Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

# CENTRALIZADORES DE DIFEOMORFISMOS DO CÍRCULO

Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira

Dissertação apresentada para obtenção do grau
de Mestre em Matemática

Rio de Janeiro
1990

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA

ORIENTADOR: JACOB PALIS JUNIOR

COMISSÃO EXAMINADORA

Elon Lages Lima

ELON LAGES LIMA

SERGIO EUGENIO PLAZA SALINAS

Jacob Palis

JACOB PALIS JUNIOR

AUTOR: Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira

CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAUJO MOREIRA

Dedico esta dissertação ao mestre e amigo Elon Lages Lima,
a quem cabe grande parte da culpa por eu ter chegado até aqui.

# AGRADECIMENTOS

Deixo aqui meus agradecimentos às pessoas que de uma forma ou de outra contribuiram para que este trabalho fosse possível. Provavelmente cometerei algumas omissões graves. Peço desculpas aos que aqui forem injusta e involuntariamente omitidos.

Agradeço:

– A todos os professores e pesquisadores do IMPA que, seja em cursos, seja em conversas, me ajudaram a aprender a pouca matemática que eu sei. Em particular, agradeço ao Jacob, que me orientou nesse trabalho, e é, portanto, um dos principais responsáveis por ele (pelo que há de bom nele. Pelos erros o responsável sou eu).

– Aos meus colegas nos cursos aqui do IMPA, que os tornaram bem mais divertidos, em particular, ao Eduardo, o Alfredo, ao Orizon, ao Gilvan, ao Manuel, ao "Tigre", à Lucy, ao Ion, ao Dina e ao grande Barnabé.

– Aos funcionários do IMPA, em particular à D. Maria da sala de chá, à Maria da Diretoria, aos camaradas da biblioteca, Eunice, Carolina e Sérgio e ao Rogerio, que foi condenado a bater esta dissertação.

– À minha família, que sempre me incentivou a aprender matemática, embora com alguma surpresa pelo fato de que alguém possa se divertir com isso.

# INTRODUÇÃO

Esta dissertação se refere ao estudo de difeomorfismos de $S^1$ em $S^1$, e de seus centralizadores. Por centralizador de um difeomofismo $f: S^1 \to S^1$ entende-se o conjunto dos difeomorfismos $g: S^1 \to S^1$ tais que $f \circ g = g \circ f$.

Seja $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f} \to n$ vezes, para $n \in \mathbf{Z}_+^*$, $f^0 = id$ e $f^{-n} = (f^n)^{-1}$ para $n \in \mathbf{Z}_+^*$. Isso define $f^k$ para todo $k \in \mathbf{Z}$. É evidente que $f \circ f^k = f^k \circ f$, $\forall k \in \mathbf{Z}$. Assim, se denotarmos por $Z(f)$ o centralizador de $f$, teremos $\{f^k, k \in \mathbf{Z}\} \subset Z(f)$.

O resultado fundamental desta dissertação é o seguinte: Seja Dif $(S^1)$ o conjunto dos difeomorfismos $f: S^1 \to S^1$, dado com a topologia $C^s$, para um certo $s \geq 2$. O conjunto $\overline{B} = \{f \in \text{Dif } (S^1): Z(f) = \{f^k, k \in \mathbf{Z}\}\}$ contém um aberto e denso em Dif $(S^1)$. Se $f \in \overline{B}$, dizemos que seu centralizador é trivial.

Este trabalho é baseado num artigo de Nancy Kopell (ver bibliografia), que contém a prova deste resultado para Dif $^+(S^1)$ (o conjunto dos $f \in$ Dif $(S^1)$ que preservam orientação). No presente trabalho estendemos o resultado para Dif $(S^1)$. Provamos também alguns resultados utilizados no artigo de Kopell mas não explicitamente demonstrados aí.

A presente dissertação foi dividida em 4 seções. A Seção I estabelece alguns resultados sobre difeomorfismos locais, como linearização e mergulho em fluxo. Na Seção II estudamos os centralizadores de difeomorfismos de [0,1] em [0,1]. A Seção III estuda difeomorfismos de $\text{Dif}^+(S^1)$ enquanto a Seção IV estende os resultados da Seção III para $\text{Dif}^-(S^1)$, o conjunto dos $f \in \text{Dif}\ (S^1)$ que invertem orientação, concluindo a prova do teorema. No início de cada seção encontra-se uma breve descrição dos resultados principais aí estabelecidos.

Vamos agora fazer alguns comentários sobre uma generalização dos resultados aqui demonstrados, feita por J. Palis e J.C. Yoccoz (ver bibliografia).

Seja $V$ uma variedade compacta e $\text{Dif}\ (V)$ o conjunto dos difeomorfismos $f\colon V \to V$. Dada $f \in \text{Dif}\ (V)$, dizemos que $p \in V$ é ponto periódico de $f$ se $\exists n \in \mathbb{N}^*$ com $f^n(p) = p$. Denotamos por Per $(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de $f$. Dizemos que $p \in \text{Per}\ (f)$ é ponto periódico hiperbólico se $D(f^n)_{(p)}$ não possui nenhum autovalor de módulo 1, onde $n \in \mathbb{N}^*$ é tal que $f^n(p) = p$.

Se $p$ é ponto periódico hiperbólico, para cada $p \in \text{Per}\ (f)$, $T_p(V) = E(p) \oplus I(p)$, onde $n$ é o menor inteiro positivo com $f^n(p) = p$, $E(p)$ e $I(p)$ são subespaços de $T_p(V)$ invariantes por $D(f^n)_{(p)}$ tais que $\left|D(f^n)_{(p)} \cdot x\right| < |x|$ para todo $x \neq 0$ em $E(p)$ e $\left|D(f^n)_{(p)} \cdot x\right| > |x|$, $\forall x \neq 0$ em $I(p)$; $E(p)$ é o subespaço estável por $(Df^n)(p)$ e $I(p)$ o subespaço instável por $(Df^n)_{(p)}$.

Pode-se provar que dado $p \in \text{Per}\ (f)$ hiperbólico existem subvariedades $V_{E(p)}$ e $V_{I(p)}$ da variedade $V$ contendo $\{p\}$, invariantes por $f^n$, tais que $T_p V_{E(p)} = E(p)$ e $T_p V_{I(p)} = I(p)$. Dizemos que $V_{E(p)}$ é a subvariedade estável associada a $p$ e que $V_{I(p)}$ é a subvariedade instável associada a $p$.

Dizemos que $f \in \text{Dif}\ (V)$ é um difeomorfismo Morse-Smale se:

i) Per $(f)$ é finito, não vazio e só contém pontos periódicos hiperbólicos.

ii) Todo $p \in V$ pertence a uma (e só uma) subvariedade estável $V_{E(p_1)}$ associada a algum $p_1 \in$ Per $(f)$ e a uma (e só uma) subvariedade instável $V_{I(p_2)}$ associada a algum $p_2 \in$ Per $(f)$, tais que $V_{E(p_1)}$ e $V_{I(p_2)}$ se intersectam transversalmente em $p(T_pV_{E(p_1)} + T_pV_{I(p_2)} = T_pV)$.

Seja $MS(V)$ o conjunto dos difeomorfismos Morse-Smale de $V$. Pode-se provar que $MS(V)$ é aberto em $V$.

O resultado de Palis e Yoccoz é que o conjunto $\{f \in MS(V) : Z(f) = \{f^k, k \in \mathbf{Z}\}\}$ é aberto e denso em $MS(V)$. Esse resultado generaliza o dessa dissertação, pois $MS(S^1)$ é aberto e denso em Dif $(S^1)$, o que é provado no Lema 7 do presente trabalho.

# § SEÇÃO I: DIFEOMORFISMOS LOCAIS

O objeto principal desta seção é estudar os difeomorfismos locais (veja definição 2). Seu resultado mais importante, e básico para as outras seções é o Lema 1, no qual se prova a linearização local de difeomorfismos, que implica o mergulho em fluxo desses difeomorfismos.

**Definição 1:** Um difeomorfismo de uma superfície $M$ (no nosso caso o intervalo [0,1] ou o círculo unitário $S^1$) é uma bijeção $f: M \to M$ de classe $C^\infty$ com inversa $C^\infty$.

**Definição 2:** Um difeomorfismo local $f$ é um difeomorfismo de uma vizinhança de um ponto $x \in M$ sobre uma vizinhança de $f(x)$.

Um difeomorfismo local em $x$ é um difeomorfismo local $f$ com $f(x) = x$.

**Definição 3:** Suponha que $f$ seja um homeomorfismo do intervalo $[x, y]$ com $f(x) = x$ e $g(y) = y$. Dizemos que $f$ é uma contração topológica se $f(t) < t$, $\forall t \in (x, y)$.

**Proposição 1.** *$f$ é contração topológica* $\iff \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n([x, a]) = \{x\}$, $\forall a \in [x, y)$

**Demonstração:** $(\Longrightarrow)$ Basta provar que $\forall a \in [x, y)$, $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(a) = x$. De fato, $(f^n(a))_{n \in \mathrm{N}}$ é uma seqüência não-crescente, limitada inferiormente por

$x$, logo converge para um certo $L_a$ com $x \leq L_a \leq a < y$. Por continuidade de $f, f(L_a) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(a)\right) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(a)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(a) = L_a \Longrightarrow$ $L_A$ é ponto fixo de $f$ no intervalo $[x, y) \Longrightarrow L_a = x$, c.q.d.

($\Longleftarrow$) Caso existisse algum $a \in (x, y)$ com $f(a) \geq a$, teríamos por indução, $f^n(a) \geq a$, $\forall n \in \mathbf{N}$. De fato, se vale para $n$, $f^n(a) \geq a$, como $f$ é não-decrescente, $f^{n+1}(a) = f(f^n(a)) \geq f(a) \geq (a)$.

Assim, $f^n([x, y)) \supset f^n([x, a]) \supset [x, a]$, donde $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n([x, a]) \supset [x, a]$, contradição, c.q.d.

**Proposição 2.** *Se $f: [x, y] \to [x, y]$ e $h: [x, y] \to [x, y]$ são contrações topológicas, e $\psi: [x, y] \to [x, y]$ é uma função tal que $\psi \circ f = h \circ \psi$, se $\psi$ é dada num intervalo do tipo $[f(x_0), x_0)$, pode-se determinar seu valor em todo o intervalo $(x, y)$. Em particular, se $\psi$ é conhecida numa vizinhança de $x$ ou de $y, \psi$ é conhecida em todo o intervalo $(x, y)$.*

Além disso, se $\lim_{t\to x_0} h \circ \psi(t) = \psi(f(x_0))$, $\psi$ é contínua em $(x, y)$. Se $\psi$ ainda for crescente em $[f(x_0), x_0), \psi$ será um homeomorfismo em $[x, y]$.

Se $\psi$ restrita a um intervalo do tipo $(f(x_0) - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ for um difeomorfismo, $\psi$ restrita ao intervalo $(x, y)$ será um difeomorfismo.

**Demonstração:** De $\psi \circ f = h \circ \psi$ segue que $\psi \circ f^n = h^n \circ \psi$, $\forall n \in \mathbf{Z}$. Dado qualquer $t \in (x, y)$, $\exists m \in \mathbf{Z}$ de modo que $f^m(t) \in [f(x_0), x_0)$. Para ver isso, podemos supor sem perda de generalidade que $t > x_0$. Seja $m$ o primeiro natural tal que $f^m(t) < x_0$. Temos $f^{m-1}(t) \geq x_0 \Longrightarrow f^m(t) = f(f^{m-1}(t)) \geq f(x_0) \Longrightarrow f^m(t) \in [f(x_0), x_0)$.

De $\psi \circ f^n = h^n \circ \psi$, segue-se que $\psi(f^{-m}(f^m(t)) = h^{-m}(\psi(f^m(t))$, mas como $f^m(t) \in [f(x_0), x_0)$, o valor de $\psi(f^m(t))$ é conhecido $\Longrightarrow$ o valor de $\psi(t) = \psi(f^m(f^{-m}(t))$ também é.

Se $\lim_{t \to x_0} h(\psi(t)) = \psi \circ f(x_0)$, $\psi$ é contínua em $x_0$. Como os intervalos da forma $f^k([f(x_0), x_0]) = [f^{k+1}(x_0), f^k(x_0)]$, $k \in \mathbf{Z}$ cobrem o intervalo $(x, y), \psi$ é contínua em $(x, y)$. Como $f$ e $h$ são crescentes, se $\psi|_{[f(x_0), x_0)}$ é crescente, $\psi = h^n \circ \psi \circ f^{-n}$ é crescente em cada intervalo $[f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)]$, como $\lim_{t \to x} \psi(t) = \lim_{n \to \infty} \psi(f^n(a)) = \lim_{n \to \infty} h^n(\psi(a)) = x$, $\forall a \in [f(x_0), x_0)$, e $\lim_{t \to y} \psi(t) = \lim_{n \to -\infty} \psi(f^n(a)) = \lim_{n \to -\infty} h^n(\psi(a)) = y$, $\forall a \in [f(x_0), x_0)$, segue que se definirmos $\psi(x) = x$ e $\psi(y) = y$, $\psi$ será um homeomorfismo do intervalo $[x, y]$.

Por fim, se $\psi|_{[f(x_0) - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)}$ é difeomorfismo, sendo $f$ e $h$ difeomorfismos, teremos, como $\psi = h^n \circ \psi \circ f^{-n}$, se $t \in [f^{n+1}(x_0), f^n(x_0))$, $\psi(t) = h^n \circ \psi \circ f^{-n}(t)$, donde $\psi$ restrito a $[f^{n+1}(t), f^n(t))$ é composta de funções diferenciáveis, donde é diferenciável. Se $t = f^{n+1}(x_0)$, $t \in (f^n(f(x_0) - \varepsilon), f^n(x_0))$, e como $\psi((f(x_0) - \varepsilon, x_0)$ é diferenciável, $\psi$ é diferenciável em $t$. Como $\psi|_{[x,y]}$ é homeomorfismo, $\psi|_{(x,y)}$ é difeomorfismo, c.q.d.

