeomorphisms, Invent. Math., Vol. 82, (1985), pp. 379–442.

[PT1] J. Palis and F. Takens, Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits, Annals of Math., Vol. 125, (1987), pp. 337–374.

[PT2] J. Palis and F. Takens, Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: fractal dimensions and infinitely many attractors, Cambridge Univ. Press, 1992.

[PY] J. Palis and J.C. Yoccoz, Homoclinic Tangencies for Hyperbolic sets of large Hausdorff Dimension Bifurcations, Acta Mathematica, Vol. 172, (1994), pp. 91–136.

[PY1] J. Palis and J.C. Yoccoz, On the arithmetic sum of regular Cantor sets, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 14 (1997), pp. 439–456.

[S] A. Sannami, An example of a regular Cantor set whose difference set is a Cantor set with positive measure, Hokkaido Math. Journal, Vol. XXI (I), (1992), pp. 7–23.

[Su] D. Sullivan, Differentiable structures on fractal-like sets, determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets, The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987), 15–223, Proc. Sympos. Pure Math. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1988).

Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Est. D. Castorina 110, 22460-320 Rio de Janeiro, Brasil

e-mail: gugu@impa.br