O cassino de Cantor

Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau C. Saldanha e George Svetlichny

Introdução

O leitor certamente já aprendeu em seu primeiro curso de cálculo que funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ nem sempre são deriváveis. Em cursos mais avançados de análise ele talvez tenha aprendido também que funções contínuas e monótonas são sempre deriváveis em quase todo ponto (no sentido de medida de Lebesgue) mas que o conjunto dos pontos onde a função *não* é derivável pode ser relativamente grande. O exemplo mais simples é a *escada de Cantor*, que é contínua, crescente, vale 0 em 0 e 1 em 1 mas tem derivada zero em quase todo ponto. A escada de Cantor não é estritamente crescente; é possível construir uma função contínua, estritamente crescente, valendo 0 em 0 e 1 em 1 mas cuja derivada é zero sempre que estiver definida (o que ocorre em quase todo ponto). Neste caso o conjunto dos pontos onde a função *não* é derivável será denso e não enumerável apesar de ter medida zero.

A maioria das pessoas que conhece estes exemplos parece achar que estas são funções muito estranhas ou artificiais e que nunca aparecem "na prática", pelo menos em problemas naturais e elementares. Neste artigo queremos desmentir esta opinião descrevendo uma situação, que nos parece tanto natural quanto elementar, em que aparece uma tal função.

1. O problema do jogador

Um jogador precisa de uma vultosa quantia a (suponhamos que a seja R\$ 1.048.576) ao amanhecer para pagar seus credores (mafiosos que responderão com a morte a qualquer atraso no pagamento) mas ele infelizmente não dispõe desta fortuna: mesmo depois dos mais desesperados esforços, conseguiu juntar apenas, digamos, xa (e, infelizmente, $x < 1$). Sua única esperança é conseguir fazer seu dinheiro crescer apostando no novo cassino da sua cidade, o cassino de Cantor. Neste cassino, o freguês pode fazer apostas de qualquer valor e ganhando, recebe o dinheiro apostado em dobro. A probabilidade de ganhar cada aposta é p, um número que nosso jogador, apostador inveterado (como você acha que ele se endividou tanto?), conhece bem: digamos, $p = 0.3$. Qual é a probabilidade de sucesso deste pobre jogador em função de x?

Vamos supor inicialmente que ele jogue da forma mais ousada possível: quando ele tem menos de $a/2$ (R\$ 524.288), aposta tudo, e quando tem pelo menos $a/2$, aposta o suficiente para, ganhando, chegar a a imediatamente. Com esta estratégia, não é difícil ver que, começando com um número inteiro de reais, o jogador alcançará os R\$ 1.048.576 ou perderá tudo em no máximo 20 jogadas. Mais, se $f_p(x)$ for a probabilidade de ganhar começando com x temos

$$f_p(x) = \begin{cases} p\, f_p(2x), & \text{se } x \le 1/2, \\ p + (1-p)\, f_p(2x-1), & \text{se } x \ge 1/2. \end{cases}$$

Por indução no expoente do denominador, esta fórmula (junto com os casos limite $f_p(0) = 0$ e $f_p(1) = 1$) define uma função crescente nos racionais diádicos (por exemplo, $f_p(1/2) = p$, $f_p(1/4) = p^2$ e $f_p(3/4) = p + (1 - p)p$) cujo gráfico está esboçado na Figura 1. Vamos mostrar que f_p estende-se continuamente ao intervalo $[0, 1]$, que f_p (estendida) é estritamente crescente e sua derivada é igual a zero sempre que estiver definida.