**Lema 1.** *Dado um difeomorfismo local $f$ em $0 \in \mathbf{R}$, com $f'(0) = \lambda$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, existe um difeomorfismo local $\alpha$ em 0 tal que $L = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ seja linear.*

**Obs 1:** Necessariamente $L(x) = \lambda x$, pois $L'(0) = (\alpha^{-1})'(f \circ \alpha(0)) \cdot f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = (\alpha^{-1})'(0) \cdot \lambda \cdot \alpha'(0) = \lambda$.

**Obs 2:** Basta provar para o caso $0 < \lambda < 1$. Caso $\lambda > 1$, o difeomorfismo local $f^{-1}$ em 0 satisfaz $(f^{-1})'(0) = 1/\lambda < 1$, que é a condição do lema. Assim, $\exists \alpha$ difeomorfismo local em 0 com $\alpha^{-1} \circ f^{-1} \circ \alpha = L$, linear $\Longrightarrow$ $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha = (\alpha^{-1} \circ f^{-1} \circ \alpha)^{-1} = L^{-1}$, linear, c.q.d.

**Obs 3:** Podemos fazer com que $\alpha'(0)$ seja qualquer valor prefixado. Faremos $\alpha'(0) = 1$.

**Definição 4:** Se $f: M \to N$ e $g: M \to N$ são duas funções de classe $C^s$, definimos $r_j(f,g) = \sup_{x \in M} \left\| f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x) \right\|$, e $d_s(f,g) = \sum_{j=0}^{s} \frac{r_j(f,g)}{2^j(1 + r_j(f,g))}$, definição que vale para $0 \leq s \leq \infty$.

**Obs 4:** Dados $f$ e $g$ na topologia $C^2$, difeomorfismos locais em $0 \in \mathbf{R}$, e sendo $\alpha_f$ e $\alpha_g$ os difeomorfismos locais em 0 com $\alpha_f^{-1} \circ f \circ \alpha_f$ e $\alpha_g^{-1} \circ g \circ \alpha_g$ lineares e $\alpha_f'(0) = \alpha_g'(0) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d_2(f,g) < \delta \Longrightarrow$ $d_1(\alpha_f, \alpha_g) < \varepsilon$.

**Demonstração:** Suponhamos inicialmente que exista um tal $\alpha$. Teremos portanto $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha = L$, donde $\alpha^{-1} \circ f^n \circ \alpha = L^n \Longrightarrow f^n \circ \alpha = \alpha \circ L^n \Longrightarrow$ $f^n(\alpha(x)) = \alpha(\lambda^n x)$. Derivando, obteremos: $(f^n)'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = \alpha'(\lambda^n x) \cdot \lambda^n$, ou $\prod_{j=0}^{n-1} f'(f^j(\alpha(x))) \cdot \alpha'(x) = \alpha'(\lambda^n x) \cdot \lambda^n$, ou ainda: $\alpha'(x) = \alpha'(\lambda^n x) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda}{f'(f^j(\alpha(x)))}$. Quando $n \to \infty$, $\lambda^n x \to 0$, donde $\alpha'(\lambda^n x) \to \alpha'(0) = 1$. Vamos provar que $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j(y))}$ converge uniformemente uma vizinhança de 0 para uma função diferenciável $g(y)$, com $g(0) = 1$, sendo $g$ de classe $C^\infty$. Nesse caso, $\alpha$ satisfaria a equação diferencial $\alpha'(x) = g(\alpha(x)); \alpha(0) = 0$.

Seja $\alpha$ a solução dessa equação. Como $g \in C^\infty$, $\alpha \in C^\infty$, e está definida numa vizinhança de 0. Derivando a expressão $L(x) = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha(x)$, obteremos:

$$L'(x) = (\alpha^{-1})'(f \circ \alpha(x)) \cdot f'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = \frac{f' \circ \alpha(x) \cdot \alpha'(x)}{\alpha'(\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha(x))}$$

$$= \frac{f'(\alpha(x)) \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j((\alpha(x)))}}{\prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j(\alpha(\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha(x)))}}.$$

Como $\alpha(\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha(x)) = f \circ \alpha(x)$, $f'(f^j \circ \alpha(\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha(x))) = f'(f^j(f \circ \alpha(x))) = f'(f^{j+1} \circ \alpha(x)) \Longrightarrow \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j(\alpha(\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha(x)))} = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^{j+1}(\alpha(x)))} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j(\alpha(x)))} \Longrightarrow L'(x) = f'(\alpha(x)) \cdot \frac{\lambda}{f'(\alpha(x))} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j(x))}}{\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j(x))}} = \lambda$. Como $L(0) = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha(0) = 0$, segue que $L(x) = \lambda x$, c.q.d.

Resta portanto provar que $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{f'(f^j(y))}$ converge uniformemente numa vizinhança de 0 para uma função $g$ de classe $C^\infty$ com $g(0) = 1$. Vamos provar também que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $d_2(f_1, f_2) < \delta \Longrightarrow d_0(g_1, g_2) < \varepsilon$, onde $g_i(y) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{f_i'(f_i^j(y))}$, para $i = 1, 2$.

Para isso, basta provar esses resultados para $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{f'(f^j(y))}{\lambda}$. Provaremos primeiro a convergência uniforme. Se provarmos que $\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{f'(f^j(y))}{\lambda} - 1 \right|$ converge uniformemente, como $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\ln(z+1)}{z} = 1$, teremos que $\sum_{j=0}^{\infty} \left| \ln \left( \frac{f'(f^j(y))}{\lambda} \right) \right|$ converge uniformemente, donde $\sum_{j=0}^{\infty} \ln \left( \frac{f'(f^j(y))}{\lambda} \right)$ converge uniformemente, ou seja, $\ln \left( \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f'(f^j(y))}{\lambda} \right)$ converge uniformemente $\Longrightarrow \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f'(f^j(y))}{\lambda}$ converge uniformemente.

Pelo teorema do valor médio, $f'(f^j(y)) = \lambda + f''(c).f^j(y)$, onde $c \in (0, f^j(y))$. Podemos escolher uma vizinhança $V$ de 0 tal que $\exists \gamma, \mu$, $0 < \gamma < \mu < 1$ tais que $\gamma < f'(z) < \mu$, $\forall z \in V$.

Nesse caso teremos $\left|f^j(z)\right| \leq \mu^j |z|$, $\forall j \in \mathbb{N}$. De fato, vale para $j = 0$, e $\left|f^{j+1}(z)\right| = \left|f(f^j(z))\right| = \left|f'(c).f^j(z)\right|$, para algum $c \in (0, f^j(z))$, mas $|f'(c)| < \mu \Rightarrow \left|f^{j+1}(z)\right| \leq \mu \left|f^j(z)\right|$, mas $\left|f^j(z)\right| \leq \mu^j |z| \Rightarrow \left|f^{j+1}(z)\right| \leq \mu.\mu^j |z| = \mu^{j+1} |z|$, c.q.d.

Como $\left|f'(f^j(z)) - \lambda\right| = \left|f''(s).f^j(y)\right|$, onde $s \in (0, f^j(z))$, sendo $M = \sup\limits_{z \in V} |f''(z)|$, teremos $\left|f'(f^j(z)) - \lambda\right| \leq M.\mu^j.|z|$. Se $R = \sup\limits_{z \in V} |z|$ e $A = MR$, $\left|f'(f^j(z)) - \lambda\right| \leq A\mu^j$. Sendo $B = A/\lambda$, teremos $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left|\frac{f'(f^j(y))}{\lambda} - 1\right|$ majorado por $\sum\limits_{j=0}^{\infty} B\mu^j$, que converge. Assim, pelo teste $M$ de Weierstrass, a convergência é uniforme. Como $f^j(0) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\prod\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f'(f^j(0))}{\lambda} = \prod\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f'(0)}{\lambda} = \prod\limits_{j=0}^{\infty} 1 = 1$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\gamma < g'(z) < \mu$ para todo $g$ tal que $d_2(f, g) < \delta$, além de podermos fazer com que o novo $Bg$ para a função $g$ seja menor ou igual a $2B$. Podemos escolher $N$ suficientemente grande tal que $\sum\limits_{j>N} 2B\mu^j$ seja pequeno, donde $\prod\limits_{j>N} f'(f^j(y))/f'(0)$ e $\prod\limits_{j>N} g'(g^j(y))/g'(0)$ são próximos de 1 e $\delta_1$ suficientemente pequeno, menor que $\delta$ tal que

$$do\left(\prod_{j=0}^{N}\frac{f'(f^j(y))}{f'(0)},\prod_{j=0}^{N}\frac{g'(g^j(y))}{g'(0)}\right)$$

seja também pequeno, donde como

$$do\left(\prod_{j=0}^{\infty}\frac{f'(f^j(y))}{f'(0)},\prod_{j=0}^{\infty}\frac{g'(g^j(y))}{g'(0)}\right)$$

$$= do\left(\prod_{j=0}^{N}\frac{f'(f^j(y))}{f'(0)}\cdot\prod_{j>N}\frac{f'(f^j(y))}{f'(0)},\prod_{j=0}^{N}\frac{g'(g^j(y))}{g'(0)}\prod_{j>N}\frac{g'(g^j(y))}{g'(0)}\right),$$

$\prod_{j=0}^{N}\frac{f'(f^j(y))}{f'(0)}$ é próximo de $\prod_{j=0}^{N}\frac{g'(g^j(y))}{g'(0)}$, e tanto $\prod_{j>N}\frac{f'(f^j(y))}{f'(0)}$ quanto $\prod_{j>N}\frac{g'(g^j(y))}{g'(0)}$ são próximo de 1, $\prod_{j=0}^{\infty}\frac{f'(f^j(y))}{f'(0)}$ é próximo de $\prod_{j=0}^{\infty}\frac{g'(g^j(y))}{g'(0)}$, c.q.d

Como $\alpha$ é solução de $\alpha' = g(\alpha)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha$ é dado por $\alpha(x) = G^{-1}(x)$, onde $G(z) = \int_0^z \frac{dt}{g(t)}$. Segue daí que se $f_1$ e $f_2$ estão próximos na topologia $C^2$, os $g_1$ e $g_2$ associados estão próximos na topologia $C^0 \Rightarrow$ os $G_1$ e $G_2$ associados estão próximos na topologia $C^1$, donde os $\alpha_1$ e $\alpha_2$ associados estão próximos na topologia $C^1$, isto é, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $d_2(f_1, f_2) < \delta \Rightarrow d_1(\alpha_1, \alpha_2) < \varepsilon$, c.q.d.

Resta-nos somente provar que $g(y) = \prod_{j=0}^{\infty}\frac{f'(f^j(y))}{\lambda}$ é uma função de classe $C^\infty$ para isso, basta mostrar que $\sum_{j=0}^{\infty}\ell n(\frac{f'(f^j(y))}{\lambda})$ é uma função $C^\infty$.

Derivando termo a termo, obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f''(f^j(y)).(f^j))'}{f'(f^j(y))} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f''(f^j(y)).\prod_{k=0}^{j-1} f'(f^k(y))}{f'(f^j(y))}.$$

Em geral, após derivarmos $k$ vezes, provaremos por indução que o $j$-ésimo termo do somatório é da forma

$$\left(\sum_{i=0}^{P_{k,j}} \prod_{s=1}^{a_i} f^{(U_s)}(f^{m_s}(x)). \prod_{\ell=1}^{R_{i,k,j}} f'(f^{n_\ell}(x))\right) /(f'(f^j(x))^k.$$

Nessa expressão, $P_{k,j} \leq U_k(j)$, onde $U_k$ é um polinômio de grau $k; a_i \leq k$, $2 \leq U_s \leq k+1$; $0 \leq m_s \leq j$, $j \leq R_{i,k,j} \leq kj$; $0 \leq n_\ell \leq j$.

De fato, derivando a expressão, obtemos:

$$\left[f'(f^j(x)). \sum_{i=0}^{P_{k,j}} (\prod_{s=1}^{a_i} f^{(U_s)}(f^{m_s}(x)) \prod_{\ell=1}^{R_{i,k,j}} f'(f^{n_\ell}(x)))' \right.$$

$$\left. - \sum_{p=1}^{k} ([f'(f^j(x))]'. \sum_{i=0}^{P_{k,j}} \prod_{s=1}^{a_i} f^{(U_s)}(f^{m_s}(x)) \prod_{\ell=1}^{R_{i,k,j}} f'(f^{n_\ell}(x))\right] /(f'(f^j(x))^{k+1}$$

o $\sum_{p=1}^{k}$ que aparece no numerador se refere à derivada de $[f'(f^j(x))]^k$, que é $k.[f'(f^j(x))]^{k-1}.(f'(f^j(x)))'$, e pode ser escrita como $\sum_{p=1}^{k}[f'(f^j(x))]^{k-1}.(f'(f^j(x)))'$ para evitarmos os coeficientes.

O nº de termos do numerador pode aumentar com derivadas de produtos. De fato, $(\prod_{i=1}^{n} f_i(x))' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x). \prod_{j \neq i} f_j(x)$. Assim, o nº de termos do numerador é limitada por $P_{k,j}(n_i + R_{i,k,j}) + k.P_{k,j} \leq P_{k,j}(k + kj + k) = k(j+2)P_{k,j} \leq k(j+2)U_k(j) = U_{k+1}(j)$, de grau $k+1$.

Ao derivarmos, acrescentamos no máximo uma derivada de grau superior ao primeiro ou aumentamos em no máximo 1 o grau da derivada em cada produto. Isso limita os novos $a_i$ em $k+1$ e os novos $U_s$ em $k+2$.

Ao derivamos, não surge nenhuma ocorrência de termos do tipo $f^p(x)$ com $p > j$. Assim, $m_s$ e $n_\ell$ ficam limitados por $j$.

