

# Seqüências Recorrentes

CARLOS GUSTAVO MOREIRA

IMPA

Seqüências recorrentes são seqüências  $x_0, x_1, x_2, \dots$  em que cada termo é determinado por uma dada função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo  $k$ , uma *seqüência recorrente de ordem  $k$*  é uma seqüência em que cada termo é determinado como uma função dos  $k$  termos anteriores:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com essa generalidade, o estudo geral de seqüências recorrentes se confunde em larga medida com a teoria dos Sistemas Dinâmicos, e o comportamento de tais seqüências pode ser bastante caótico e de descrição muito difícil, mesmo qualitativamente. Um caso particular muito importante ocorre quando a função  $f$  é linear: existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  com

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \dots + c_k x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tais seqüências são conhecidas como seqüências recorrentes lineares, e generalizam simultaneamente as progressões geométricas, aritméticas e os polinômios. Estas seqüências serão o objeto principal dessas notas. Não obstante, algumas recorrências não-lineares serão consideradas, como a recorrência  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ , que tem grande interesse do ponto de vista de sistemas dinâmicos e por suas aplicações à teoria dos números.

Essas notas, adaptadas do texto de um mini-curso dado pelo autor na II Bienal da SBM, são inspiradas no excelente livreto "Seqüências Recorrentes", de A. Markuchevitch, publicado na coleção "Iniciação na matemática", da editora MIR, no qual o autor aprendeu bastante sobre o tema no início de sua formação matemática. A seção 4, onde é deduzida a fórmula para o termo geral de uma seqüência recorrente linear, é adaptada do artigo "Equações de recorrência", de Héctor Soza Pollman, publicado no número 9 da revista Eureka! (de fato, o artigo original

submetido à revista enunciava esta fórmula sem demonstração, a qual foi incluída no artigo pelo autor destas notas, que é um dos editores da Eureka!).

## 1 – Seqüências recorrentes lineares:

Uma seqüência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência recorrente linear de ordem  $k$  (onde  $k$  é um inteiro positivo) se existem constantes (digamos reais ou complexas)  $c_1, c_2, \dots, c_k$  tais que

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \dots + c_k x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tais seqüências são determinadas pelos seus  $k$  primeiros termos  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ .

Os exemplos mais simples (e fundamentais, como veremos a seguir) de seqüências recorrentes lineares são as progressões geométricas: se  $x_n = a \cdot q^n$  então  $x_{n+1} = qx_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , donde  $(x_n)$  é uma seqüência recorrente linear de ordem 1.

Se  $(x_n)$  é uma progressão aritmética, existe uma constante  $r$  tal que  $x_{n+1} - x_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$ , donde  $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , e logo  $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(x_n)$  é uma seqüência recorrente linear de ordem 2.

Se  $x_n = P(n)$  onde  $P$  é um polinômio de grau  $k$ , então  $(x_n)$  satisfaz a recorrência linear de ordem  $k + 1$  dada por

$$x_{n+k+1} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+1}{j+1} x_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Isso é evidente se  $k = 0$  (isto é, se  $P$  é constante), pois nesse caso  $(*)$  se reduz a  $x_{n+1} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , e o caso geral pode ser provado por indução: se  $P$  é um polinômio de grau  $k \geq 1$  então  $Q(x) = P(x+1) - P(x)$  é um polinômio de grau  $k - 1$ , donde  $y_n = x_{n+1} - x_n = Q(n)$  satisfaz a recorrência  $y_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} y_{n+k-1-j}, \forall n \in \mathbb{N}$ , donde

$$x_{n+k+1} - x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} (x_{n+k-j} - x_{n+k-j-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e logo

$$x_{n+k+1} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \left( \binom{k}{j+1} + \binom{k}{j} \right) x_{n+k-j} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+1}{j+1} x_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Um outro exemplo é dado por seqüências do tipo  $x_n = (an + b) \cdot q^n$ , onde  $a, b$  e  $q$  são constantes. Temos que  $x_{n+1} - qx_n = (a(n+1) + b)q^{n+1} - q(an + b) \cdot q^n = q^{n+1}(a(n+1) + b - (an + b)) = aq^{n+1}$  é uma progressão geométrica de razão  $q$ , e logo  $x_{n+2} - qx_{n+1} = q(x_{n+1} - qx_n)$ , donde  $x_{n+2} = 2qx_{n+1} - q^2x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , e portanto  $(x_n)$  é uma seqüência recorrente linear de ordem 2.

Vamos agora considerar a famosa e popular seqüência de Fibonacci, dada por  $u_0 = 0, u_1 = 1$  e  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Seus primeiros termos são  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21, \dots$ . Mostraremos na próxima seção como achar uma fórmula explícita para seu termo geral  $u_n$  em função de  $n$ , o que será generalizado para seqüências recorrentes lineares quaisquer, e veremos algumas de suas propriedades aritméticas.

Antes porém, concluiremos esta seção com alguns fatos gerais sobre seqüências recorrentes lineares, que serão úteis nas seções subsequentes.

O conjunto das seqüências que satisfazem uma dada recorrência linear

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

é um *espaço vetorial*, isto é, dadas duas seqüências  $(y_n)$  e  $(z_n)$  que satisfazem esta recorrência (ou seja,  $y_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j y_{n+k-j}$  e  $z_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j z_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}$ ) e uma constante  $a$ , a seqüência  $(w_n)$  dada por  $w_n = y_n + az_n$  satisfaz a mesma recorrência:  $w_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j w_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

É bastante usual, dada uma seqüência  $(x_n)$ , estudar a seqüência obtida pela soma de seus  $n$  primeiros termos  $s_n = \sum_{k \leq n} x_k$ . Se  $(x_n)$  é uma seqüência recorrente linear,  $(s_n)$  também é.