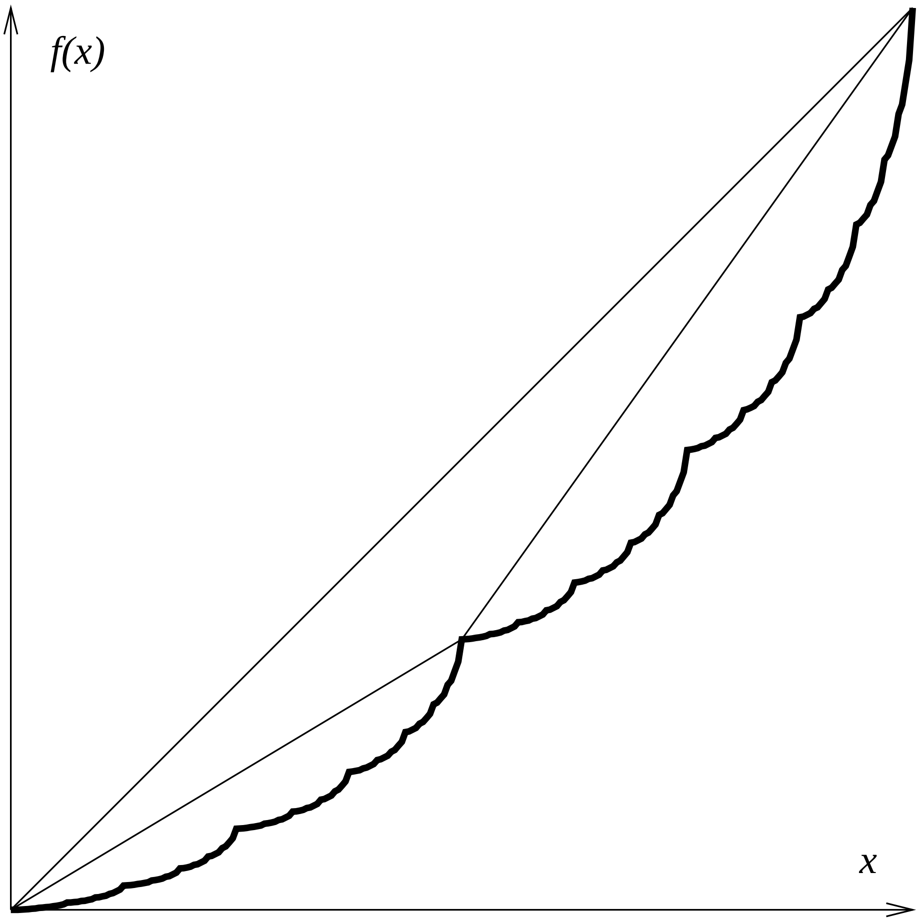

Figura 1

Melhor do que procurar uma fórmula para f_p é considerar a diferença entre dois racionais diádicos próximos:

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = \begin{cases} p\big(f_p(\frac{m+1}{2^{n-1}}) - f_p(\frac{m}{2^{n-1}})\big), & \text{se } m < 2^{n-1}, \\ (1-p)\big(f_p(\frac{m-2^{n-1}+1}{2^{n-1}}) - f_p(\frac{m-2^{n-1}}{2^{n-1}})\big), & \text{se } m \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Aplicando n vezes esta equação obtemos o valor do lado esquerdo. Para obtermos uma fórmula mais fechada, vamos definir uma função auxiliar:

Definição 1: *Seja $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por $F(0) = 0$, $F(2m) = F(m)$ e $F(2m + 1) = 1 + F(m)$.*

O simbolo $\mathbb{N}$ denota o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ dos números naturais. A definição nos dá também um método para calcular $F(n)$ para qualquer n dado: $F(1) = 1 + F(0) = 1$, $F(2) = F(1) = 1$, $F(3) = 1 + F(1) = 2$. Também é fácil ver que $F(m)$ é o número de 1's na expansão binária de m; por exemplo, $F(1996) = 7$, já que 1996 escreve-se na base 2 como 11111001100.

Juntando as fórmulas recursivas temos, por indução,

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = p^{n-F(m)}(1-p)^{F(m)}.$$

Vamos enunciar alguns lemas para organizar nossas conclusões.

Lema 2: *Seja p um número real com $0 < p \leq 1/2$. Existe uma única função contínua e estritamente crescente*

$$f_p : [0,1] \to [0,1]$$

com $f_p(0) = 0$ e $f_p(1) = 1$ satisfazendo a seguinte identidade para quaisquer naturais m e n com $m < 2^n$:

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = p^{n-F(m)}(1-p)^{F(m)}.$$

Demonstração: A identidade acima define o valor de f_p para os racionais diádicos:

$$f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = \sum_{0 \leq m' < m} p^{n-F(m)}(1-p)^{F(m)};$$