Ao derivarmos $f^p(x)$ termos um produto de $p$ termos do tipo $f'(f^n(x))$. Assim, se tínhamos produtos de no máximo $kj$ termos do tipo $f'(f^n(x))$, teremos agora produtos de no máximo $j + kj = (k+1)j$ termos desse tipo. Só podemos perder termos desse tipo na 1ª parte do numarador, ao derivarmos $f'(f^{n_\ell}(x))$, mas só perdemos no máximo um termo desses, que é reposto pelo $f'(f^j(x))$ que aparece a mais. Assim, temos produtos de no mínimo $j$ termos desses $\Rightarrow j \leq R_{i,k+1,j} \leq (k+1)j$, c.q.d.

Na vizinhança $V$, $0 < \gamma < f'(z) < \mu < 1$, e $|f(z)| \leq |z| \Rightarrow |f^k(z)| \leq |z|$, $\forall k \in \mathbf{N}$. Seja agora $C = \max\{1, \sup_{2 \leq u \leq k+1; z \in V} |f^{(u)}(z)|\}$. Temos assim que o $j$-ésimo termo do somatório após a $k$-ésima derivada é majorado por $\frac{U_k(j).C^k}{\gamma^k}.\mu^j$. Se $A_k(j) = U_k(j).(C/\gamma)^k$, como $A_k(j)$ é um polinômio, $\sum_{j=0}^{\infty} A_k(j).\mu^j$ converge para todo $k$. Assim, pelo teste $M$ de Weierstrass e por derivação termo a termo segue que $g$ é de classe $C^\infty$ numa vizinhança de 0, c.q.d.

**Lema 2.** *Seja $L(x) = \lambda x$ um difeomorfismo local em $0 \in \mathbf{R}$, linear, com $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. Se $g$ é uma função diferenciável com $g(0) = 0$, definida numa* *vizinhança de 0, e $g \circ L = L \circ g$, então $g$ é linear.*

**Demonstração:** Basta provar para $0 < \lambda < 1$, pois se $\lambda > 1$, $L^{-1}(x) = (1/\lambda)x$, e $1/\lambda < 1$. Como $L \circ g = g \circ L$, $L^{-1} \circ g = g \circ L^{-1} \Rightarrow g$ é linear.

Para provar nesse caso, observermos que $L \circ g = g \circ L \Rightarrow L^n \circ g = g \circ L^n \Rightarrow g(\lambda^n x) = \lambda^n g(x)$. Derivando, obtemos: $\lambda^n g'(\lambda^n x) = \lambda^n g'(x) \Rightarrow g'(x) = g'(\lambda^n x)$. Quando $n \to \infty$, $\lambda^n x \to 0 \Rightarrow g'(\lambda^n x) \to g'(0) \Rightarrow g'(x) = g'(0), \forall x$, e $g(0) = 0 \Rightarrow g$ é linear.

Seja agora $f$ um difeomorfismo local em 0 com $f'(0) = \lambda$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, e $L$ uma função linear com $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha = L$. Se $g$ é uma função diferenciável com $g(0) = 0$ e $f \circ g = g \circ f$, sendo $h = \alpha^{-1} \circ g \circ \alpha$, temos que $L \circ h = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ g \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ f \circ g \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ g \circ f \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ g \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha = h \circ L \Rightarrow h$ é linear (pelo Lema 2). Assim, numa vizinhança de 0, o conjunto dos difeomorfismos $g$ que comutam com $f$ é dado por $\{\alpha \circ h \circ \alpha^{-1}$, onde $h$ é linear$\}$.

Desta maneira, $f$ mergulha num grupo a um parâmetro $\{f^t, t \in \mathbf{R}\}$, onde $f^t = \alpha \circ L^t \circ \alpha^{-1}$, sendo $L^t(x) = \lambda^t x$. Temos $f^0 = Id$, $f^1 = f$, $f^s \circ f^t = f^t \circ f^s = f^{t+s}$, e, se $g \circ f = f \circ g$, $g(0) = 0$ e $g'(0) > 0$ então $g \in \{f^t, t \in \mathbf{R}\}$.

Se $0 < \lambda < 1$ e $x > 0$, temos que, como $f^t(x) = \alpha(\lambda^t \alpha^{-1}(x))$, se $t < 0$, $\lambda^t > 1 \Rightarrow \lambda^t \alpha^{-1}(x) > \alpha^{-1}(x) \Rightarrow f^t(x) = \alpha(\lambda^t \alpha^{-1}(x)) > \alpha(\alpha^{-1}(x)) = x$; se $t = 0$, $f^0(x) = \alpha(\alpha^{-1}(x)) = x$; se $t > 0$, $\lambda^t < 1 \Rightarrow \lambda^t \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(x) \Rightarrow f^t(x) = \alpha(\lambda^t \alpha^{-1}(x)) < \alpha(\alpha^{-1}(x)) = x$.

## § SEÇÃO II: DIFEOMORFISMOS DO INTERVALO $[0,1]$

Esta seção se dedica a estudar o conjunto $\Lambda$ dos difeomorfismos $f: [0,1] \to [0,1]$ com $f(x) < x$, $\forall x \in (0,1)$ e $f'(0) \neq 1 \neq f'(1)$.. Seus resultados principais são os Lemas IV e V, onde se prova que o conjunto $\{f \in \Lambda : Z(f) = \{f^k, k \in \mathbf{Z}\}\}$ é aberto e denso em $\Lambda$.

Vamos agora definir o conjunto $\Lambda \subset \text{Dif}([0,1])$:

$$g \in \Lambda \Leftrightarrow g(0) = 0; g(1) = 1; g(x) < x; \forall x \in (0,1); g'(0) \neq 1 \neq g'(1)$$

**Definição 5:** Dado $f \in \text{Dif}([0,1]), Z(f) = \{f \in \text{Dif}([0,1]) : f \circ g = g \circ f\}$

**Lema 3.** *Se $f \in \Lambda$, $Z(f)$ é cíclico infinito ou isomorfo a* $\mathbf{R}$

**Demonstração:** $f$ mergulha localmente num grupo a um parâmetro em torno de 0, grupo esse que pela Proposição 2 se estende a um grupo $\{f^t\}$ em $[0,1)$. Temos $Z(f) = \{f^t; f^t$ se estende a uma função diferenciável em $[0,1]\}$. Do mesmo modo, $f$ mergulha num grupo a um parâmetro, $\{\tilde{f}^t\}$ em $(0,1]$.

Temos que $f^t$ se estende a um difeomorfismos em $[0,1] \Leftrightarrow f^t|_{(0,1)} = \tilde{f}^t|_{(0,1)}$. É óbvio que se $f^t|_{(0,1)} = \tilde{f}^t|_{(0,1)}$, $f^t$ se estende. Reciprocamente, se $f^t$ se estende, $f^t$ pertence ao grupo a um parâmetro em torno de 1. Assim, existe $s$ com $f^t|_{(0,1)} = \tilde{f}^s|_{(0,1)}$. Temos necessariamente $t = s$. Caso contrário, por exemplo, se $t < s$, $\exists \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ com $t < \frac{m}{n} < s \Rightarrow nt - m < 0 < ns - m$. Como $f^t = \tilde{f}^s$, $f^{nt} = \tilde{f}^{ns} \Rightarrow f^{nt-m}|_{(0,1)} = \tilde{f}^{ns-m}|_{(0,1)}$, pois $\tilde{f}^1 = f^1 = f$, mas, como numa vizinhança de 0, se $r < 0$, $f^r(x) > x$, como $\forall x \in (0,1)$, $\exists n$ tal que $f^n(x)$ está na vizinhança, donde $f^r(x) = f^r(f^{-n}(f^n(x)) = f^{-n}(f^r(f^n(x)) > f^{-n}(f^n(x)) = x \Rightarrow f^r(x) > x$, $\forall x \in [0,1)$ se $r > 0$. Do mesmo modo, prova-se que se $r > 0$, $f^r(x) < x$, $\forall x \in (0,1)$, e esses resultados também valem para $\tilde{f}^r$. Teremos assim $\tilde{f}^{rs-m}(x) < x < f^{nt-m}(x)$, $\forall x \in (0,1)$, o que contradiz $\tilde{f}^s = f^t$. Assim, $s = t$. Temos ao mesmo tempo que $Z(f)$ é um grupo, pois se $h_1 \circ f = f \circ h_1$ e $h_2 \circ f = f \circ h_2$, $h_1 \circ h_2 \circ f = h_1 \circ f \circ h_2 = f \circ h_1 \circ h_2 \Rightarrow h_1 \circ h_2 \in Z(f)$, e se $h \circ f = f \circ h$, $h^{-1} \circ f = f \circ h^{-1}$.

Isso implica que $\{t \in \mathbf{R} : f^t$ se extende a um difeomorfismo$\}$ é um grupo aditivo de números reais. Para provar que é cíclico ou isomorfo a $\mathbf{R}$ basta provar que é um conjunto fechado.

Para isso, consideremos um intervalo do tipo $[f(x_0), x_0] \subset (0,1)$, e uma seqüência $t_n$, convergindo para $t$ com $f^{t_n} = \tilde{f}^{t_n}$, i.é. $t_n$ pertencendo ao grupo. Temos portanto $f^{t_n}|_{[f(x_0),x_0]} = \tilde{f}^{t_n}|_{[f(x_0),x_0]}$. Como $[f(x_0), x_0]$ é compacto, por continuidade de $f^t$ e $\tilde{f}^t$ como funções de $t$ segue que $f^t|_{[f(x_0),x_0]} = \tilde{f}^t|_{[f(x_0),x_0]} \Rightarrow f^t = \tilde{f}^t \Rightarrow t$ pertence ao grupo.

Como todo grupo aditivo de números reais é cíclico infinito ou denso, e como este grupo é fechado, se ele for denso será o próprio $\mathbf{R}$. Assim, temos que $Z(f)$ é cíclico infinito ou isomorfo a $\mathbf{R}$, c.q.d.

Seja agora $T_t f = \lim_{x \to 0} [\sup_{0<y\leq x} (\tilde{f}^t)'(y) - \inf_{0<y\leq x} (\tilde{f}^t)'(y)]$. Temos que $\tilde{f}^t$ se estende a um difeomorfismo em $[0,1] \Leftrightarrow T_t f = 0$.

Seja $B(f) = \inf\{t > 0 : T_t f = 0\}$. Sendo dado $\mathrm{Dif}([0,1])$ com a topologia $C^2$ e $B\colon \Lambda \to \mathbf{R}$, visto como uma função, teremos o:

**Lema 4.** *$B$ é uma função semicontínua inferiormente, isto é, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d_2(f,g) < \delta \Rightarrow B(g) > B(f) - \varepsilon$.*

Antes de demonstrá-lo, observemos que ele implica que o conjunto $\{f \in \Lambda$ tal que $Z(f) = \{f^n, n \in \mathbf{Z}\}\}$ é aberto na topologia $C^2$. De fato, se $f$ pertence a este conjunto, $B(f) = 1$. Tomando $\varepsilon = 1/2$, existe uma vizinhança $V$ de $f$ tal que se $g \in V$, $B(g) > 1/2$. Se $Z(g) \neq \{g^n, n \in \mathbf{Z}\}$, como $Z(g)$ é isomorfo a $\mathbf{R}$ ou cíclico, existe $k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$ e $h \in Z(g)$ com $h^k = g \Rightarrow B(g) \leq 1/k \leq 1/2$, contradição. Assim, existe $V$, vizinhança de $f$ tal que $\forall g \in V$, $Z(g) = \{g^n, n \in \mathbf{Z}\}$.

**Demonstração do Lema:** Consideremos um intervalo do tipo $[a, x_0]$, com $a < f(x_0)$, tal que existe $b > x_0$ e $\alpha_f$ difeomorfismo local em 0 definido em $[0, b)$ com $\alpha_f^{-1} \circ f \circ \alpha_f$ linear.

Sendo dado $\varepsilon > 0$, queremos achar uma vizinhança $V(f)$ tal que $g \in V(f) \Rightarrow B(g) > B(f) - \varepsilon$. Se $B(f) - \varepsilon < 0$, não há o que ser provado. Caso contrário, seja $t_1 = B(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ e $t_0 = \frac{t_1}{2}$. Notemos que se $t \in [t_0, t_1]$, $T_t f \neq 0$. Vamos provar que para cada $t \in [t_0, t_1]$ existe uma vizinhança $V_t$ de $f$ e uma vizinhança $W_t$ de $t$ tais que $(g, s) \in V_t \times W_t \Rightarrow T_s g \neq 0$.

Caso tenhamos provado isso, observemos que, como $[t_0, t_1]$ é compacto, $[t_0, t_1]$ é coberto por um número finito das vizinhanças $W_t$, e a interseção das vizinhanças $V_t$ associadas nos dá uma vizinhança $V$ de $f$ tal que se $g \in V$, $T_t g \neq 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Se $T_t g = 0$ para algum $t < t_0$, como existe $k \in \mathbf{N}$ com $kt \in [t_0, t_1]$, $T_{kt} g \neq 0$, contradição. Assim, $T_t g = 0$,

$\forall t \in (0, t_1] \supset (0, B(f) - \varepsilon]$, c.q.d.

