Alguns problemas de teoria dos números

IMPA
Carlos Gustavo Moreira

1) (OBM-1991). Prove que existem infinitos números da forma $1999\ldots991$ que são múltiplos de 1991.

2) (IMO-1988). Prove que se a e b são ineiros positivos e $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um inteiro então $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um quadrado perfeito.

3) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os 2007 últimos dígitos de 2^n pertencem a $\{1, 2\}$.

4) (IMO-1989). Prove que, para todo inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos, nenhum dos quais é potência de primo.

5) (IMO-1990). Determine todos os inteiros positivos n tais que $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ é inteiro.

6) Prove que existem infinitos primos da forma $4k+1$.

7) (BANCO-IMO-2000). Determine todas as triplas (a, m, n) de inteiros positivos tais que $a^m + 1 \mid (a+1)^n$.

8) Dizemos que um inteiro positivo m é uma potência se $m = a^b$, com $a, b \geq 2$.

Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um conjunto A formado por n inteiros positivos tal que, para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, a soma dos elementos de B é uma potência.

9) (IMO-2003). Prove que, para todo primo p, existe um primo q tal que $n^p - p$ não é divisível por q, para todo inteiro positivo n.

10) (IMO-2007). Prove que se a e b são inteiros positivos tais que $4ab - 1 \mid (4a^2-1)^2$ então $a = b$.