é fácil provar (por indução) que o lado direito da fórmula acima dá o mesmo valor para qualquer escolha válida de m e n (por exemplo, para $m = n = 1$ e $m = n = 2$ o lado direito tem o mesmo valor p, coerentemente com $f_p(1/2) = f_p(2/4)$). Novamente pela identidade, temos $f_p(\frac{m+1}{2^n}) - f_p(\frac{m}{2^n}) \leq (1-p)^n$, a estimativa necessária para demonstrar que existe uma forma (obviamente única) de estender f_p a uma função contínua no intervalo $[0,1]$. Finalmente, como $0 < f_p(\frac{m+1}{2^n}) - f_p(\frac{m}{2^n})$ e sempre podemos encontrar dois racionais diádicos vizinhos entre dois números reais distintos, f_p é estritamente crescente. ∎

A partir de agora usaremos a notação f_p para nos referirmos à função construida no Lema 2. Observe que $f_{1/2}(x) = x$.

A seguinte fórmula mais direta segue facilmente do lema anterior: se

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n 2^{-n}, \quad \delta_n \in \{0,1\}$$

então

$$f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n p^{n - \sum_{j<n} \delta_j} (1-p)^{\sum_{j<n} \delta_j}.$$

Lema 3: *A função f_p satisfaz a identidade abaixo para todo $x \in [0,1]$:*

$$f_p(x) = \begin{cases} p\, f_p(2x), & \text{se } x \leq 1/2, \\ p + (1-p)\, f_p(2x-1), & \text{se } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Demonstração: Demonstramos a identidade acima para racionais diádicos por indução no expoente do denominador; a identidade vale para qualquer número real pois f_p é contínua. ∎

Como já vimos, segue deste lema que f_p descreve a probabilidade de nosso jogador ser bem sucedido *se ele seguir a estratégia ousada*. Veremos na Seção 2 que esta é uma estratégia ótima, ou seja, que se o jogador seguir qualquer outra estratégia sua probabilidade de ganhar ainda é no máximo $f_p(x)$. Na Seção 3 mostraremos que $f_p'(x) = 0$ sempre que esta derivada estiver definida, o que ocorre para quase todo $x \in [0,1]$ (no sentido de medida de Lebesgue). Estas duas seções podem ser lidas independentemente.

2. Outras estratégias

Antes de atacarmos nosso problema vamos demonstrar alguns resultados auxiliares sobre as funções F e f.

Lema 4: *Para quaisquer naturais m_1 e m_2, $F(m_1) + F(m_2) \geq F(m_1 + m_2)$.*

Demonstração: Isto é claro pelo algoritmo usual da adição se interpretarmos $F(m)$ como o número de 1's na expansão base 2 de m. Deixamos uma demostração por indução a partir da definição a cargo do leitor. ∎

Lema 5: *Seja $\lambda > 1$ um numero real e sejam m e l números naturais. Temos*

$$\sum_{m \leq i < m+l} \lambda^{1+F(i)} \geq \sum_{m+l \leq i < m+2l} \lambda^{F(i)}.$$

Demonstração: A demonstração é por indução em l. Seja 2^k a menor potência de 2 maior ou igual a l; escrevemos

$$\sum_{m \leq i < m+l} \lambda^{1+F(i)} = \sum_{m \leq i < m+2l-2^k} \lambda^{1+F(i)} + \sum_{m+2l-2^k \leq i < m+l} \lambda^{1+F(i)},$$

$$\sum_{m+l \leq i < m+2l} \lambda^{F(i)} = \sum_{m+l \leq i < m+2^k} \lambda^{F(i)} + \sum_{m+2^k \leq i < m+2l} \lambda^{F(i)}.$$

Do lema 4 temos $1 + F(m) \geq F(m + 2^k)$ donde

$$\sum_{m \leq i < m+2l-2^k} \lambda^{1+F(i)} \geq \sum_{m+2^k \leq i < m+2l} \lambda^{F(i)}.$$

Por hipótese de indução (isto é, pelo próprio lema 5 onde l é nosso $2^k - l$),

$$\sum_{m+2l-2^k \le i < m+l} \lambda^{1+F(i)} \ge \sum_{m+l \le i < m+2^k} \lambda^{F(i)}.$$