Para provar a existência dos $V_t$ e $W_t$, sendo $D = [a, x_0]$, temos $T_t f = \lim_{x \to 0}[\sup_{0<y\leq x}(\tilde{f}^t)'(y) - \inf_{0<y\leq x}(\tilde{f}^t)'(y)] = \lim_{N\to\infty}[\sup_{\substack{y\in D\\ n\geq N}}(\tilde{f}^t)'(f^n(y)) - \inf_{\substack{y\in D\\ n\geq N}}(\tilde{f}^t)'(f^n(y))]$. Como $\tilde{f}^t \circ f^n = f^n \circ \tilde{f}^t$, $(\tilde{f}^t)'(f^n(y)).(f^n)'(y) = (f^n)'(\tilde{f}^t(y)).(\tilde{f}^t)'(y)$. Como $f = \alpha \circ L \circ \alpha^{-1}$, onde $L(x) = \lambda x$, $f^n(y) = \alpha(\lambda^n \alpha^{-1}(y)) \Rightarrow (f^n)'(y) = \alpha'(\lambda^n\alpha^{-1}(y)).\lambda^n.(\alpha^{-1})'(y) \Rightarrow (\tilde{f}^t)'(f^n(y)).\alpha'(\lambda^n\alpha^{-1}(y)).\lambda^n.(\alpha^{-1})'(y) = \alpha'(\lambda^n\alpha^{-1}(\tilde{f}^t(y)).\lambda^n.(\alpha^{-1})'(\tilde{f}^t(y)).$ $.(\tilde{f}^t)'(y) \Rightarrow (\tilde{f}^t)'(f^n(y)) = \frac{\alpha'(\lambda^n\alpha^{-1}(\tilde{f}^t(y)))}{\alpha'(\lambda^n\alpha^{-1}(y))} \cdot \frac{(\alpha^{-1})'(\tilde{f}^t(y))}{(\alpha^{-1})'(y)} \cdot (\tilde{f}^t)'(y)$.

Como $\alpha \in C^1$ $\alpha'(0) = 1$ e quando $n \to \infty$, $\lambda^n\alpha^{-1}(y) \to 0$, assim como $\lambda^n\alpha^{-1}(\tilde{f}^t(y)) \to 0$, $\frac{\alpha'(\lambda^n\alpha^{-1}(\tilde{f}^t(y)))}{\alpha'(\lambda^n\alpha^{-1}(y))} \to 1$ quando $n \to \infty$. Como também $(\alpha^{-1})'(z) = 1/\alpha'(\alpha^{-1}(z))$, temos que $T_t f = \sup_{y\in D}\left(\frac{\alpha'(\alpha^{-1}(y))}{\alpha'(\alpha^{-1}(\tilde{f}^t(y))}(\tilde{f}^t)'(y)\right) - \inf_{y\in D}\left(\frac{\alpha'(\alpha^{-1}(y))}{\alpha'(\alpha^{-1}(\tilde{f}^t(y))} \cdot (\tilde{f}^t)'(y)\right)$. Como, se $f$ e $g$ estão próximos na topologia $C^2$, $\alpha_f$ e $\alpha_g$ estão próximos na topologia $C^1$, e, além disso, se $t$ e $s$ estão próximos, $\tilde{f}^t$ e $\tilde{g}^s$ estão próximos também na topologia $C^1$, como podemos escolher uma vizinhança $V$ de $f$ na qual $g \in V \Rightarrow g(x_0) > a$, e como $[a, x_0]$ é compacto, existem as referidas vizinhanças $V_t$ e $W_t$ nas quais $T_t f$ é próximo de $T_s g$. Como $T_t f = \delta > 0$, podemos fazer com que $T_s g > 0$, $\forall (s, g) \in W_t \times V_t$, c.q.d. (na verdade provamos que $T_t f$ é contínua como função de $f$ e de $t$).

**Lema 5.** *Se $\Lambda$ é dado na topologia $C^s$, $s \geq 2$ então $\{f \in \Lambda : Z(f) =$*

$\{f^n, n \in \mathbf{Z}\}\}$ *é denso.*

**Demonstração:** Dado $\varepsilon > 0$, basta achar $g \in \Lambda$ com $d_\infty(f,g) < \varepsilon$ e $Z(g) = \{g^n, n \in \mathbf{Z}\}$.

Existe um intervalo $[0,a]$ onde existe um difeomorfismo local $\alpha$ em 0 com $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ linear. Seja $x_0 \in (0,a), D = [f(x_0), x_0]$. Seja $J = [0,a], J' = [b,1]$ com $f(b) > a$. Como $f$ mergulha num grupo $\{f^t\}$ no intervalo $[0,1)$, esse grupo define um campo $X_0$ em $[0,1)$ dado por $X_0(x) = \frac{d}{dt}(f^t(x))|_{t=0}$, tal que a solução $\varphi_o(t,x_0)$ da equação $\dot{X} = X_0(x), X(0) = x_0$ é dada por $\varphi_o(t,x_0) = f^t(x_0)$. De fato, $\frac{d}{dt}(\varphi_o(t,x_0))|_{t=t_0} = \frac{d}{ds}(f^s(f^{t_0}(x_0))|_{s=0} = X_0(f^{t_0}(x_0)) = X_0(\varphi_o(t_0,x_0))$. Do mesmo modo, $f$ mergulha num grupo $\{\tilde{f}^t\}$ no intervalo $(0,1]$, que define o campo $X_1(x) = \frac{d}{dt}(\tilde{f}^t(x))|_{t=0}$, com $\varphi_1(t,x_1) = \tilde{f}^t(x_1)$, onde $\varphi_1(t,x_1)$ é a solução de $\dot{X} = X_1(x)$, $X(0) = x_1$. Temos que $f(x) = f^1(x) = \varphi_0(1,x)$ no intervalo $[0,1)$, e $f(x) = \varphi_1(1,x)$ no intervalo $(0,1]$.

Seja $X$ um campo tal que $X|_{[0,a]} = X_0$; $X|_{[f(b),1]} = X_1$, $X(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1)$ e $X \in C^\infty$. Tal campo existe, pois $X_0(a) < 0$ e $X_1(f(b)) < 0$. Considerando $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < f(b) - \varepsilon$, e uma função $\sigma$ de classe $C^\infty$ tal que $\sigma|_{[a,a+\varepsilon/2]} = 0$, $\sigma|_{[a+\varepsilon,f(b)-\varepsilon]} = 1$, $\sigma|_{[f(b)-\varepsilon/2,f(b)]} = 0$ e $\sigma(x) \in [0,1]$, $\forall x \in [a, f(b)]$. Definimos

$$\begin{cases} X(x) = X_0(x)(1-\sigma(x)) - \sigma(x) & \text{para } X \in [a, a+\varepsilon] \\ X(x) = X_1(x)(1-\sigma(x)) - \sigma(x) & \text{para } X \in [a+\varepsilon, f(b)] \end{cases}$$

Seja agora $\varphi(t,x_0)$ a solução de $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = x_0$. Definimos $h(y) = \varphi(1,y)$. É fácil ver, por unicidade, que $h|_{J\cup J'} = f|_{J\cup J'}$, e que $h \in \Lambda$.

Definimos agora $\psi: [0,1] \to [0,1]$ por $\psi|_{J'} = Id$, $f = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$. Pela Proposição 2, $\psi$ é um homeomorfismo e $\psi|_{(0,1]}$ é um difeomorfismo.

Famos agora provar que, $\forall \delta > 0$, existe um difeomorfismo $\overline{\beta}: \alpha^{-1}(D) \to \alpha^{-1} \circ \psi(D)$, com as seguintes propriedades:

(i) Todas as derivadas de $\overline{\beta}$ coincidem com as de $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ em $\alpha^{-1}(f(X_0))$ e $\alpha^{-1}(X_0)$;

(ii) $d_\infty(\overline{\beta}|_{\alpha^{-1}(D)}, \alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha|_{\alpha^{-1}(D)}) < \delta$;

(iii) Não há $t \in (0,1)$ tal que $\overline{\beta}(\lambda^t x) \equiv \lambda^t \overline{\beta}(x), \forall x \in \alpha^{-1}(D)$ tal que $\lambda^t x \in \alpha^{-1}(D)$.

Para isso, seja $\alpha^{-1}(D) = [y_0, y_1]$, e seja a seqüência $(z_n)$ definida por $z_1 = \frac{y_0+y_1}{2}$, $z_{n+1} = \frac{z_n+y_1}{2}$. Seja $a = y_1 - y_0$, e $I_n = (z_n - 2^{-n-2}a, z_n + 2^{-n-2}a)$. Definimos as funções $W_n: [y_0, y_1] \to \mathbf{R}$ tais que $W_n|_{[y_0,y_1] \setminus I_n} = 0$, $W_n \in C^\infty$, $W_n|_{I_n} > 0$, $\sup\limits_{I_n} |W_n'| < \inf\limits_{[y_0,y_1]} |(\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha)'|$, $d_\infty(W_n, 0) < 2^{-n}\delta$.

Consideremos a função $b_1(t) = \frac{\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha(\lambda^t z_1)}{\lambda^t} - \alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha(z_1)$. Temos que, se $h$ é imagem de $b_1(t)$ para uma infinidade de valores de $t$, esses valores têm um ponto de acumulação, necessariamente crítico, donde $h$ é imagem de um ponto crítico de $b_1$. Pelo teorema de Sard, as imagens dos pontos críticos de uma dada função diferenciável formam um conjunto de medida nula, no nosso caso, $A_1$. Escolhamos um certo $a_1 \in (0,1)$ tal que $a_1 W_1(z_1) \notin A_1$. Temos que $a_1 W_1(z_1)$ é imagem de no máximo um conjunto finito $B_1$ de valores de $t$ pela função $b_1(t)$.

Sejam agora as funções $\beta_1(t) = \alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha(t) + a_1 W_1(t)$ e $b_2(t) = \frac{\beta_1(\lambda^t z_2)}{\lambda^t} - \beta_1(z_2)$. As imagens dos pontos críticos de $b_2$ formam um conjunto de medida nula, $A_2$, que unido ao conjunto $b_2(B_1)$ nos dará um conjunto de medida nula, $C_2$. Escolhemos um certo $a_2 \in (0,1)$ tal que $a_2 W_2(z_2) \notin C_2$. Temos que $a_2 W_2(z_2)$ é imagem de no máximo um número finito de valores de $t$, que adicionados as conjunto $B$, nos dão o conjunto $B_2$.

Supondo definidos os conjuntos $A_k, B_k$ e $C_k$, e as funções $b_k$ e $B_{k-1}$, assim como $a_k$, definiremos primeiramente $\beta_k(t) = \beta_{k-1}(t) + a_k W_k(t)$ e $b_{k+1}(t) = \frac{\beta_k(\lambda^t z_{k+1})}{\lambda^t} - \beta_k(z_{k+1})$. O conjunto das imagens dos pontos críticos de $b_{k+1}$ terá medida nula e será denotado por $A_{k+1}$, que unido ao conjunto finito $b_{k+1}(B_k)$ nos dá um conjunto de medida nula. $C_{k+1}$. Escolhe-se um $a_{k+1} \in (0,1)$, com $a_{k+1} W_{k+1}(z_{k+1}) \notin C_{k+1}$. Teremos $a_{k+1} W_{k+1}(z_{k+1})$ imagem de no máximo um número finito de valores de $t$. que adicionados ao conjunto $B_k$ nos dão o conjunto $B_{k+1}$.

Afirmo que $\overline{\beta} = \lim\limits_{k \to \infty} \beta_k$ satisfaz às condições exigidas:

Em primeiro lugar, como $\sup |W_n'| < \inf \left|(\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha)'\right|$, $\overline{\beta}$ continua crescente.

Segundo: $\overline{\beta}$ coincide com $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ numa vizinhança de $y_0$, e como $d_\infty(W_n, 0) < 2^{-n}\delta$, $\overline{\beta}$ coincide com $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ junto com todas as derivadas em $y_1$, pois $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0$ tal que $|z - y_1| < \delta_1 \Rightarrow d_\infty(\overline{\beta}|_{[z,y_1]}, \alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha|_{[z,y_1]}) < \varepsilon$. Além disso, $d_\infty(W_n, 0) < \delta, \forall n \Rightarrow d_\infty(\overline{\beta}, \alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha) < \delta$.

Por fim, dado $t \in (0,1)$, existe um termo da seqüência $(z_n)$, $z_m$, tal que $y_0 < \lambda^t z_m < z_m - 2^{-2-m}a$. Pela construção. ou $a_m W_m(z_m)$ não é imagem por $b_m$ de $t$, donde $\overline{\beta}(\lambda^t z_m) \neq \lambda^t \overline{\beta}(z_m)$, ou $t \in B_m$, e como $a_{m+1}$ $W_{m+1}(z_{m+1}) \notin C_{k+1}$ e $b_{m+1}(t) \in C_{k+1}$, segue que $a_{m+1} W_{m+1}(z_{m+1}) \neq b_{m+1}(t) \Rightarrow \overline{\beta}(\lambda^t z_{m+1}) \neq \lambda^t \overline{\beta}(z_{m+1})$, c.q.d.