De fato,  $s_{n+1} - s_n = \sum_{k \leq n+1} x_k - \sum_{k \leq n} x_k = x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Se  $x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j}$ , temos

$$s_{n+k+1} - s_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j (s_{n+k+1-j} - s_{n+k-j}), \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donde}$$

$$s_{n+k+1} = (1 + c_1)s_{n+k} + \sum_{j=1}^{k-1} (c_{j+1} - c_j)s_{n+k-j} - c_k s_n = \sum_{i=1}^{k+1} d_i s_{n+k+1-i}$$

onde  $d_1 = 1 + c_1$ ,  $d_i = c_i - c_{i-1}$  para  $2 \leq i \leq k$  e  $d_{k+1} = -c_k$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e portanto  $(s_n)$  é uma seqüência recorrente linear de ordem  $k + 1$ .

## 2 – A seqüência de Fibonacci:

A seqüência de Fibonacci é definida por  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  e  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Queremos achar uma fórmula explícita para  $u_n$  em função de  $n$ . Para isso usaremos uma idéia que será bastante útil também no caso geral: procuraremos progressões geométricas que satisfazem a mesma recorrência que  $(u_n)$ : se  $x_n = a \cdot q^n$  com  $a$  e  $q$  não nulos satisfaz  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , teremos  $a \cdot q^{n+2} = a \cdot q^{n+1} + a \cdot q^n = a \cdot q^n(q + 1)$ , donde  $q^2 = q + 1$ . Temos assim dois valores possíveis para  $q$ : as duas raízes da equação  $q^2 - q - 1 = 0$ , que são  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Assim, seqüências da forma  $a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$  e da forma  $b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$  satisfazem a recorrência acima, bem como seqüências da forma  $y_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ , pela observação da seção anterior.

Basta agora encontrar valores de  $a$  e  $b$  tais que  $y_0 = 0$  e  $y_1 = 1$  para que tenhamos  $y_n = u_n$  para todo  $n$  (de fato, teríamos  $y_0 = u_0$ ,  $y_1 = u_1$  e, por indução se  $k \geq 2$  e  $y_n = U_n$  para todo  $n < k$ , temos  $y_k = y_{k-1} + y_{k-2} = u_{k-1} + u_{k-2} = u_k$ ). Para isso, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

e portanto  $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Mostramos assim que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

É curioso que na fórmula do termo geral de uma seqüência de números inteiros definida de modo tão simples quanto  $(u_n)$  apareçam números irracionais.

Provaremos a seguir uma identidade útil sobre números de Fibonacci:

**Proposição:**  $u_{m+n} = u_m u_{n-1} + u_{m+1} u_n, \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

**Prova:** Sejam  $y_m = u_{m+n}$  e  $z_m = u_m u_{n-1} + u_{m+1} u_n$ . Temos que  $(y_n)$  e  $(z_n)$  satisfazem a recorrência  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado,  $y_0 = u_n, y_1 = u_{n+1}, z_0 = 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_n = u_n = y_0$  e  $z_1 = 1 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_n = u_{n+1} = y_1$ , e portanto, como antes,  $z_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . ■

Podemos usar este fato para provar o seguinte interessante fato aritmético sobre a seqüência  $(u_n)$ , que pode ser generalizado para as chamadas seqüências de Lucas, as quais são úteis para certos testes de primalidade:

**Teorema:**  $\text{mdc}(u_m, u_n) = u_{\text{mdc}(m,n)}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

**Prova:** Observemos primeiro que  $\text{mdc}(u_n, u_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Isso vale para  $n = 0$  pois  $u_1 = 1$  e, por indução,  $\text{mdc}(u_{n+1}, u_{n+2}) = \text{mdc}(u_{n+1}, u_{n+1} + u_n) = \text{mdc}(u_{n+1}, u_n) = 1$ . Além disso, se  $m = 0, \text{mdc}(u_m, u_n) = \text{mdc}(0, u_n) = u_n = u_{\text{mdc}(m,n)}, \forall n \in \mathbb{N}$ , e se  $m = 1, \text{mdc}(u_m, u_n) = \text{mdc}(1, u_n) = 1 = u_1 = u_{\text{mdc}(m,n)}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Vamos então provar o fato acima por indução em  $m$ . Suponha que a afirmação do enunciado seja válida para todo  $m < k$  (onde  $k \geq 2$  é um inteiro dado) e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Queremos provar que ela vale para  $m = k$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, que  $\text{mdc}(u_k, u_n) = u_{\text{mdc}(k,n)}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que, se  $n < k, \text{mdc}(u_k, u_n) = \text{mdc}(u_n, u_k) = u_{\text{mdc}(n,k)} = u_{\text{mdc}(k,n)}$ , por hipótese de indução. Já se  $n \geq k, u_n = u_{(n-k)+k} = u_{n-k} u_{k-1} + u_{n-k+1} u_k$ , e logo  $\text{mdc}(u_k, u_n) = \text{mdc}(u_k, u_{n-k} u_{k-1} + u_{n-k+1} u_k) = \text{mdc}(u_k, u_{n-k} u_{k-1}) = \text{mdc}(u_k, u_{n-k})$  (pois  $\text{mdc}(u_k, u_{k-1}) = 1$ ) =  $u_{\text{mdc}(k, n-k)} = u_{\text{mdc}(k,n)}$ . ■

**Corolário:** Se  $m \geq 1$  e  $m$  é um divisor de  $n$  então  $u_m$  divide  $u_n$ . Além disso, se  $m \geq 3$  vale a recíproca: se  $u_m$  divide  $u_n$  então  $m$  divide  $n$ .