Somando estas duas desigualdades temos a conclusão desejada. ∎

Lema 6: *Para quaisquer x e y satisfazendo $0 \le x - y \le x \le x + y \le 1$, temos $f_p(x) \ge pf_p(x+y) + (1-p)f_p(x-y)$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que x e y sejam racionais diádicos e escrevamos

$$x = \frac{m+l}{2^n}, \qquad y = \frac{l}{2^n}, \qquad \lambda = (1-p)/p.$$

Pelo lema 5 temos

$$\sum_{m \le i < m+l} \lambda^{1+F(i)} \ge \sum_{m+l \le i < m+2l} \lambda^{F(i)},$$

o que é claramente equivalente a

$$(1-p) \sum_{m \le i < m+l} p^{n-F(i)}(1-p)^{F(i)} \ge p \sum_{m+l \le i < m+2l} p^{n-F(i)}(1-p)^{F(i)}.$$

Pela definição de f_p no lema 2 temos

$$(1-p) \sum_{m \le i < m+l} \left(f_p\big(\frac{i+1}{2^n}\big) - f_p\big(\frac{i}{2^n}\big) \right) \ge p \sum_{m+l \le i < m+2l} \left(f_p\big(\frac{i+1}{2^n}\big) - f_p\big(\frac{i}{2^n}\big) \right),$$

mas como

$$f_p(x) - f_p(x-y) = \sum_{m \le i < m+l} \left(f_p\big(\frac{i+1}{2^n}\big) - f_p\big(\frac{i}{2^n}\big) \right)$$
$$f_p(x+y) - f_p(x) = \sum_{m+l \le i < m+2l} \left(f_p\big(\frac{i+1}{2^n}\big) - f_p\big(\frac{i}{2^n}\big) \right)$$

temos o resultado desejado.

O caso geral segue da continuidade de f_p. ∎

Agora estamos prontos para voltar ao problema original. Para simplificar a notação faremos $a = 1$.

Proposição 7: *Se a fortuna inicial do jogador é x_0, sua probabilidade de sucesso é no máximo $f_p(x_0)$ para qualquer estratégia que ele adote.*

Demonstração: Seja X a variável aleatória representando a fortuna do jogador em um certo momento e seja X_1 a variável aleatória correspondente a sua fortuna após mais uma jogada. Afirmamos que $E(f_p(X_1)) \le E(f_p(X))$ (onde $E(Y)$ representa a esperança da variável aleatória Y). De fato, sejam x um valor possível de X e y uma aposta correspondente; ao par (x, y) corresponde uma certa probabilidade q. Os valores correspondentes de X_1 são $x+y$ e $x-y$ com probabilidades de, respectivamente, pq e $(1-p)q$. As contribuições para $E(f_p(X))$ e $E(f_p(X_1))$ correspondentes a este caso são portanto, respectivamente, $qf_p(x)$ e $q(pf_p(x+y)+(1-p)f_p(x-y))$. Mas pelo lema 6 temos $qf_p(x) \geq q(pf_p(x+y)+(1-p)f_p(x-y))$ e, somando (ou integrando) todos os casos temos $E(f_p(X)) \geq E(f_p(X_1))$.

Acabamos de ver que $E(f_p(X))$ nunca cresce com o tempo, qualquer que seja a estratégia adotada. O valor de $E(f_p(X))$ quando o jogador entra no cassino é $f_p(x_0)$. Assim, em nenhum momento a probabilidade de sua fortuna chegar a 1 pode exceder $f_p(x_0)$, conforme queríamos demonstrar. ∎

3. A derivada de f_p

Conforme prometido, nosso principal resultado é:

Proposição 9: *Se $x_0 \in (0,1)$ um ponto onde f_p é derivável, então $f'_p(x_0)=0$.*

Demonstração: Sejam $d = f'_p(x_0)$ e m_n uma seqüência de inteiros com $m_0 = 0$ e $m_{n+1} = 2m_n$ ou $m_{n+1} = 2m_n + 1$ tal que $\frac{m_n}{2^n} \leq x_0 \leq \frac{m_n+1}{2^n}$. Temos

$$\begin{aligned} d &= \lim_n \frac{f_p\left(\frac{m_n+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m_n}{2^n}\right)}{\frac{m_n+1}{2^n} - \frac{m_n}{2^n}} \\ &= \lim_n 2^n \left(f_p\left(\frac{m_n+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m_n}{2^n}\right) \right). \end{aligned}$$