Após isso, definimos $\beta$: $[0,1] \to [0,1]$ da seguinte maneira:

$$\beta|_{[X_0,1]} = \psi|_{[X_0,1]}; \beta|_D = \alpha \circ \overline{\beta} \circ \alpha^{-1}|_D; \beta \circ h^n(x)$$
$$= h^n \circ \beta(x), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in D; \beta(0) = 0$$

Seja $g = \beta^{-1} \circ h \circ \beta$. Para um $\delta$ conveniente, $g$ satisfaz às propriedades:

(i) $g \in \mathrm{Dif}((0,1])$. De $\beta \circ h = h \circ \beta$ para $X \in D$, segue que $h(x) = \beta^{-1} \circ h \circ \beta(x)$, $\forall x \in D \Rightarrow g(x) = h(x)$, $\forall x \in D$; $h(h^k(x)) = h^{k+1}(x) = \beta^{-1} \circ h^{k+1} \circ \beta(x) = \beta^{-1} \circ h \circ h^k \circ \beta(x) = \beta^{-1} \circ h \circ \beta(h^k(x)) = g(h^k(x))$, $\forall x \in D$, $\forall k \in \mathbf{N}$. Assim, $g|_{[0,x_0]} = h|_{[0,x_0]}$. Como $\beta$ é diferenciável em $(0,1]$, $g = \beta^{-1} \circ h \circ \beta$ é diferenciável em $(0,1]$. Como $h$ é de classe $C^\infty$, $g$ é diferenciável em $[0,1]$;

(ii) $Z(g) = \{g^n, n \in \mathbf{Z}\}$: Seja $\{\tilde{g}^t, t \in \mathbf{R}\}$ o grupo a um parâmetro numa vizinhança de 1 ao qual $g$ pertence, que se extende para $(0,1]$. Por unicidade, $\tilde{g}^t = \beta^{-1} \circ h^t \circ \beta$, pois ambos são difeomorfismos locais que comutam com $g$ e que têm derivada em 1 igual a $[h'(1)]^t = [g'(1)]^t$. (Note que $Z(h) = \{h^t, t \in \mathbf{R}\}$, pois $h$ é o tempo 1 de um fluxo. Definimos $h^t(x) = \varphi(t,x)$). Se houvesse algum $t \in (0,1]$ com $\tilde{g}^t$ admitindo extensão diferenciável a $[0,1]$, numa vizinhança de 0, $\tilde{g}^t$ coincidiria com $h^t$, pois $g$ coincide com $h$ numa vizinhança de 0. Teríamos assim $\beta^{-1} \circ h^t \circ \beta = h^t$, numa vizinhança de 0. Temos porém que $h$ e $f$ coincidem numa vizinhança de 0, em particular num intervalo do tipo $[f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)] = [h^n(x_0), h^{n-1}(x_0)]$, contido na vizinhança na qual $h^t$ e $\beta^{-1} \circ h^t \circ \beta$ coincidem. Nessa vizinhança de 0 temos $h^t = f^t = \alpha \circ L^t \circ \alpha^{-1}$, e como $h^t \circ \beta|_{[f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)]} = \beta \circ h^t|_{[f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)]}$. Como $f$ e $h$ coincidem em $[0,a] \supset [0,x_0]$, teremos $h^t \circ \beta \circ h^{n-1}|_{[f(X_0),X_0]} = \beta \circ h^t \circ h^{n-1}|_{[f(X_0),X_0]}$. Como $\beta \circ h^{n-1}(x) = h^{n-1} \circ \beta(x)$, $\forall x \in [f(X_0), X_0]$, e $h^{n-1} \circ h^t = h^t \circ h^{n-1}$, teremos: $h^{n-1} \circ h^t \circ \beta|_D = h^{n-1} \circ \beta \circ h^t|_D$, ou $h^t \circ \beta|_D = \beta \circ h^t|_D$, ou $\alpha \circ L^t \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \overline{\beta} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \overline{\beta} \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ L^t \circ \alpha^{-1} \Rightarrow \overline{\beta}(\lambda^t x) = \lambda^t \overline{\beta}(x)$, $\forall x \in \alpha^{-1}(D)$ tal que $\lambda^t x \in \alpha^{-1}(D)$, o que é absurdo contra a construção de $\overline{\beta}$;

(iii) $d_\infty(f, g) < \varepsilon$. De fato, $f$ e $g$ coincidem numa vizinhança de 0. Fora dessa vizinhança, num compacto do tipo $[y, 1]$, $\psi$ é muito próximo de $\beta$, se $\delta$ for escolhido de forma adequada $\Rightarrow f = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$ é muito próximo de $\beta^{-1} \circ h \circ \beta = g$, c.q.d.

## § SEÇÃO III: DIFEOMORFISMOS QUE PRESERVAM ORIENTAÇÃO DE $S^1$

Nesta seção estuda-se o conjunto $\mathrm{Dif}^+(S^1)$. Seu objetivo é provar que $\{f \in \mathrm{Dif}^+(S^1) : Z(f) = \{f^k, k \in \mathbf{Z}\}\}$ contém um aberto e denso na topologia $C^s$, para $s \geq 2$.

Vamos agora estudar os difeomorfismos de $S^1$ em $S^1$ que preservam orientação. Esses difeomorfismos podem ser identificados com os difeomorfismos $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que satisfazem $f(x+1) = f(x)+1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, identificando o ponto $x \in \mathbf{R}$ ao ponto $e^{2\pi i x} \in S^1$.

**Lema 6.** *Seja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ um homeomorfismo com $f(x+1) = f(x)+1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.*

*(i) Existe $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{f^n(0)}{n})$, e será denotado por $\rho(f)$; $\left|\rho(f) - \frac{f^n(0)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$;*

*(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)-x}{n} = \rho(f)$, para todo $x \in \mathbf{R}$;*

*(iii) $\rho(f) = m/n$ com $m$ e $n$ inteiros $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{R}$ com $f^n(x) = x+m$;*

*(iv) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $d_0(f,g) < \delta \Rightarrow |\rho(f) - \rho(g)| < \varepsilon$;*

*(v) $\rho(f+n) = \rho(f)+n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$. $\rho(f)$ é o número de rotação de $f$.*

**Demonstração:** Seja $m_k = \inf\limits_{x\in\mathbf{R}}(f^k(x) - x)$, e $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}}(f^k(x) - x)$. Como $f(x+1) = f(x)+1$, $f^k(x+1) = f^k(x)+1$, donde $f^k - Id$ é periódica de período 1 $\Rightarrow \exists x_k, X_k \in \mathbf{R}$, $0 \leq x_k - X_k < 1$ com $f^k(x_k) - x_k =$

$m_k$ e $f^k(X_k) - X_k = M_k$, mas $f^k(X_k) \leq f^k(x_k) \Rightarrow m_k + x_k \geq M_k + X_k \Rightarrow 0 \leq M_k - m_k \leq x_k - X_k < 1$. Daí , $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $f^k(y) - y - 1 \leq M_k - 1 < m_k \leq f^k(x) - x < M_k < m_k + 1 \leq f^k(y) - y + 1 \Rightarrow f^k(y) - y - 1 < f^k(x) - x < f^k(y) - y + 1$. Fazendo $y = 0$ e $x = f^{k(j-1)}(0)$, teremos: $f^k(0) - 1 < f^{kj}(0) - f^{k(j-1)}(0) < f^k(0) + 1$, donde $n(f^k(0) - 1) < \sum_{j=1}^{n}(f^{kj}(0) - f^{k(j-1}(0)) < n(f^k(0) + 1) \Rightarrow n(f^k(0) - 1) < f^{kn}(0) < n(f^k(0)+1) \Rightarrow \dfrac{f^k(0)}{k} - \dfrac{1}{k} < \dfrac{f^{kn}(0)}{kn} < \dfrac{f^k(0)}{k} + \dfrac{1}{k} \Rightarrow \left|\dfrac{f^k(0)}{k} - \dfrac{f^{kn}(0)}{kn}\right| < \dfrac{1}{k}$.

Do mesmo modo, $\left|\frac{f^n(0)}{n} - \frac{f^{kn}(0)}{kn}\right| < \frac{1}{n} \Rightarrow \left|\frac{f^k(0)}{k} - \frac{f^n(0)}{n}\right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \Rightarrow (\frac{f^n(0)}{n})$ é uma seqüência de Cauchy, logo convergente para um dado $\rho(f)$. De $\left|\frac{f^n(0)}{n} - \frac{f^{kn}(0)}{kn}\right| < \frac{1}{n}$, fazendo $k \to \infty$, teremos $\left|\frac{f^n(0)}{n} - p(f)\right| \leq \frac{1}{n}(i)$.

Em $f^k(y) - y - 1 < f^k(x) - x < f^k(y) - y + 1$, fazendo $x = 0$, teremos $f^k(y) - y - 1 < f^k(0) < f^k(y) - y + 1$, ou $\frac{f^k(y)-y}{k} - \frac{1}{k} < \frac{f^k(0)}{k} < \frac{f^k(y)-y}{k} + \frac{1}{k} \Rightarrow \left|\frac{f^k(0)}{k} - \frac{f^k(y)-y}{k}\right| < \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{f^k(y)-y}{k} = p(f)$, $\forall y \in \mathbf{R}$ (ii).

Se $f^n(x) = x + m$, por uma indução óbvia, $f^{kn}(x) = x + km \Rightarrow \frac{f^{kn}(x)-x}{kn} = \frac{m}{n}$. Fazendo $k \to \infty$, teremos $p(f) = \frac{m}{n}$. Reciprocamente, se $f^n(x) \neq x + m$, por exemplo, se $f^n(x) > x + m$, $\forall x \in \mathbf{R}$, seja $\alpha = \inf_{x\in\mathbf{R}}\{f^n(x) - x - m\}$. Assim, $f^n(x) > x + m + \alpha$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f^{kn}(x) \geq x + k(m + \alpha)$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \frac{f^{kn}(x)-y}{kn} \geq \frac{m+\alpha}{n} \Rightarrow p(f) \geq \frac{m+\alpha}{n}$, contradição. O caso $f^n(x) < x + m$, $\forall x \in \mathbf{R}$ é análogo (iii); $|p(f) - p(g)| \leq \left|p(f) - \frac{f^k(0)}{k}\right| + \left|\frac{f^k(0)-g^k(0)}{k}\right| + \left|p(g) - \frac{g^k(0)}{k}\right| \leq \frac{2}{k} + \left|\frac{f^k(0)-g^k(0)}{k}\right|$. Escolhendo $k$ tal que

$\frac{2}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, e $\delta$ tal que $d_0(f,g) < \delta \Rightarrow d_0(f^k, g^k) < \frac{k\varepsilon}{2}$, teremos $|p(f) - p(g)| < \varepsilon$ (iv). Como $(f+n)^k(0) = f^k(0) + nk$, $p(f+n) = \lim_{k\to\infty} \frac{f^k(0)}{k} + n = p(f) + n$ (v).

**Definição 6:** Dado $f \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$, Per $f = \{x \in S^1$ tal que $\exists n \in \mathbf{N}, n > 0$ com $f^n(x) = x\}$. Se $f^n(x) = x$, para algum $n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, diz-se que $x$ é um ponto periódico de $f$. Caso $n = 1$, diz-se que $x$ é um ponto fixo de $f$.

**Definição 7:** Se $x = f^n(x)$ é um ponto periódico de $f \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$, dizemos que $x$ é ponto periódico transversal se $(f^n)'(x) \neq 1$ (identificando $f$ com uma função $\tilde{f}$ de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ satisfazendo $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)+1$ e $f(x) = e^{2\pi i \tilde{f}(\tilde{x})}$ quando $x = e^{2\pi i \tilde{x}}$, isso significa dizer que $\tilde{f}^n(\tilde{x}) = \tilde{x}+m$, para algum $m \in \mathbf{Z}$, e $(\tilde{f}^n)'(x) \neq 1$)

**Lema 7.** *Seja* $\mathrm{Dif}^+(S^1)$ *dado com a topologia* $C^s$, $s \geq 1$. *Seja* $U = \{f \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$: *Per* $(f)$ *é finito não vazio e só contém pontos transversais*$\}$. $U$ *é aberto e denso.*

**Demonstração:** Abertura: Seja $f: S^1 \to S^1$ um difeomorfismo com um número finito de pontos periódicos transversais, $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Pelo Lema 6, iii, todos os pontos têm o mesmo período, pois se $p(f) \equiv m/n$, $m, n \in \mathbf{Z}$; $mdc(m,n) = 1$, para os pontos periódicos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ teremos $f^n(x_i) = x_i + m$. Caso contrário, temos duas hipóteses:

a) $f^{n_1}(x_i) = x_i + m_1$ para certos $m_1$ e $n_1$ com $\frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m}{n}$, o que é absurdo, pois nesse caso $p(f)$ seria $m_1/n_1$.

b) $f^{kn}(x_i) = x_i + km$, para algum $k \in \mathbf{N}^*$, mas $f^n(x_i) \neq x_i + m$, digamos, $f^n(x_i) > x_i + m$. Nesse caso, teremos, por indução, $f^{jn}(x_i) > x_i + jm$, pois $f^{(j+1)n}(x_i) = f(f^{jn}(x_i)) > f(x_i + jm) = f(x_i) + jm > x_i + m + jm = x_i + (j+1)m$. Assim, $f^{jn}(x_i) > x_i + jm$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, mas, fazendo $k = j$, obteremos $f^{kn}(x_i) > x_i + km$, absurdo. O caso $f^j(x_i) < x_i + m$ é análogo.

Assim, $f^n$ tem $r$ pontos fixos: $x_1, \ldots, x_r$, tais que $(f^n)'(x_j) \neq 1$, para $1 \leq j \leq r$. Podemos portanto escolher vizinhanças $V_1$ de $x_1, \ldots, V_r$ de $x_r$ com $V_i \cap V_j = \phi$, $1 \leq i < j \leq r$, tais que $(f^n)'(z) \neq 1$, se $z \in V_j$, para algum $j$ com $1 \leq j \leq r$.

Denotando a vizinhança $V_k$ por $(a_k, b_k)$, teremos $f^n(a_k) < a_k + m$, e $f^n(b_k) > b_k + m$, ou vice-versa. Existe portanto uma vizinhança $\overline{V}_1$ de $f$ tal que se $g \in \overline{V}_1$, $g(a_k) < a_k$ e $g(b_k) > b_k$ (ou vice-versa), além de $(g^n)'(z) \neq 1$ se $z \in (a_k, b_k)$, para cada $k$ com $1 \leq k \leq m$.

Além disso, em $[b_k, a_{k+1}]$, $f^n(z) > z + m$ ou $f^n(z) < z + m$, $\forall z \in [b_k, a_{k+1}]$. Existe uma vizinhança $\overline{V}_2$ de $f$ tal que se $g \in \overline{V}_2$, $g^n(z) > z + m$, $\forall z \in [b_k, a_{k+1}]$ ou $g^n(z) < z + m$, $\forall z \in [b_k, a_{k+1}]$. (Considerando $a_{r+1} = a_1$).

Temos que $W = \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$ é uma vizinhança de $f$ tal que $g \in W \Rightarrow g$ tem $r$ pontos periódicos transversais. De fato, $g^n(a_k) < a_k + m$ e $g^n(b_k) < b_k + m$ (ou vice-versa), donde existe $y_k \in (a_k, b_k)$ com $g^n(y_k) = y_k + m$. Além disso, esse $y_k$ é único, pois caso $g^n(y_k) = y_k + m$ e $g^n(\tilde{y}_k) = \tilde{y}_k + m$, $a_k < y_k < \tilde{y}_k < b_k$, teríamos pelo teorema do valor médio algum $C \in (y_k, \tilde{y}_k) < (a_k, b_k)$ com $(g^n)'(y_k) \neq 1$.

