Amigo oculto

Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira

Problema

Seja uma brincadeira de "amigo oculto", na qual n pessoas escrevem seu nome num pedaço de papel e o depositam num recipiente, de onde cada um pega aleatoriamente um dos pedaços de papel. Qual a probabilidade de ninguém pegar seu próprio nome?

Solução:

Numeremos as pessoas $1, 2, \ldots, n$. Um sorteio de nomes nada mais é do que uma função $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijetora, que associa a cada pessoa o seu amigo oculto.

Dizemos que x é um ponto fixo para uma função $f\colon A \to A$ se e só se $f(x) = x$. Um sorteio no qual ninguém pega o seu próprio nome é, simplesmente, uma $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijetora e desprovida de pontos fixos.

Seja X_n^k o número de bijeções de um conjunto de n elementos em si mesmo, com k pontos fixos.

A probabilidade pedida é $\dfrac{X_n^0}{n!}$

Para calcular X_n^0 apresentamos 3 soluções (o leitor pode tentar achar mais):

Solução 1

Temos $X_n^k = C_n^k \cdot X_{n-k}^0$ (número de escolhas dos k pontos fixos e permutação dos $n-k$ restantes sem ponto fixo).

Temos, naturalmente

$$\sum_{k=0}^{n} X_n^k = n! \quad \text{(Temos } n! \text{ bijeções)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k X_{n-k}^0 = n! \Rightarrow X_n^0 = n! - \sum_{k=1}^{n} C_n^k X_{n-k}^0$$

onde $X_0^0 = 1$, pois $X_n^n = C_n^n X_0^0$. Como $X_n^n = C_n^n = 1$, $X_0^0 = 1$. Assim, determina-se X_n^0 por recorrência.

Solução 2

Seja $f(1) = k$. Teremos $(n-1)$ possibilidades para k.

Seja $f(k) = 1$, há X_{n-2}^0 formas de permutar os $n-2$ elementos restantes sem ponto fixos.

k ———————— Se $f(k) \neq 1$, temos X_{n-1}^0 formas de arrumar os elementos $\{1, ..., k-1, k+1, ..., n\}$ nas casas $2, 3, ..., n$. Assim, podemos concluir que

k-ésima casa

$$X_n^0 = (n-1)(X_{n-1}^0 + X_{n-2}^0), \text{ com } X_0^0 = 1 \text{ e } X_1^0 = 0$$

Solução 3

Usaremos aqui como lema um resultado devido ao matemático português Daniel Augusto da Silva (nascido em 16-5-1814 e falecido em 6-10-1878), resultado esse que é conhecido como *Teorema de da Silva, Princípio da inclusão e exclusão* ou *Fórmula do crivo*.

Lema: $card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card\, A_i - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} card\,(A_i \cap A_j) +$

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k\neq i}}^{n} card\,(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots (-1)^{n+1} card\,(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Demonstração:

Seja a um elemento que pertença a k e só a k conjuntos. a é contado C_k^1 vezes na soma dos cardinais dos conjuntos, C_k^2 vezes na soma dos cardinais das intersecções tomadas 2 a 2, ..., C_k^k vezes na soma dos cardinais das intersecções tomadas k a k. Assim a é contado

$$C_k^1 - C_k^2 + \dots + (-1)^{k+1} C_k^k = C_k^0 - (C_k^0 - C_k^1 + \dots + (-1)^k C_k^k) =$$
$$C_k^0 - 0 = C_k^0 = 1 \text{ vez}$$

Seja A_k o conjunto das bijeções de A em A com $f(k) = k$.

Assim, vemos que o conjunto das bijeções com ponto fixo é $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

Calculando seu cardinal pelo lema, usando o fato de que existem C_n^k interseções k a k, e o cardinal de cada uma é $(n-k)!$ (pois fixam-se k pontos, permutando os $n-k$ restantes), temos que

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k=1 \\ j \neq j' \Rightarrow A_{i_j} \neq A_{i_{j'}}}} card \bigcap_{j=1} A_{i_j} = C_n^k (n-k)! = A_{n,n-k}$$

Assim, temos $card\ (\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{n,n-i}$. Como

$X_n^0 = n! - card\ (\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)$, temos $X_n^0 = n! - \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{n,n-i}$

e como $n! = A_{n,n}$, temos $X_n^0 = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i A_{n,n-i}$, ou seja,

$$X_n^0 = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

Conclusão:

A probabilidade pedida é $\dfrac{X_n^0}{n!} = \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

É interessante observar que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{X_n^0}{n!} = e^{-1} \cong 0{,}37$

(pois $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$).

NR: Carlos Gustavo nos enviou, posteriormente, uma carta, dizendo "... podemos notar que obtivemos três resultados de formas diferentes. Parece interessante unificar algebricamente esses resultados, para que o leitor se convença que são, de fato, iguais". E acrescentou a demonstração da igualdade das 3 soluções que a RPM deixa de publicar por falta de espaço.