### 3 – A recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$

Consideremos as seqüências  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais que satisfazem a recorrência  $x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}$ . Suponha que  $x_0 = \alpha + \alpha^{-1}$  para um certo  $\alpha$  (real ou complexo). Então podemos provar por indução que  $x_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . De fato, se vale a fórmula para  $x_n$ , teremos

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2 = (\alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n})^2 - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + 2 + \alpha^{-2^{n+1}} - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + \alpha^{-2^{n+1}}.$$

Se  $|x_0| > 2$ , temos  $x_0 = \alpha + \alpha^{-1}$  para  $\alpha = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 4}}{2} \in \mathbb{R}$ .

Se  $|x_0| \leq 2$ , vale a mesma fórmula para  $\alpha$ , mas nesse caso  $\alpha$  é um número complexo de módulo 1, e pode ser escrito como  $\alpha = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Nesse caso,  $x_n = e^{2^n i\theta} + e^{-2^n i\theta} = (\cos(2^n \theta) + i \sin(2^n \theta)) + (\cos(2^n \theta) - i \sin(2^n \theta)) = 2 \cos(2^n \theta)$ .

Podemos ver isso de outra forma: se  $|x_0| \leq 2$ , escrevemos  $x = 2 \cos \theta$ , com  $\theta \in [0, \pi]$ . Podemos mostrar então por indução que  $x_n = 2 \cos(2^n \theta)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De fato,  $x_{n+1} = x_n^2 - 2 = 4 \cos^2(2^n \theta) - 2 = 2(2 \cos^2(2^n \theta) - 1) = 2 \cos(2^{n+1} \theta)$ , pois  $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Podemos usar esta expressão para obter diversos tipos de comportamento possível para uma tal seqüência  $(x_n)$ . Se  $x_0 = 2 \cos \theta$  e  $\theta/\pi$  é racional e tem representação binária periódica de período  $m$  então  $(x_n) = (2 \cos(2^n \theta))$  é periódica de período  $m$ . Por outro lado, podemos ter  $x_0 = 2 \cos \theta$  onde  $\theta/\pi$  tem representação binária como

0,0100011011000001010011100101110111...

em que todas as seqüências finitas de zeros e uns aparecem em algum lugar (isso acontece para a “maioria” dos valores de  $\theta$ ).

Nesse caso, a seqüência  $(x_n) = (2 \cos(2^n \theta))$  é densa em  $[-2, 2]$ , isto é, qualquer ponto de  $[-2, 2]$  pode ser apromado por elementos de  $(x_n)$ , com erro arbitrariamente pequeno.

No caso em que  $x_0$  é um inteiro, a seqüência  $(x_n)$  pode ter propriedades aritméticas muito interessantes. Em particular, se  $x_0 = 4$  (e logo  $x_n = (2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ ) vale o famoso critério de Lucas-Lehmer para testar a primalidade de números de Mersenne: se  $n \geq 3$  então  $2^n - 1$  é primo se e somente se  $2^n - 1$  é um divisor de  $x_{n-2}$  (por exemplo,  $2^3 - 1 = 7$  é primo e é um divisor de  $x_{3-1} = x_1 = x_0^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$ ).

**Exercício:** Seja  $x_0 \geq 3$  um inteiro ímpar.

- i) Prove que se  $p$  é um número primo então existe no máximo um valor de  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $p$  divide  $x_n$ .
- ii) Prove que se  $p$  é um fator primo de  $x_n$  então  $p > n$ .

*Sugestão:* Considere a seqüência  $x_n \pmod{p}$ .

Esse exercício pode ser generalizado para outras recorrências. Nesse caso particular da recorrência  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$  é possível mostrar um resultado mais forte: se  $p$  é um fator primo de  $x_n$  então  $p \geq 2^{n+2} - 1$  (note que quando  $p = 2^q - 1$  é primo, com  $q \geq 3$  e  $n = q - 2$ , vale a igualdade  $p = 2^{n+2} - 1$  e  $p|x_n$ , pelo critério de Lucas-Lehmer enunciado acima).

#### 4 - Fórmulas gerais para seqüências recorrentes lineares:

Considere a equação

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n = 0, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

em que  $a_0, \dots, a_k$  são constantes, e os valores de  $x_i$  são conhecidos para  $i = 0, \dots, k - 1$ . Supondo que a equação (2) admite uma solução do tipo:  $x_n = \lambda^n$ , em que  $\lambda$  é um parâmetro, e substituindo em (2) temos

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \dots + a_0 \lambda^n = 0.$$

Dividindo por  $\lambda^n$ , obtemos a *equação característica* associada a equação (2)

$$a_1\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0\lambda^0 = 0.$$

Vamos mostrar que se esta equação tem as raízes complexas  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  com multiplicidades  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ , respectivamente, então as soluções de (2) são exatamente as seqüências  $(x_n)$  da forma  $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n$ , onde  $Q_1, \dots, Q_r$  são polinômios com  $\text{grau}(Q_i) < \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  (em particular, se  $\lambda_i$  é uma raiz simples então  $Q_i$  é constante).

Seja  $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$  um polinômio.