Além disso, não há pontos periódicos para $g$ em $[b_k, a_{k+1}]$, pois $g^n(z) < z + m$, $\forall z \in [b_k, a_{k+1}]$ ou $g^n(z) > z + m$, $\forall z \in [b_k, a_{k+1}]$.

Desta forma, $g$ tem exatamente $r$ pontos periódicos, todos transversais, o que mostra que o conjunto $U$ é de fato aberto.

Densidade: Dada $f \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$, mostraremos inicialmente que podemos, se necessário, modificar $f$ de modo a que tenha número de rotação racional, ou seja, que possua pontos periódicos.

Queremos mostrar portanto que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{f} \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$ com $d_\infty(f, \tilde{f}) < \varepsilon$ e $p(\tilde{f}) \in \mathbf{Q}$.

Se $p(f) \in Q$, não há o que ser feito. Suporemos portanto $p(f) = \ell \notin \mathbf{Q}$.

Vamos provar que $\forall \delta > 0$, $\exists a \in (-\delta, \delta)$ tal que $p(f+a) \in \mathbf{Q}$, onde $(f+a)(x) = f(x) + a$. Provaremos inicialmente o seguinte resultado: Existem $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}^*$ com $|m - \ell n| < \delta$. Para isso, seja $N \in \mathbf{N}$ com $1/N < \delta$. Considerando os números $a_k = k\ell - [k\ell]$, para $k = 1, 2, \ldots, N$; teremos $a_k \in (0,1)$, $\forall k$. Teremos pois $N$ números no intervalo $(0,1)$, donde existem dois deles, $a_i$ e $a_j$ com $|a_i - a_j| < \frac{1}{N}$, e $i \neq j$. Assim, teremos portanto, $|i\ell - [i\ell] - (j\ell - [j\ell])| = |([j\ell] - [i\ell]) - (j-i)\ell| < 1/N < \delta$, e como $[j\ell] - [i\ell] \in \mathbf{Z}$, bem como $0 \neq j, i \in \mathbf{Z}$, temos provado nossa afirmativa.

Como $f$ não tem pontos periódicos, pois $p(f) \notin \mathbf{Q}$, $f^n(x) \neq x + m$, $\forall x$. Podemos supor sem perda de generalidade, que $f^n(x) > x + m$, $\forall x$. Observemos que $(f+\delta)^n(x) \geq f^n(x) + \delta$, donde $(f+\delta)^n(x) > x + m + \delta$ (estamos considerando $n > 0$). Nesse caso, por uma indução óbvia, $(f+\delta)^{kn}(x) \geq x + k(m+\delta) \Rightarrow p(f+\delta) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{f^{kn}(x)-x}{kn} \geq \frac{m+\delta}{n}$. Como $|m - \ell n| < \delta$, temos $\ell n - m < \delta \Rightarrow \ell < \frac{m+\delta}{n} \Rightarrow p(f+\delta) \geq \frac{m+\delta}{n} > \ell = p(f)$.

Consideremos agora a função $\lambda\colon [0,\delta] \to \mathrm{Dif}^+(S^1)$, $\lambda(a) = f + a$. Temos que $\lambda$ é contínua. Pelo item iv, Lema 6, $\sigma = p \circ \lambda$ é uma função real contínua. Como $\sigma(0) \neq \sigma(\delta)$, existe algum racional $r$ entre $\sigma(0)$ e $\sigma(\delta)$, e, por continuidade, algum $a \in (0,\delta)$ com $\sigma(a) = r \Rightarrow p(f+a) \in \mathbf{Q}$, c.q.d.

Seja agora $p(f) = \frac{m}{n}$, $m$ e $n$ inteiros. Pelo Lema 6, item iii, algum $x_0 \in S^1$ com $f^n(x_0) = x_0 + m$. Dividiremos pois o círculo $S^1$ como $S^1 = \bigcup_{i=0}^{n-1}[f^i(x_0), f^{i+1}(x_0))$. Seja $I_k = [f^k(x_0), f^{k+1}(x_0))$, $0 \leq k \leq n-1$.

Dividiremos o restante da demonstração em 2 etapas:

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{f} \in \mathrm{Dif}(S^1)$ com $d_\infty(f, \tilde{f}) < \varepsilon$, $(\tilde{f})^n(x_0) = x_0 + m$ e $(\tilde{f}^n)'(x_0) \neq 1$, caso $(f^n)'(x_0) = 1$. Para isso, considere uma vizinhança $V$ de $x_0$, $V \subset (f^{n-1}(x_0), f(x_0))$, e seja $m = \inf_{z \in V} |f'(z)|$. Considere uma função $\sigma$ que se anula fora de $V, \sigma \in C^\infty$, $\sigma(x_0) = 0$ e $\sigma'(x_0) \neq 0$, com $\sup_{Z \in V} |\sigma'(Z)| < m$ e $d(\sigma, 0) < \varepsilon$. Seja $\tilde{f} = f + \sigma$. Temos claramente $\tilde{f}^n(x_0) = x_0$, junto com $(\tilde{f}^n)'(x_0) = (\tilde{f}^{n-1})'(\tilde{f}(x_0))$. $\tilde{f}'(x_0)$. Como $\tilde{f}|_{S^1 - (f^{n-1}(x_0), f(x_0))} = f$, $(\tilde{f}^{n-1})'(\tilde{f}(x_0)) = (f^{n-1})'(f(x_0))$, donde, como $\tilde{f}'(x_0) \neq f'(x_0), (\tilde{f}^n)'(x_0) \neq (f^n)'(x_0) = 1$. Como $\sup_{Z \in V} |\sigma'(Z)| < m, (f + \sigma)'(z) > 0$, $\forall z \in V$, donde $f + \sigma$ é um difeomorfismo, com $d_\infty(f, f + \sigma) = d_\infty(0, \sigma) < \varepsilon$, c.q.d.

b) Pela letra $a$, podemos considerar que $x_0$ é ponto periódico transversal. Como $(f^n)'(x_0) = (f^n)'(f^k(x_0))$ segue que $f^k(x_0)$ é ponto periódico transversal, para $1 \leq k \leq n$. $[(f^n)'(x_0) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^j(x_0)) \equiv \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^{k+j}(x_0)) = (f^n)'(f^k(x_0))]$. Seja $V_0 = (a_0, b_0)$ vizinhança de $f^{n-1}(x_0)$ com $\overline{V}_0 \subset (f^{n-2}(x_0), x_0)$ e $V_1 = (a_1, b_1)$ vizinhança de $x_0$ com $\overline{V}_1 \subset (b_0, f(x_0))$ tais que $|(f^n)'(z) - 1| > \delta$, $\forall z \in f(V_0) \cup f(V_1)$, e para um certo $\delta > 0$.

Definamos $\varphi\colon [f(b_0), f(a_1)] \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x + m - f^n(x)$. Se $h$ for imagem por $\varphi$ de um número infinito de pontos, esses infinitos pontos terão um ponto de acumulação $a$ com $\varphi(a) = h$, sendo $a$ necessariamente ponto crítico de $\varphi$.

Como, pelo teorema de Sard, as imagens dos pontos críticos de uma dada função diferenciável constituem um conjunto de medida nula, cujo complementar $C$ é denso, podemos escolher $h \in C$ suficientemente pequeno, donde $h$ é imagem de no máximo um número finito de pontos por $\varphi$.

Definindo uma função $\sigma$ com as seguintes propriedades: $\sigma$ se anula fora de $I_{n-1}$; $\sigma(Z) = h$, $\forall Z \in (b_0, a_1)$; $\sigma \in C^\infty$; $\sup\limits_{V_0 \cup V_1} |\sigma'| < \delta_1$; $d_\infty(\sigma, 0) < \varepsilon$, teremos que $\tilde{f} = f + \sigma$ é tal que $\tilde{f}$ tem apenas um número finito de pontos periódicos:

b.a) $\tilde{f}$ tem exatamente dois pontos periódicos, ambos transversais, em $f(V_0) \cup f(V_1)$; $x_0$ e $f(x_0)$. De fato, se, por exemplo, $\exists c \in f(V_0)$ com $\tilde{f}^n(c) = c + m$, como $\tilde{f}^n(x_0) = x_0 + m$, pelo teorema do valor médio $(\tilde{f}^n)'(d) = 1$, para algum $d$ entre $x_0$ e $c$, mas como $|(f^n)'(z) - 1| > \delta$, $\forall z \in f(V_0)$, e $(\tilde{f}^n)'(z)$ é próximo de $(f^n)'(z)$ para $z \in f(V_0)$, segue que, para um $\delta_1$ apropriado, $(\tilde{f}^n)'(z)$ é diferente de 1 para $z \in f(V_0)$, c.q.d.

b.b) $\tilde{f}$ tem no máximo um número finito de pontos periódicos em $[f(b_0), f(a_1)]$.

De fato, se $\tilde{f}^n(x) = x + m$, para algum $x \in [f(b_0), f(a_1)]$, $\tilde{f}(f^{n-1}(x)) = x + m \Rightarrow f^n(x) + h = x + m$, mas isso só ocorre para um número finito de valores de $x$, c.q.d.

Assim, conseguimos fazer com que $\tilde{f}$ tenha um número finito de pontos periódicos em $[f(b_0), f(a_1)]$. Fazendo uma perturbação como a do item a) em cada um desses pontos periódicos que não sejam transversais, conseguimos uma função $\overline{f}$ próxima de $f$ na topologia $C^\infty$ e logo na topologia $C^s$ $(s \geq 1)$ tal que $\overline{f}$ tem apenas um número finito não nulo de pontos periódicos, todos eles não transversais no intervalo $[x_0, f(x_0)] = [x_0, \overline{f}(x_0)]$, logo em todo o $S^1$, o que encerra nossa prova.

**1º Teorema.** *Seja* $B = \{f \in \mathrm{Dif}^+(S^1) : Z(f) = \{f^n, n \in \mathbf{Z}\}\}$, *com* $\mathrm{Dif}^+(S^1)$ *dado com a topologia* $C^s$, $s \geq 2$. *Então* $B$ *contém um conjunto aberto e denso em* $\mathrm{Dif}^+(S^1)$.

**Demonstração:** Provamos que $U = \{f \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$: Per $(f)$ é finito e só contém pontos transversais$\}$ é aberto e denso na topologia $C^s$. Vamos inicialmente provar que o conjunto $B \cap U$ é denso em $U$.

Para isso, seja $f \in U$, e Per $(f) = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ com $(p_i, p_{i+1}) \cap (p_j, p_{j+1}) = \phi$, se $i \neq j$. Suponha que $f^n(p_i) = p_i + r$, mdc $(m, r) = 1$, $\forall p_i \in$ Per $(f)$. Vamos provar a densidade.

Densidade: Seja $F = f^n$. Podemos fazer pequenas perturbações em $f$ do tipo do item a da demonstração de densidade de $U$ (V. página anterior), de forma de $F'(p_i) \neq F'(p_j)$, a menos que $f^k(p_i) = p_j$, para algum $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pelo Lema 5, podemos encontrar $\tilde{F}_0 \colon [p_0, p_1] \to [p_0, p_1]$ que coincide com $F$ em vizinhanças de $p_0$ e de $p_1$, arbitrariamente próxima de $f$ e $Z(\tilde{F}_0) = \{\tilde{F}_0^n, n \in \mathbf{Z}\}$. Seja $\tilde{f}|_{[p_0,p_1]} = f^{1-n}\tilde{F}_0$; e $\tilde{f}|_{S^1 - [p_0,p_1]} = f|_{S^1 - [p_0,p_1]}$. Seja $\tilde{F} = \tilde{f}^n$. Vamos mostrar que $Z(\tilde{f}) = \{\tilde{f}^k, k \in \mathbf{Z}\}$.

É fácil de ver que se $g \in Z(\tilde{f})$, $\tilde{F}(g(p_0)) = g(\tilde{F}(p_0)) = g(p_0) \Rightarrow$

$g(p_0) \in \mathrm{Per}(\tilde{f}) = \mathrm{Per}(f)$. Como $\tilde{F} \circ g = g \circ \tilde{F}$, $(\tilde{F})'(g(p_0)).g'(p_0) = g'(\tilde{F}(p_0))(\tilde{F})'(p_0)$. Como $\tilde{F}(p_0) = p_0$, $\tilde{F}'(p_0) = \tilde{F}'(g(p_0))$, donde temos que $g(p_0) = \tilde{f}^k(p_0)$, para algum $k, 1 \leq k \leq n$. (Pois $\tilde{F}'(p_i) \neq \tilde{F}'(p_j)$ exceto se $f^k(p_i) = p_j$, $\exists k$). Seja $Z_k = \{g \in Z(\tilde{f})$ tal que $g(p_0) = \tilde{f}^k(p_0)\}$. Basta provar que $Z_k = \{\tilde{f}^k\tilde{F}^i, i \in \mathbf{Z}\}$, mas como $g\tilde{f}^{-k} \in Z(\tilde{f})$, e $g\tilde{f}^{-k}$ leva $[p_0, p_1]$ em $[p_0, p_1]$, como, em $[p_0, p_1]$, $\tilde{f}^n = f^{n-1}.\tilde{f} = f^{n-1} \circ f^{1-n} \circ \tilde{F}_0 = \tilde{F}_0$, segue que $g\tilde{f}^{-k}|_{[p_0,p_1]} \in Z(\tilde{F}_0) \Rightarrow g\tilde{f}^{-k} = \tilde{F}_0^i = \tilde{F}^i$ em $[p_0.p_1]$ para algum $i \in \mathbf{Z}$, donde $g\tilde{f}^{-k} = \tilde{F}^i$ em todo o $S^1$. De fato, se $h\colon S^1 \to S^1$ pertence a $Z(\tilde{F})$, e $h(p_i) = p_i$, $\forall i$ então $h|_{[p_i,p_{i+1}]} = \tilde{F}^t$ para algum $t \in \mathbf{R}$, donde $h'(p_i)$ define $h|_{[p_i,p_{+1}]}$, logo determina $h'(p_{i+1})$ que analogamente determina $h|_{[p_{i+1},p_{i+2}]}$, e assim por diante. Desse modo, começando com $i = 0$ temos que $h'(p_0)$ determina $h$ em todo o $S^1$. Se $h = g\tilde{f}^{-k}$, $h|_{[p_0,p_1]} = \tilde{F}^i \Rightarrow h = \tilde{F}^i$, por unicidade, em todo o $S^1$. Assim $g\tilde{f}^{-k} = \tilde{F}^i \Rightarrow g = \tilde{F}^i\tilde{f}^k = \tilde{f}^k\tilde{F}^i$, c.q.d.