Se definirmos

$$c_n = \begin{cases} 2p, & \text{se } m_{n+1} = 2m_n, \\ 2(1-p), & \text{se } m_{n+1} = 2m_n+1, \end{cases}$$

temos

$$2^n \left(f_p\left(\frac{m_n+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m_n}{2^n}\right) \right) = \prod_{0 \leq k < n} c_k$$

donde

$$d = \prod_{0 \leq k} c_k.$$

Mas como c_k alterna entre dois valores, ambos diferentes de 1, este produto infinito não pode convergir a não ser tendendo para 0, e temos portanto $d = 0$. ∎

Como já dissemos, é um teorema clássico que toda função crescente é derivável em quase todo ponto; em particular, $f'_p(x) = 0$ para quase todo x. Para tornar este artigo mais auto-contido, entretanto, vamos dar uma demonstração direta deste fato.

Proposição 10: *Existe um conjunto mensurável $A \subseteq [0,1]$ de medida 1 com $f'_p(x) = 0$ para todo $x \in A$.*

Nossa demonstração baseia-se no seguinte lema, que enunciaremos sem prova.

Lema 11: *Existe um conjunto mensurável $A' \subseteq [0,1]$ de medida 1 tal que todo elemento x de A' tem a seguinte propriedade: para todo $h > 0$ existem inteiros m_h e n_h tais que*

$$\frac{m_h}{2^{n_h}} \leq x - h < x + h \leq \frac{m_h + 1}{2^{n_h}}$$

com

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(m_h)}{n_h} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{h \searrow 0} \frac{n_h}{\log_2 h} = -1.$$

Informalmente, o primeiro limite garante que o número de 0's e 1's na expansão binária de x é aproximadamente igual enquanto o segundo limite diz que as expansões binárias de $x - h$ e $x + h$ coincidem em um número de casas da ordem de $\log_2 h$, ou seja, que x não admite aproximações surpreendentemente boas por racionais diádicos.

Demonstração da Proposição 10: Demonstraremos que se $x \in A'$ (como no Lema 11) então $f_p'(x) = 0$.

Com a notação do Lema 11 temos, para $h > 0$,

$$f_p(x+h) - f_p(x-h) \leq f_p\left(\frac{m_h + 1}{2^{n_h}}\right) - f_p\left(\frac{m_h}{2^{n_h}}\right) = p^{n_h - F(m_h)}(1-p)^{F(m_h)}.$$

Dividindo por esta desigualdade por h e tirando logaritmos, temos

$$\log_2\left(\frac{f_p(x+h) - f_p(x-h)}{h}\right) \leq (n_h - F(m_h)) \log_2 p + F(m_h) \log_2 (1-p) - \log_2 h.$$

Calculando o limite superior dos dois lados e usando o Lema 11 temos

$$\limsup_{h \searrow 0} \log_2\left(\frac{f_p(x+h) - f_p(x-h)}{h}\right) \leq \limsup_{h \searrow 0} n_h \left(\frac{1}{2}\log_2 p + \frac{1}{2}\log_2 (1-p) + 1\right).$$

Mas $\frac{1}{2}\log_2 p + \frac{1}{2}\log_2 (1-p) + 1 < 0$ donde

$$\limsup_{h \searrow 0} \log_2\left(\frac{f_p(x+h) - f_p(x-h)}{h}\right) = -\infty$$

ou

$$\limsup_{h \searrow 0} \frac{f_p(x+h) - f_p(x-h)}{h} = 0;$$

como f_p é crescente, isto mostra que $f_p'(x) = 0$.

■

Nicolau C. Saldanha e George Svetlichny
Departamento de Matemática, PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente 225
Gávea, Rio de Janeiro
RJ 22453-900, Brasil

Carlos Gustavo T. de A. Moreira
IMPA, Estr. D. Castorina 110
Jardim Botânico, Rio de Janeiro
RJ 22460-320, Brasil

gugu@impa.br
nicolau@mat.puc-rio.br, http://www.mat.puc-rio.br/∼nicolau/
svetlich@mat.puc-rio.br