**Definição:** Dizemos que uma seqüência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaz a propriedade  $\text{Rec}(P(x))$  se  $a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Não é difícil verificar os seguintes fatos:

- i) Se  $(x_n)$  e  $(y_n)$  satisfazem  $\text{Rec}(P(x))$  e  $c \in \mathbb{C}$  então  $(z_n) = x_n + c y_n$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x))$ .
- ii) Se  $Q(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \dots + b_0$  e  $(x_n)$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x))$  então  $(x_n)$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x)Q(x))$  (isso segue de  $\sum_{j=0}^r b_j (a_k x_{n+j+k} + a_{k-1} x_{n+j+k-1} + \dots + a_0 x_{n+j}) = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ )
- iii)  $(x_n)$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x))$  se e só se  $(y_n) = (x_n/\lambda^n)$  satisfaz  $\text{Rec}(P(\lambda x))$  (substitua  $x_{n+j} = \lambda^{n+j} y_{n+j}$  em  $\sum_{j=0}^k a_j x_{n+j} = 0$ ).
- iv) Se  $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$  então  $(x_n)$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x))$  se e só se  $(s_n)$  satisfaz  $\text{Rec}((x-1)P(x))$  (escreva  $x_{n+j+1} = s_{n+j+1} - s_{n+j}$  e substitua em  $\sum_{j=0}^n a_j x_{n+j+1} = 0$ ).

Por iii), para ver que, para todo polinômio  $Q(x)$  de grau menor que  $m$ ,  $x_n = Q(n)\lambda^n$  satisfaz  $\text{Rec}((x-\lambda)^m)$ , basta ver que  $(y_n) = (Q(n))$  satisfaz  $\text{Rec}((x-1)^m)$ , o que faremos por indução. Isso é claro que  $m = 1$ , e em geral, se  $z_n = y_{n+1} - y_n = Q(n+1) - Q(n)$ , como  $\tilde{Q}(x) = Q(x+1) - Q(x)$  tem grau menor que  $m-1$ ,  $(z_n)$  satisfaz  $\text{Rec}((x-1)^{m-1})$  (por hipótese de indução), e logo, por (iv),  $(Y_n)$  satisfaz  $\text{Rec}((x-1)^m)$ . Essa observação, combinada com ii) e i), mostra que se  $P(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1} (x-\lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x-\lambda_r)^{\alpha_r}$ , e  $\text{grau}(Q_i) < \alpha_i$  para  $1 \leq i \leq r$  então  $x_n = \sum_{i=1}^r Q_i(n)\lambda_i^n$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x))$ .

Para ver que se  $(x_n)$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x))$  então  $x_n$  é da forma acima, usaremos indução novamente.

Supomos  $\lambda_1 \neq 0$  e tomamos  $y_n = x_n/\lambda_1^n$ ,  $z_n = y_{n+1} - y_n$ , para  $n \geq 0$ .

Por iii) e iv),  $z_n$  satisfaz  $\text{Rec}(P(\lambda_1 x)/(x-1))$  e, portanto por hipótese de indução,  $z_n = \tilde{Q}_1(x) + \tilde{Q}_2(x)(\lambda_2/\lambda_1)^n + \dots + \tilde{Q}_r(x)(\lambda_r/\lambda_1)^n$ , onde  $\text{grau}(\tilde{Q}_i) < \alpha_i$  para  $2 \leq i \leq r$  e  $\text{grau}(\tilde{Q}_1) < \alpha_1 - 1$ .

Para terminar a prova, vamos mostrar que se existem polinômios  $P_1, P_2, \dots, P_k$  tais que  $y_{n+1} - y_n = P_1(n) + P_2(n)\beta_2^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$  (onde  $1, \beta_2, \dots, \beta_k$  são complexos distintos e  $P_i \neq 0, \forall i \geq 2$ ) então  $y_n = \tilde{P}_1(n) + \tilde{P}_2(n)\beta_2^n + \dots + \tilde{P}_k(n)\beta_k^n$ , onde  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k$  são polinômios com  $\text{grau } \tilde{P}_i = \text{grau } P_i$  para  $i \geq 2$  e  $\text{grau } \tilde{P}_1 = \text{grau } P_1 + 1$ , por indução na soma dos graus dos polinômios  $P_i$ , onde convencionamos que o grau do polinômio nulo é  $-1$ .

(no nosso caso temos  $\beta_i = \lambda_i/\lambda_1$ , e como  $x_n = \lambda_1^n y_n$  o resultado segue imediatamente).

Para provar essa afirmação observamos inicialmente que, se a soma dos grau de  $P_i$  é  $-1$ , então  $y_{n+1} - y_n = 0, \forall n$ , e logo,  $y_n$  é constante. Em geral, consideramos 2 casos:

- a)  $P_1(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0, c_m \neq 0$ . Nesse caso definimos  $\tilde{y}_n = y_n - \frac{c_m n^{m+1}}{m+1}$ , e temos  $\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = Q_1(n) + P_2(n)\beta_1^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$ , com  $\text{grau}(Q) < m$ . Por hipótese de indução,  $\tilde{y}_n$  (e logo  $y_n$ ) é da forma desejada.
- b)  $P_2(x) = d_s x^s + d_{s-1} x^{s-1} + \dots + d_0, d_s \neq 0$ . Nesse caso, definimos  $\tilde{y}_n = y_n - \frac{d_s n^s \lambda_2^n}{\lambda_2 - 1}$ , e temos  $\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = P_1(n) + Q(n)\beta_2^n + P_3(n)\beta_3^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$ , com  $\text{grau}(Q) < s$ . Por hipótese de indução,  $\tilde{y}_n$  (e logo  $y_n$ ) é da forma desejada. ■

Vimos na primeira parte da demonstração acima que  $(x_n)$  satisfaz  $\text{Rec}(P(x))$ , onde  $P(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$  sempre que  $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n$ , onde  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$  são polinômios com  $\text{grau}(Q_j) < \alpha_j, \forall j \leq r$ . Vamos apresentar um argumento alternativo, motivado por conversas do autor com Bruno Fernandes Cerqueira Leite, para mostrar que todas as seqüências que satisfazem as recorrência são dessa forma.