Obs.: Se $h \circ \tilde{F} = \tilde{F} \circ h, h(p_i) = h(\tilde{F}(p_i)) = \tilde{F}(h(p_i))$. Se $h(p_0) = p_0$ então $h(p_i) = p_i$, $\forall i \in \mathbf{Z} \Rightarrow g\tilde{f}^{-k}(p_i) = p_i$, $\forall i \in \mathbf{Z}$.

**Abertura:** Observemos inicialmente que o conjunto $U' = \{f \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$ : $\mathrm{Per} f = \{p_0, \ldots, p_k\}$ é finito, não vazio, só contém pontos transversais, é tal que $f^n(x) = x$, $\forall x \in \mathrm{Per}(f)$ e $(f^n)'(p_i) \neq (f^n)'(p_j)$ se $\{p_i.p_j\} \subset \mathrm{Per}\, f$ e $f^k(p_i) \neq p_j$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, e além disso, se $F = f^n$, $\exists i$, $0 \leq i \leq k+1$ tal que $Z(F|_{[p_i,p_{i+1}]}) = \{(F|_{[p_i,p_{i+1}]})^n, n \in \mathbf{Z}\}$, onde $p_i$ e $p_{i+1}$ são dois elementos de $\mathrm{Per}\ (f)$ tais que $(p_i, p_{i+1}) \cap \mathrm{Per}\, f = \phi\}$ é aberto e denso em $\mathrm{Dif}^+(S^1)$.

De fato, a densidade foi provada na demonstração de densidade desse teorema. A abertura tem uma prova semelhante à da abertura de $U$ (Lema

7). Essa prova mostra que, se $f$ tem um número finito de pontos periódicos transversais, $p_0, p_1, \ldots, p_k$, então existe uma vizinhança $V$ de $f$ tal que se $g \in V$ então Per $g = \{\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_k\}$, finito e não vazio. Além disso, se $g$ está suficientemente próximo de $f$, $\tilde{p}_i$ é próximo de $p_i$, $0 \leq i \leq k$, e $f|_{[p_i, p_{i+1}]}$ é próxima de $g|_{[\tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}]}$, junto com o fato de $f^n|_{[p_i, p_{i+1}]}$ ser próxima de $g^n|_{[\tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}]}$. Escolhendo $V$ suficientemente pequena, pode-se fazer com que $(g^n)'(\tilde{p}_i) \neq (g^n)'(\tilde{p}_j)$, se $\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} \subset \text{Per}(g)$ e $f^k(\tilde{p}_i) \neq \tilde{p}_j$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, e que se $G = g^n$, então teremos (pelo Lema 4), $Z(G|_{[\tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}]}) = \{(G|_{[\tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}]})^n, n \in \mathbf{Z}\}$, se $i$ é tal que se $F = f^n$, $Z(F|_{[p_i, p_{i+1}]}) = \{(F|_{[p_i, p_{i+1}]})^n, n \in \mathbf{Z}\}$. Isso prova que de fato $U' \subset U$ é aberto e denso em $\text{Dif}(S^1)$.

Vamos agora provar que $B \cap U'$ é aberto em $U'$. De fato, basta provar que $U' \subset B$.

Seja $f \in U'$, e $h \in Z(f)$. Seja $F = f^n$, e $i$ tal que $Z(F|_{[p_i, p_{i+1}]}) = \{(F|_{[p_i, p_{i+1}]})^n; n \in \mathbf{Z}\}$. Como $f \circ h = h \circ f$, $F \circ h = h \circ F \Rightarrow F(h(p_i)) = h(F(p_i)) = h(p_i)$, e $F'(h(p_i)) = h'(p_i) = h'(F(p_i)).F'(p_i) = h'(p_i)F'(p_i) \Rightarrow F'(h(p_i)) = F'(p_i) \Rightarrow h(p_i) = f^k(p_i)$, para algum $k \in \mathbf{Z}$. Assim, $h \circ f^{-k}$ leva $[p_i, p_{i+1}]$ em $[p_i, p_{i+1}]$, e comuta com $F \Rightarrow h \circ f^{-k}|_{[p_i, p_{i+1}]} = F^j|_{[p_i, p_{i+1}]}$ para algum $j \in \mathbf{Z}$, donde, como no fim da demonstração de densidade desse teorema, $h \circ f^{-k} = F^j$ em todo o $S^1 \Rightarrow h = f^k F^j = f^{nj+k}$. Como $nj + k \in \mathbf{Z}$, nossa demonstração está encerrada.

# § SEÇÃO IV: DIFEOMORFISMOS QUE INVERTEM ORIENTAÇÃO DE $S^1$

Nesta seção estende-se os resultados da Seção III para $\mathrm{Dif}^-(S^1)$, completando a prova do teorema fundamental dessa dissertação, que afirma que $\{f \in \mathrm{Dif}(S^1) : Z(f) = \{f^k, k \in \mathbf{Z}\}\}$ contém um aberto e denso em $\mathrm{Dif}(S^1)$, com a topologia $C^s$, para $s \geq 2$.

Temos estudado até agora o conjunto $\mathrm{Dif}^+(S^1)$ dos difeomorfismos $f: S^1 \to S^1$ que preservam orientação. Vamos extender agora nosso estudo ao conjunto $\mathrm{Dif}^-(S^1)$ dos difeomorfismos $f: S^1 \to S^1$ que invertem orientação, abrangendo todo o $\mathrm{Dif}(S^1) = \mathrm{Dif}^+(S^1) \cup \mathrm{Dif}^-(S^1)$.

**Lema 8.** *Seja $f \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$. $f$ admite exatamente 2 pontos fixos.*

**Demonstração:** Identificando $f$ com um difeomorfismo $\tilde{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ com $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) - 1$ e $\tilde{f}(0) \in [0,1)$, teremos $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0) - 1 \in [-1,0) \Rightarrow \tilde{f}(1) - 1 \in [-2,-1)$. Como $\tilde{f}(0) - 0 \in [0,1)$, por continuidade teremos $0 \leq x_1 < x_2 < 1$ com $\tilde{f}(x_1) - x_1 = 0$ e $\tilde{f}(x_2) - x_2 = -1$, ou seja, $x_1$ e $x_2$ serão pontos fixos de $f$.

Como $\tilde{f}$ é estritamente decrescente, $f(x) - x \in (0,1)$, $\forall x \in [0, x_1)$, $f(x) - x \in (-1,0)$, $\forall x \in (x_1, x_2)$ e $f(x) - x \in (-2,-1)$, $\forall x \in (x_2, 1]$.

Assim, provamos que $x_1$ e $x_2$ são os únicos pontos fixos de $f$, c.q.d.

Observemos agora que um difeomorfismo local $f$ em 0, com $f'(0) < 0$, $f'(0) \neq -1$ admite um difeomorfismo local $\alpha_f$ em 0 com $\alpha'_f(0) = 1$, tal que $\alpha_f^{-1} \circ f \circ \alpha_f$ seja linear. Além disso, se $f_1$ e $f_2$ estão próximos na topologia $C^2$, $\alpha_{f_1}$ e $\alpha_{f_2}$ estão próximos na topologia $C^1$. A demonstração deste fato é absolutamente análoga à do Lema 1.

Outra observação é que se $L(x) = \lambda x$, com $\lambda < 0$, $\lambda \neq -1$ e $L \circ g = g \circ L$, para um certo difeomorfismo local $g$ em 0, então $g$ é linear. A demonstração é análoga à do Lema 2.

Esses fatos implicam, junto com os Lemas 1 e 2, que se $f$ é um difeomorfismo local em 0 com $f'(0) \notin \{-1, 0, 1\}$ então existe um difeomorfismo local $\alpha$ em 0 com $\alpha'(0) = 1$ e $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ linear. Além disso, $f \circ g = g \circ f$ para $g$ difeomorfismo local em $0 \Leftrightarrow g$ é da forma $\alpha \circ H \circ \alpha^{-1}$, onde $H$ é linear.

**Lema 9.** *Seja* $f \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$. *Definimos* $Z^-(f) = \{g \in \mathrm{Dif}^-(S^1) : g \circ f = f \circ g\}$. *Seja* $B^- = \{f \in \mathrm{Dif}^+(S^1) : Z^-(f) = \phi\}$. *Então* $B$ *contém um aberto e denso em* $\mathrm{Dif}^+(S^1)$, *na topologia* $C^s$, *para cada* $s \geq 2$.

**Demonstração:** Na verdade, basta provar que $B^-$ contém um aberto e denso em $U'$ (veja demonstração de abertura no teorema, página 14).

Se $g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$ e $f \circ g = g \circ f$, como, pelo Lema 8, $g$ admite 2 pontos fixos, $p_0$ e $p_1$, temos $g(f(p_0)) = f(g(p_0)) = f(p_0)$ e $g(f(p_1)) = f(g(p_1)) = p_1$. Assim, $f(p_0) = p_0$ e $f(p_1) = p_1$ ou $f(p_0) = p_1$ e $f(p_1) = p_0$. Analisemos as duas hipóteses, começando pela segunda hipótese: Se $f(p_0) = p_1$ e $f(p_1) = p_0$, teremos $f^2(p_0) = p_0$ e $f^2(p_1) = p_1$, com $(f^2)'(p_0) = f'(p_0)f'(p_1) = (f^2)'(p_1)$, e $(f^2)'(p_0) \neq 1$, pois $f \in U'$. Supondo sem perda de generalidade $0 < (f^2)'(p_0) = (f^2)'(p_1) < 1$, e denotando por $[p_0, p_1]$ o arco que liga $p_0$ a $p_1$ no sentido positivo, teremos vizinhanças $V_1 = [p_0, a)$ e $V_2 = (b, p_1]$ tais que $f^2(x) < x$, $\forall x \in V_1$ e $f^2(x) > x$, $\forall x \in V_2$. Por continuidade, $\exists p \in (p_0, p_1)$ tal que $f^2(p) = p$. Como $f^2 \circ g = g \circ f^2$, temos que $f^2(g(p)) = g(f^2(p)) = g(p)$, e $(f^2)'(g(p)).g'(p) = g'(f^2(p)).(f^2)'(p) = g'(p)(f^2)'(p) \Rightarrow (f^2)'(g(p)) = (f^2)'(p) \Rightarrow g(p) = f^k(p)$, para algum $k \in \mathbf{Z}$. Como $\{f^k(p), k \in \mathbf{Z}\} = \{p, f(p)\}$, e $g$ leva $[p_0, p_1]$ em $[p_1, p_0]$ (onde $[p_1, p_0]$ é o arco que liga $p_1$ a $p_0$ no sentido positivo), assim como $f$ leva $[p_0, p_1]$ em $[p_1, p_0]$, teremos $g(p) = f(p)$. Seja $g(p) = f(p) = q$. $f$ leva $[p_0, p]$ em $[p_1, q]$, $[p, p_1]$ em $[q, p_0]$, $[p_1, q]$ em $[p_0, p]$ e $[q, p_0]$ em $[p, p_1]$. $g$ leva $[p_0, p]$ em $[q, p_0]$, $[p, p_1]$ em $[p_1, q]$, $[p_1, q]$ em $[p, p_1]$ e $[q, p_0]$ em $[p_0, p]$. Assim, $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in (p_0, p_1) \setminus \{p\}$, donde $p$ é o único ponto fixo de $f^2$ em $(p_0, p_1) \Rightarrow \mathrm{Per}(f) = \{p_0, p, p_1, q\}$.

Na 1ª hipótese, $f(p_0) = p_0$ e $f(p_1) = p_1$. $f$ não tem mais nenhum ponto fixo, pois se, por exemplo, $f(x) = x$ para algum $x \in (p_0, p_1)$, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, junto com $f'(g(x)).g'(x) = g'(f(x)).f'(x) = g'(x).f'(x) \Rightarrow f'(g(x)) = f'(x) \Rightarrow g(x) = f^k(x)$, para algum $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow g(x) = x$, absurdo, pois $x \in (p_0, p_1)$ e $g(x) \in (p_1, p_0)$.

**1ª hipótese:** Nesse caso $f \in U'$ e admite exatamente 2 pontos fixos transversais, $p_0$ e $p_1$. Como $U' \subset B$, $Z(f) = \{f^n, n \in \mathbf{Z}\}$. Se $g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$ é tal que $g \circ f = f \circ g$, $g$ admite $p_0$ e $p_1$ como seus únicos pontos fixos. O difeomorfismo $G = g^2 \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$ é tal que $G \circ f = f \circ G \Rightarrow G = f^k$, para algum $k \in \mathbf{Z}$.

Seja $j$ tal que $k/2 \in \{j, j + \frac{1}{2}\}$, $j \in \mathbf{Z}$. Considerando $h = f^{-j} \circ g$, temos que $h^2 = f^{-2j} \circ G = Id$, se $k/2 = j$ ou igual a $f$ se $k/2 = j + \frac{1}{2}$. Temos ainda que $h \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$.

Assim, $Z^-(f) = \phi \Leftrightarrow \nexists g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$ com $g^2 = Id$ ou $g^2 = f$.