Cada polinômio  $Q_i(n)$  tem  $\alpha_i$  coeficientes (dos monômios cujos graus são  $0, 1, 2, \dots, \alpha_i - 1$ ). Como o espaço vetorial das seqüências que satisfazem  $\text{Rec}(P(x))$  tem dimensão  $\text{grau}(P(x)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i$ , basta ver que há unicidade na representação de uma seqüência na forma cima. Para isso, devemos mostrar que, se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  são números complexos distintos e  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$  são polinômios tais que  $Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $Q_j \equiv 0, \forall j \leq r$ .

Vamos supor por absurdo que não seja assim. Supomos sem perda de generalidade que, para certos  $s$  e  $t$  com  $1 \leq s \leq t \leq r$ ,  $|\lambda_1| = |\lambda_i| > |\lambda_j|, \forall i \leq t, j > t$ , e  $\text{grau}(Q_1) = \text{grau}(Q_i) > \text{grau}(Q_j)$ , se  $i \leq s < j \leq t$ . Se os polinômios  $Q_j$  não são todos nulos, temos  $Q_1$  não nulo. Seja  $d$  o grau de  $Q_1$ . Se  $|\lambda_j| < |\lambda_1|$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(n)\lambda_j^n}{n^d \lambda_1^n} = 0$ , e se  $|\lambda_i| = |\lambda_1|$  e  $\text{grau}(Q) < d$ , também temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n)\lambda_i^n}{n^d \lambda_1^n} = 0$ . Portanto, se  $Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$  e o coeficiente de  $n^d$  em  $Q_i$  é  $a_i$  para  $i \leq s$ , dividindo por  $n^d \lambda_1^n$  e tomando o limite, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \right) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right) \\ &= a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \\ &= a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right) = a_1, \end{aligned}$$

pois, para  $2 \leq i \leq s$ ,  $\lambda_i/\lambda_1 \neq 1$  é um complexo de módulo 1, donde

$$\left| \frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right| \leq \frac{2}{|(\lambda_i/\lambda_1) - 1|},$$

e logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right) = 0.$$

Entretanto, isso é um absurdo, pois  $\text{grau}(Q_1) = d$ , e logo  $a_1 \neq 0$ .

**Exemplo:**  $x_n = \text{sen}(n\alpha)$  satisfaz uma recorrência linear. De fato,

$$x_{n+1} = \text{sen}(n\alpha + \alpha) = \text{sen}(n\alpha) \cos \alpha + \cos(n\alpha) \text{sen} \alpha \Rightarrow$$

$$x_{n+2} = \text{sen}(n\alpha + 2\alpha) = \text{sen}(n\alpha) \cos 2\alpha + \cos(n\alpha) \text{sen} 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+2} - \frac{\text{sen} 2\alpha}{\text{sen} \alpha} x_{n+1} = (\cos 2\alpha - \frac{\text{sen} 2\alpha}{\text{sen} \alpha} \cos \alpha) x_n, \text{ ou seja,}$$

$x_{n+2} = 2 \cos \alpha \cdot x_{n+1} - x_n$ . Note que  $x_n$  não parece ser da forma geral descrita nesta seção, mas de fato

$$x_n = \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha})^n - \frac{1}{2i}(e^{-i\alpha})^n = \frac{1}{2i}(\cos \alpha + i \text{sen} \alpha)^n - \frac{1}{2i}(\cos \alpha - i \text{sen} \alpha)^n$$

(observe que  $\cos \alpha + i \text{sen} \alpha$  e  $\cos \alpha - i \text{sen} \alpha$  são as raízes de  $x^2 - 2 \cos \alpha \cdot x + 1$ ).

**Observação:** Se  $(x_n)$  satisfaz  $\text{Rec}((x-1)P(x))$ , onde  $P(x) = a_n x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$ , então, se definirmos  $y_n = a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n$ , teremos  $y_{n+1} = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $y_n$  é constante. Assim,  $a_k x_{n+k} + \dots + a_0 x_n$  é um invariante da seqüência  $x_n$ , o que é um fato útil para muitos problemas envolvendo recorrência (veja, por exemplo, os Problemas 2 e 3 abaixo).

Vamos agora ver um problema resolvido em que se usam estimativas assintóticas de seqüências recorrentes para provar um resultado de teoria dos números:

**Problema 1. (Problema 69 da Revista Eureka! nº. 14)** Sejam  $a$  e  $b$  inteiros positivos tais que  $a^n - 1$  divide  $b^n - 1$  para todo inteiro positivo  $n$ .

Prove que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $b = a^k$ .

**Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro-RJ):**

Suponha por absurdo que  $b$  não seja uma potência de  $a$ .

Então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a^k < b < a^{k+1}$ . Consideremos a seqüência  $x_n = \frac{b^n - 1}{a^n - 1} \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Como  $\frac{1}{a^n - 1} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{2n}} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{jn}}$ , temos

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^n}{a^{jn}} - \frac{1}{a^n - 1} = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \dots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n + \frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1}.$$

Note que como  $\frac{b^n}{a^{kn}(a^n-1)} = \frac{(b/a^{k+1})^n}{1-a^{-n}}$  e  $\frac{1}{a^n-1}$  tendem a 0 quando  $n$  cresce, se definimos

$$y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n = \sum_{j=1}^k \left(\frac{b}{a^j}\right)^n,$$

temos que

$$x_n - y_n = \frac{b^n}{a^{kn}(a^n-1)} - \frac{1}{a^n-1}$$

tende a 0 quando  $n$  tende a infinito. Por outro lado, como  $y_n$  é uma soma de  $k$  progressões geométricas de razões  $b/a^j$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $y_n$  satisfaz a equação de recorrência  $c_0 y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + \cdots + c_k y_n = 0$ ,  $\forall n \geq 0$ , onde

$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k = a^{k(k+1)/2} \left(x - \frac{b}{a}\right) \left(x - \frac{b}{a^2}\right) \cdots \left(x - \frac{b}{a^k}\right)$$

Note que todos os  $c_i$  são inteiros. Note também que

$$c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \cdots + c_k x_n = c_0 (x_{n+k} - y_{n+k}) + c_1 (x_{n+k-1} - y_{n+k-1}) + \cdots + c_k (x_n - y_n)$$

tende a 0 quando  $n$  tende a infinito, pois  $x_{n+j} - y_{n+j}$  tende a 0 para todo  $j$  com  $0 \leq j \leq k$  (e  $k$  está fixo). Como os  $c_i$  e os  $x_n$  são todos inteiros, isso mostra que  $c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \cdots + c_k x_n = 0$  para todo  $n$  grande.

Agora, como

$$x_n = y_n + \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \frac{b^n}{a^{(k+1)n}(a^n-1)} - \frac{1}{a^n-1},$$

temos

$$c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \cdots + c_k x_n = \sum_{j=0}^k c_j \left( \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} + z_{n+k-j} \right),$$

onde

$$z_m = \frac{b^m}{a^{(k+1)m}(a^m-1)} - \frac{1}{a^m-1}.$$

Note que

$$\sum_{j=0}^k c_j \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} = P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n,$$

onde

$$P(x) = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k = a^{k(k+1)/2} \left(x - \frac{b}{a}\right) \left(x - \frac{b}{a^2}\right) \cdots \left(x - \frac{b}{a^k}\right),$$

donde  $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$ . Por outro lado, para todo  $j$  com  $0 \leq j \leq k$ ,  $z_{n+k-j} / \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n = \frac{(b/a^{k+1})^{k-j}}{a^{n+k-j}-1} - \frac{1}{(a^{k-j}-a^{-n})(b/a^k)^n}$ , que tende a 0 quando  $n$  tende a infinito, donde  $w_n = \left(\sum_{j=0}^k c_j x_{n+k-j}\right) / \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n$  tende a  $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$ , o que é um absurdo, pois, como vimos antes,  $w_n$  é igual a 0 para todo  $n$  grande.

Veremos a seguir dois problemas resolvidos que envolvem seqüências recorrentes, que foram propostos na OBM e na IMO, respectivamente:

**Problema 2. (Problema 5 da 13ª Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Sênior - 1991)** Seja  $Q_0$  o quadrado de vértices  $P_0 = (1, 0)$ ,  $P_1 = (1, 1)$ ,  $P_2 = (0, 1)$  e  $P_3 = (0, 0)$ . Seja  $A_0$  o interior desse quadrado. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+4}$  é o ponto médio do segmento  $\overline{P_n P_{n+1}}$ ,  $Q_n$  é o quadrilátero de vértices  $P_n, P_{n+1}, P_{n+2}$  e  $P_{n+3}$  e  $A_n$  é o interior de  $Q_n$ . Encontre a interseção de todos os  $A_n$ .

**Solução 1:**

Temos  $P_{n+4} = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}$ . Portanto,  $P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} + 2P_{n+4} = P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3}$ , logo  $P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = (3, 4)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  (note que  $2x^4 - x - 1 = (x - 1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$ ), donde, como  $A_n$  é sempre convexo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right) &= \frac{P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3}}{7} = \\ &= \frac{3}{7} \left(\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}P_{n+1}\right) + \frac{4}{7} \left(\frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2}\right) \end{aligned}$$

sempre pertence ao interior de  $A_n$ . Se mostrarmos que o diâmetro (maior distância entre 2 pontos) de  $A_n$  tende a 0, teremos mostrado que a interseção de todos os  $A_n$  é  $\left\{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right\}$ .

Para isso, note que o diâmetro de  $ABCD$  é  $\text{diam}(ABCD) = \max\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}\}$ ,

e

$$\begin{aligned} P_{n+4} &= \frac{P_n + P_{n+1}}{2}, \quad P_{n+5} = \frac{P_{n+1} + P_{n+2}}{2}, \quad P_{n+6} = \frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2} \\ P_{n+7} &= \frac{P_{n+3} + P_{n+4}}{2} = \frac{2P_{n+3} + P_n + P_{n+1}}{4} \end{aligned}$$

e

$$P_{n+8} = \frac{P_{n+4} + P_{n+5}}{2} = \frac{P_n + 2P_{n+1} + P_{n+2}}{4}.$$

Assim,

$$\overline{P_{n+5}P_{n+6}} = |P_{n+6} - P_{n+5}| = \left| \frac{P_{n+3} - P_{n+1}}{2} \right| = \frac{1}{2} \overline{P_{n+1}P_{n+3}},$$