Seja $\alpha$ difeomorfismo local em $p_0$ tal que $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ seja linear. Se $g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$, $g(p_0) = p_0$ e $g \circ f = f \circ g$, então $g$ se escreve localmente como $\alpha(-c\alpha^{-1}(x))$ para algum $c > 0$. Se $g^2 = Id$, $\alpha(c^2\alpha^{-1}(x)) = \alpha(\alpha^{-1}(x)) \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow g(x) = \alpha(-\alpha^{-1}(x))$, localmente. Se $g^2 = f$, $\alpha(c^2\alpha^{-1}(x)) = \alpha(\lambda\alpha^{-1}(x)) \Rightarrow c = \lambda^{1/2}$, onde $\lambda = f'(p_0)$.

Definindo $f_0(x) = \alpha(-\alpha^{-1}(x))$ para $x$ numa vizinhança de $p_0$ com $f \circ f_0 = f_0 \circ f$ extendendo $f$ para $S^1 - \{p_1\}$, e $f_1(x) = \alpha(-\lambda^{1/2}\alpha^{-1}(x))$ e $f_1 \circ f = f \circ f_1$, $f_1 \colon S^1 - \{p_1\} \to S^1 - \{p_1\}$, teremos que $Z^-(f) = \phi \Leftrightarrow \lim_{x \to p_1} f_0'(x)$ e $\lim_{x \to p_1} f_1'(x)$ não existem. Como pelos argumentos do Lema 4 a não existência desses limites é um fenômeno que se mantém com pequenas modificações de $f$ (pois $\alpha$ depende na classe $C^1$ de $f$ na classe $C^2$), temos imediatamente que $B^- \cap U'$ é aberto.

Para provar a densidade, procedemos de forma análoga ao Lema 5. Definamos inicialmente um difeomorfismo $h \colon S^1 \to S^1$ que fixa apenas $p_0$ e $p_1$ e que coincide com $f$ em vizinhanças de $p_0$ e de $p_1$, e tal que $h$ mergulha num grupo a 1 parâmetro.

Seja $V_0 = [\alpha(-\alpha^{-1}(a)), a]$ vizinhança de $p_0$ onde $f(x) = \alpha(\lambda\alpha^{-1}(x))$, e tal que $h = f$ em $V_0$. Seja $V_1$ vizinhança de $p_1$ onde $h = f$. Definamos agora $\psi \colon S^1 \to S^1$ por $\psi|_{V_1} = Id$, $f = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$, $\psi(p_0) = p_0$. Seja agora $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = I \subset V_0$. Modifiquemos a função $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ para obter uma função $\overline{\beta}$ que coincide com $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ fora de $\alpha^{-1}(I)$, está suficientemente próxima de $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$, e não verifica nem $\overline{\beta}(\alpha^{-1}(x_0)) = -\overline{\beta}(-\alpha^{-1}(x_0))$ nem $\overline{\beta}(-\lambda^{1/2}\alpha^{-1}(x_0)) = -\lambda^{1/2}\overline{\beta}(\alpha^{-1}(x_0))$, como no Lema 5.

Definimos agora $\beta = \alpha \circ \overline{\beta} \circ \alpha^{-1}$, e $\tilde{f} = \beta^{-1} \circ h \circ \beta$. Podemos fazer $\tilde{f}$ arbitrariamente próxima de $f$ de modo que $Z(\tilde{f}) = \{\tilde{f}^n, n \in \mathbf{Z}\}$. Assim como no Lema 5 não se pode definir $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ como funções diferenciáveis de $S^1$ em $S^1$. Assim, teremos $Z^-(\tilde{f}) = \phi$, o que prova a densidade de $B^-$.

**2ª hipótese:** Nesse caso $f \in U'$, $Z(f) = \{f^n, n \in \mathbf{Z}\}$ e $f^2$ tem 4 pontos fixos transversais: $p_0, p, p_1$ e q, com $f(p_0) = p_1$ e $f(p) = q$. Como $f \in U'$, podemos supor que $Z(f^2|_{[p_0,p]}) = \{(f^2|_{[p_0,p]})^n, n \in \mathbf{Z}\}$. Se $g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$ é tal que $f \circ g = g \circ f$ então $g$ tem exatamente 2 pontos fixos, que podem ser $p_0$ e $p_1$ ou $p$ e $q$. Se forem $p$ e $q$ então $g(p_0) = p_1$ $g(p_1) = p_0$, e $f^{-1} \circ g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$ é tal que $(f^{-1} \circ g) \circ f = f \circ (f^{-1} \circ g)$, $f^{-1} \circ g(p_0) = f^{-1}(p_1) = p_0$ e $f^{-1} \circ g(p_1) = f^{-1}(p_0) = p_1$. Assim $Z^-(f) = \phi \Leftrightarrow \nexists g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$ com $g \circ f = f \circ g$, $g(p_0) = p_0$ e $g(p_1) = p_1$.

Nesse caso, $g$ leva $[p_0, p]$ em $[q, p_0]$ e $[q, p_0]$ em $[p_0, p] \Rightarrow g^2$ leva $[p_0, p]$ em $[p_0, p]$. Assim $g^2|_{[p_0,p]} = (f^2)^k$ para algum $k \in \mathbf{Z}$. Se $G = g^2|_{[p_0,p]}$ e $F = f^2|_{[p_0,p]}$, sendo $j \in \mathbf{Z}$ tal que $k/2 \in \{j, j+\frac{1}{2}\}$, $f^{-j}G = Id$ se $k/2 = j$ ou igual a $F$ se $k/2 = j + \frac{1}{2}$. Dessa maneira, como na hipótese 1, $Z^-(f) = \phi$ se $\nexists g \in \mathrm{Dif}^-([q, p])$ com $g^2 = Id$ ou $g^2 = f^2$.

Se $\lambda = (f^2)'(p_0)$, definimos $F_0(x) = \alpha(-\alpha^{-1}(x))$ e $F_1(x) = \alpha(-\lambda^{1/2}\alpha^{-1}(x))$, numa vizinhança de $p_0$ onde $\alpha^{-1} \circ f^2 \circ \alpha$ seja linear, e tais que $F \circ F_0 = F_0 \circ F$ e $F \circ F_1 = F_1 \circ F$. $Z^-(f)$ só poderia ser não vazio se $\lim\limits_{x \to p} F_0'(x)$ e $\lim\limits_{x \to q} F_1'(x)$ ou $\lim\limits_{x \to p} F_1'(x)$ e $\lim\limits_{x \to q} F_1'(x)$ existam. Como a não existência de algum desses limites é, como no Lema 4, um fenômeno que se mantém com pequenas modificações de $f$, $B^-$ é aberto nesse caso.

Para provar a densidade, alteramos $F$ em $[q,p]$ para uma função $\tilde{F}$ que coincide com $F$ em vizinhanças de $q$ e $p$, tal que $\tilde{F}$ é suficientemente próximo de $F$ e que nem $\tilde{F}_0$ nem $\tilde{F}_1$ possam ser definidos diferenciavelmente em $[q,p]$, como na hipótese 1.

Definimos agora $\tilde{f} = f$ em $[p,q]$ e $\tilde{f} = f^{-1}\tilde{F}$ em $[q,p]$. Temos que $\tilde{f}$ pode ser feita suficientemente próxima de $f$, e como $\tilde{f}^2 = \tilde{F}$ em $[q,p]$, e $Z(\tilde{f}) = \{\tilde{f}^n, n \in \mathbf{Z}\}$, pois $Z(f) = \{f^n, n \in \mathbf{Z}\}$ e $\tilde{f}$ é próxima de $f$, temos que $Z^-(\tilde{f}) = \phi$. Isso encerra nossa prova.

**Lema 10.** *Seja* $f \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$, *e* $\overline{Z}(f) = \{g \in \mathrm{Dif}(S^1) : g \circ f = f \circ g\}$. *Seja* $B_- = \{f \in \mathrm{Dif}^-(S^1) : \overline{Z}(f) = \{f^n, n \in \mathbf{Z}\}\}$. *Então* $B_-$ *contém um aberto e denso em* $\mathrm{Dif}^-(S^1)$.

**Demonstração:** Observemos inicialmente que $U_- = \{f \in \mathrm{Dif}^-(S^1) : f^2$ tem um número finito de pontos fixos, todos transversais, $(f^2)'(p_0) \neq (f^2)'(p_1)$, onde $p_0$ e $p_1$ são os pontos fixos de $f$ e $Z(f^2|_{[p_0,q_1]}) = \{(f^2|_{[p_0,q_1]})^n$, $n \in \mathbf{Z}$, onde $q_1 \in (p_0,p_1]$ é o primeiro ponto fixo de $f^2$ depois de $p_0\}$ é aberto e denso em $\mathrm{Dif}^-(S^1)$.

De fato, a abertura pode ser provada com facilidade usando as técnicas do Lema 7 e do 1º teorema (abertura de $U^-$ e de $U^{-\prime}$). Usando ainda as técnicas de densidade do Lema 7 e do 1ºteorema podemos provar a densidade. De fato, primeiro modificamos $f$ de modo que $1 \neq (f^2)'(p_0) \neq (f^2)'(p_1) \neq 1$. Após isso, com as técnicas supracitadas pode-se modificar $f^2$ para uma certa $\tilde{F}$ tal que $\tilde{F}$ tem um número finito de pontos fixos, todos transversais, em $[p_0, p_1]$, que denotaremos por $p_0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = p_1$, e de modo que $Z(\tilde{F}|_{[p_0,p_1]}) = \{(\tilde{F}|_{[p_0,p_1]})^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Podemos fazer com que $\tilde{F}$ coincida com $f^2$ em vizinhanças de $p_0$ e de $p_1$. Definimos agora $\tilde{f}(x) = f(x)$ para $x$ em $[p_1, p_0]$ e $\tilde{f}(x) = f^{-1}\tilde{F}(x)$ para $x \in [p_0, p_1]$.

$\tilde{f} \in U_-$, pois $\tilde{f}^2$ tem como pontos fixos em $[p_0, p_1]$, $p_0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = p_1$ (de fato, $\tilde{f}^2 = \tilde{F}$ em $[p_0, p_1]$). De fato $\tilde{f}$ é uma bijeção entre os pontos fixos de $\tilde{f}^2$ de $[p_0, p_1]$ e os de $[p_1, p_0]$. Assim, $\tilde{f}^2$ tem um número finito de pontos fixos em $S^1$, todos transversais, e $Z(\tilde{f}^2|_{[p_0,q_1]}) = \{(\tilde{f}^2|_{[p_0,q_1]})^n,\ n \in \mathbf{Z}\} \Rightarrow \tilde{f} \in U_-$.

Vamos provar que $U_- \subset B_-$. De fato, se $f \in U_-$, e $g \circ f = f \circ g$, sendo $p_0$ e $p_1$ os pontos fixos de $f, g(p_0) = g(f(p_0)) = f(g(p_0))$, e $g'(p_0)f'(p_0) = f'(g(p_0)).g'(p_0) \Rightarrow f'(p_0) = f'(g(p_0)) \Rightarrow g(p_0) = p_0$, e analogamente $g(p_1) = p_1$. Assim, $g^2 \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$, e é um difeomorfismo local em $p_0$. Como $g^2 \circ f^2 = f^2 \circ g^2$, $g^2(q_i) = f^2(g^2(q_i)) \Rightarrow g^2(\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}) = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\} \Rightarrow$ como $g^2 \in \mathrm{Dif}^+(S^1)$ e $g^2(p_0) = p_0$, $g^2(q_i) = q_i$, $1 \leq i \leq n$. Assim, $g^2|_{[q_0,q_1]}$ comuta com $f^2|_{[q_0,q_1]} \Rightarrow g^2|_{[q_0,q_1]} = (f^2|_{[q_0,q_1]})^k$, para algum $k \in \mathbf{Z}$, e, como no fim da demonstração de densidade do 1º teorema $g^2 = f^{2k}$ em todo o $S^1$. Se $g \in \mathrm{Dif}^-(S^1)$, necessariamente $g = f^k$, por unicidade, pois $[g'(p_0)]^2 = [(f^k)'(p_0)]^2 \Rightarrow g'(p_0) = (f^k)'(p_0)$, e segue como no fim da demonstração de densidade do 1º . Se $g \in \mathrm{Dif}^+(S^1), g|_{[q_0,q_1]}$ comuta com $f^2|_{[q_0,q_1]} \Rightarrow g|_{[q_0,q_1]} = f^{2k}|_{[q_0,q_1]}$, $\exists k \in \mathbf{Z} \Rightarrow g = f^{2k}$ em todo o $S^1$. Assim, $\overline{Z}(g) = \{g^n, n \in \mathbf{Z}\}$, c.q.d.

**2º Teorema.** *Se* $\mathrm{Dif}(S^1) = \mathrm{Dif}^+(S^1) \cup \mathrm{Dif}^-(S^1)$ *e, para* $f \in \mathrm{Dif}(S^1)$, $\overline{Z}(f) = \{g \in \mathrm{Dif}(S^1) : g \circ f = f \circ g\}$ *então* $\overline{B} = \{f \in \mathrm{Dif}(S^1) : \overline{Z}(f) = \{f^n, n \in \mathbf{Z}\}\}$ *contém um aberto e denso na topologia* $C^s$, *para cada* $s \geq 2$.

**Demonstração:** Imediata a partir do 1º teorema e dos Lemas 9 e 10.

**Observação:** Para esse teorema, é fundamental a diferenciabilidade dos elementos de Dif($S^1$). De fato, considerando Hom($S^1$) o conjunto dos homeomorfismos $f: S^1 \to S^1$ o teorema está longe de ser verdadeiro. Na verdade, o conjunto dos homeomorfismos de $S^1$ em $S^1$ que comutam com um $f$ dado é sempre não enumerável.

## BIBLIOGRAFIA


[1] N. Kopell, Commuting Diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Simp. Pure Math., vol. XIV, Am. Math. Soc. (1970), p. 165–184.

[2] J. Palis e J.C.Yoccoz, Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., t. 22 (1989), p. 81–98.

[3] J. Palis e W. de Melo, Geometric theory of dynamical systems (An introduction), Springer Verlag (1982).

[4] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. Am. Math. Soc., 73 (1967), p. 747-817.