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+5}P_{n+7}} &= |P_{n+7} - P_{n+5}| = \frac{2P_{n+3} + P_n - P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |P_{n+3} - P_{n+2}| + \frac{1}{4} |P_n - P_{n+1}| = \frac{\overline{P_{n+2}P_{n+3}}}{4} + \frac{\overline{P_nP_{n+1}}}{2}, \end{aligned}$$

$$\overline{P_{n+5}P_{n+8}} = |P_{n+8} - P_{n+5}| = \left| \frac{P_n - P_{n+2}}{4} \right| = \frac{\overline{P_nP_{n+2}}}{4},$$

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+6}P_{n+7}} &= |P_{n+7} - P_{n+6}| = \left| \frac{P_n + P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4} \right| \leq \\ &\leq \frac{|P_n - P_{n+2}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+2}|}{4} = \frac{1}{4} \overline{P_nP_{n+2}} + \frac{1}{4} \overline{P_{n+1}P_{n+2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+6}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+6}| = \left| \frac{P_n + 2P_{n+1} - P_{n+2} - 2P_{n+3}}{4} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |P_{n+1} - P_{n+3}| + \frac{1}{4} |P_n - P_{n+2}| = \frac{1}{2} \overline{P_{n+1}P_{n+3}} + \frac{1}{4} \overline{P_nP_{n+2}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+7}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+7}| = \left| \frac{P_{n+2} + P_{n+1} - 2P_{n+3}}{4} \right| \leq \\ &\leq \frac{|P_{n+2} - P_{n+3}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+3}|}{4} = \frac{1}{4} \overline{P_{n+2}P_{n+3}} + \frac{1}{4} \overline{P_{n+1}P_{n+3}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\text{diam}(P_{n+5}P_{n+6}P_{n+7}P_{n+8}) \leq \frac{3}{4} \text{diam}(P_nP_{n+1}P_{n+2}P_{n+3})$ , donde

$$\text{diam}(P_{5k}P_{5k+1}P_{5k+2}P_{5k+3}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \text{diam}(P_0P_1P_2P_3) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k,$$

que tende a 0, o que implica o nosso resultado.

## Solução 2:

Podemos escrever  $P_n = Q_0 + Q_1\alpha^n + Q_2\beta^n + Q_3\gamma^n$ , onde 1,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as raízes de  $x^4 - \left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$ , ou seja,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são raízes de  $2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$  (pois

$(x - 1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 2x^4 - x - 1$ . Temos  $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ . Como  $P(0) = 1$ ,  $P(-1) = -1$  e  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$  podemos supor que  $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ , logo  $\beta\gamma = -1/2\alpha < 1$  e  $\beta + \gamma = -1 - \alpha \in (-1, 0)$ , donde  $(\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma = 1 + 2\alpha + \alpha^2 + \frac{2}{\alpha} < 0$  pois  $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$  e  $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha^2 < 1$ . Assim,  $(\beta - \gamma)^2 < 0$ , donde  $\beta$  e  $\gamma$  são complexos conjugados, e  $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{\beta\gamma} < 1$ . Portanto,  $P_n$  tende a  $Q_0$  quando  $n$  cresce, e logo a interseção de todos os  $A_n$  deve ser  $Q_0$ .

Para calcular  $Q_0$ , observe que:

$$\begin{cases} Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_0 \\ Q_0 + Q_1\alpha + Q_2\beta + Q_3\gamma = P_1 \\ Q_0 + Q_1\alpha^2 + Q_2\beta^2 + Q_3\gamma^2 = P_2 \\ Q_1 + Q_1\alpha^3 + Q_2\beta^3 + Q_3\gamma^3 = P_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 7Q_0 + Q_1(1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3) + Q_2(1 + 2\beta + 2\beta^2 + 2\beta^3) + Q_3(1 + 2\gamma + 2\gamma^2 + 2\gamma^3) \\ &= P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 \Rightarrow 7Q_0 = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 \text{ (pois } \alpha, \beta \text{ e } \gamma \text{ são raízes de} \\ &2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \Rightarrow Q_0 = \frac{P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3}{7} = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right). \end{aligned}$$

**Problema 3. (Problema 3 da 41ª Olimpíada Internacional de Matemática, realizada em 2000, na Coréia do Sul)** Seja  $n \geq 2$  um inteiro. Existem  $n$  pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto. Para um dado número real positivo  $\lambda$ , define-se um *salto* da seguinte maneira:

- Escolhem-se duas pulgas quaisquer nos pontos  $A$  e  $B$ , com o ponto  $A$  à esquerda do ponto  $B$ ;
- A pulga que está em  $A$  salta até o ponto  $C$  da reta, à direita de  $B$ , tal que  $\frac{BC}{AB} = \lambda$ .

Determine todos os valores de  $\lambda$  para os quais, dado qualquer ponto  $M$  na reta e quaisquer posições iniciais das  $n$  pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de  $M$ .

### Solução:

A resposta é: para  $\ell \geq \frac{1}{(n-1)}$ .

Devemos demonstrar duas coisas:

- a) que, para  $\ell \geq \frac{1}{(n-1)}$ , existe uma seqüência infinita de movimentos que vai levando as pulgas cada vez mais para a direita, ultrapassando qualquer ponto prefixado  $M$ ;
- b) que, para  $\ell < \frac{1}{(n-1)}$  e para qualquer posição inicial das pulgas, existe um ponto  $M$  tal que as pulgas em um número finito de movimentos jamais alcançam ou ultrapassam  $M$ .

Começaremos pelo item b). Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  as posições iniciais das pulgas, com  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , de tal forma que  $x_n$  é a posição da pulga mais à direita. Seja

$$P = \left( \frac{1}{1 - (n-1)\ell} \right) \cdot (x_n - \ell \cdot x_1 - \ell \cdot x_2 - \dots - \ell \cdot x_{n-1}).$$

O ponto  $P$  claramente está à direita de todas as pulgas.

Afirmamos que, se após alguns movimentos as novas posições são  $x'_1, \dots, x'_n$  e definimos

$$P' = \left( \frac{1}{1 - (n-1)\ell} \right) \cdot (x'_n - \ell \cdot x'_1 - \ell \cdot x'_2 - \dots - \ell \cdot x'_{n-1}),$$

então  $P' \leq P$ , o que conclui a demonstração, pois isso mostra que as pulgas nunca passarão do ponto  $P$ .

Para provar esta afirmação, basta considerar o que ocorre após um movimento.

Se a pulga que estava em  $x_i$  pula sobre a pulga que estava em  $x_n$  então  $x'_n - x_n = \ell \cdot (x_n - x_i)$  e  $x'_n - \ell \cdot x_n = x_n - \ell \cdot x_i$  e  $P' = P$ .

Vamos ver que qualquer outro caso é ainda mais favorável. Suponhamos que a pulga que estava em  $x_i$  pula sobre a pulga que estava em  $x_j$ . Se a pulga que pulou continua atrás de  $x_n$ , temos  $x'_n = x_n$  e  $x'_1 + \dots + x'_{n-1} > x_1 + \dots + x_{n-1}$ , donde  $P' < P$ . Se ela passa de  $x_n$ , teremos  $x'_n = x_j + \ell(x_j - x_i) \Rightarrow x'_n - \ell x_n < x'_n - \ell x_j = x_j - \ell x_i < x_n - \ell x_i$ , donde novamente temos  $P' < P$ .

Vamos agora ao item a): Seja  $P = x_n - \ell(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$  se, em cada movimento, a pulga mais à esquerda pula sobre a pulga mais à direita, temos  $x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1) \Rightarrow x'_n - \ell x_n = x_n - \ell x_1$ . Assim, se as novas posições são  $x'_1 = x_2, \dots, x'_{n-1} = x_n$  e  $x'_n$ , e  $P' = x'_n - \ell(x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_{n-1})$ , temos  $P' = P$ , donde  $P$  é uma constante. Podemos supor sem perda de generalidade que  $P$  é positivo (escolhendo a origem, por exemplo, em  $\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$ ; note que então teremos sempre  $\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq 0$ ). Temos então

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) = x_n - \frac{1}{n-1} (x_1 + \cdots + x_{n-1}) \geq x_n - \ell(x_1 + \cdots + x_{n-1}) = P \Rightarrow$$

$$x_n - x_1 \geq \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) \geq P \Rightarrow x'_n - x_n = \ell(x_n - x_1) \geq \frac{P}{n-1},$$

donde o ponto mais à direita caminha pelo menos  $\frac{P}{n-1}$  para a direita a cada passo, logo tende a infinito. Como o ponto mais a direita após  $n-1$  passos será o ponto mais à esquerda, todos os pontos tendem a infinito (para a direita).

**Nota:** Na estratégia descrita na solução do item a), o ponto mais à esquerda se torna sempre o mais à direita, donde podemos definir  $x_{n+1} = x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1)$ , e teríamos simplesmente  $x'_j = x_{j+1}, \forall j$ . Reduzimos então a análise dessa estratégia ao estudo da recorrência linear  $x_{n+1} = (1 + \ell)x_n - \ell x_1$ , cujo polinômio característico é  $P(x) = x^{n+1} - (1 + \ell)x^n + \ell$ , do qual 1 é raiz, donde, como  $\frac{P(x)}{x-1} = x^n - \ell(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ , a expressão  $y_m = x_m - \ell(x_{m-1} + x_{m-2} + \cdots + x_{m-n+1} + x_{m-n})$  é um invariante da recorrência, isto é,  $y_{m+1} = y_m \forall m$ , donde  $y_m$  é constante. Daí vem nossa fórmula para  $P$ .

Concluimos com o problema a seguir, que é uma interessante aplicação de seqüências recorrentes à trigonometria.

**Problema 4.** Prove que os ângulos agudos de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 são irracionais quando expressos em graus (i.e., são múltiplos irracionais de  $\pi$ ).

**Solução:**

Considere a seqüência  $x_n = \frac{(2+i)^n - (2-i)^n}{2i}$ . Temos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  e, como  $2+i$  e  $2-i$  são raízes da equação  $x^2 - 4x + 5 = 0$ ,  $(x_n)$  satisfaz a recorrência  $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 5x_n$ . Daí segue que  $x_{n+2}$  é congruente a  $-x_{n+1}$  módulo 5 para todo  $n \geq 1$ , donde  $x_n$  é congruente a  $(-1)^{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ , e logo  $x_n$  não é múltiplo de 5 para nenhum  $n \geq 1$ . Em particular,  $x_n \neq 0$ , para todo  $n \geq 1$ . Assim,  $1 \neq \frac{(2+i)^n}{(2-i)^n} = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n$ , para todo  $n \geq 1$ . Se  $\theta = \cos^{-1}(3/5)$ ,  $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = e^{i\theta}$ , donde  $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n = e^{in\theta} \neq 1$ , para todo  $n \geq 1$ , o que implica que  $\theta/\pi$  é irracional (de fato, se  $\theta/\pi = p/q$ , teríamos  $e^{2iq\theta} = e^{2ip\pi} = 1$ ).

**Nota:** Para uma versão mais geral deste problema, veja o Problema 88 proposto na Eureka! 17, p. 60 por Carlos Gustavo Moreira e José Paulo Carneiro, e a solução de seus autores publicada na Eureka! 20, pp. 52-53.