10 PROBLEMAS - BRASIL

Carlos Gustavo T. de A. Moreira

PROBLEMA 1: Em que situações podemos trocar as posições dos ponteiros de um relógio (que tem ponteiros das horas e dos minutos) e continuar obtendo uma hora possível? Mostre que esse é um fenômeno periódico e calcule seu período.

PROBLEMA 2: Seja Q_0 o quadrado de vértices $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (0,1)$ e $P_3 = (0,0)$. Seja A_0 o interior desse quadrado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, P_{n+4} é o ponto médio do segmento $\overline{P_nP_{n+1}}$, Q_n é o quadrilátero de vértices P_n, P_{n+1}, P_{n+2} e P_{n+3} e A_n é o interior de Q_n. Encontre a interseção de todos os A_n.

PROBLEMA 3: Sejam $a > 0$ e $P_1P_2P_3P_4P_5$ uma poligonal aberta contida entre a reta $\overline{P_1P_5}$ e a paralela a ela passando por P_3. Prove que existem pontos P_6 e P_7 no plano, com $\overline{P_5P_6} = a$, de modo que é possível ladrilhar o plano com infinitos ladrilhos congruentes ao heptágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$.

PROBLEMA 4: Considere um torneio de xadrez envolvendo brasileiros e argentinos em que cada jogador joga contra cada um dos outros exatamente uma vez. Ao final do torneio, cada jogador obteve metade dos pontos que conquistou jogando contra brasileiros e metade jogando contra argentinos. Prove que o número total de jogadores do torneio é um quadrado perfeito.

Obs.: Cada vitória vale 1 ponto, empate vale 1/2 ponto e derrota 0 ponto.

PROBLEMA 5: a) Prove que existe uma única seqüência $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ com $a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para todo k e $a_0 = 6$ tal que, para cada inteiro positivo n, o número $x_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot 10^j = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{n-1}a_{n-1}$ é tal que $x_n^2 - x_n$ é múltiplo de 10^n.

b) Prove que a seqüência (a_k) acima não é periódica.

PROBLEMA 6: Sejam (x_n) a seqüência definida por $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2^{x_n}$, $\forall\, n \geq 1$ e (y_n) a seqüência definida por $y_1 = 2001$, $y_{n+1} = 2001^{(y_n^{2001})}$, $\forall\, n \geq 1$. Prove que existe c natural tal que $y_n \leq x_{n+c}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e determine o menor c com essa propriedade.

PROBLEMA 7: Prove que todo número natural $n \leq 2^{1000000}$ pode ser obtido a partir de 1 fazendo menos de 1100000 somas; mais precisamente, existe uma seqüência finita de naturais $x_0, x_1, \ldots, x_k$ com $k < 1100000$, $x_0 = 1$, $x_k = n$ tal que, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existem r, s com $0 \leq r < i$, $0 \leq s < i$ e $x_i = x_r + x_s$.

PROBLEMA 8: Seja f uma função do plano no plano que satisfaz $d(P,Q) = 1 \Rightarrow d(f(P), f(Q)) = 1$ para todos os pontos P e Q do plano. Mostre que $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$ para todos os pontos P e Q do plano.

Obs.: $d(X,Y)$ denota a distância entre X e Y.

PROBLEMA 9: Dois matemáticos, perdidos em Berlim, chegam à esquina da rua Barbarossa com a rua Martin Luther, e precisa chegar à esquina da rua Meininger com a rua Martin Luther. Infelizmente eles não sabem para que lado fica a rua Meininger, nem a que distância ela está, logo são obrigados a ir e voltar ao longo da rua Martin Luther até chegarem à esquina desejada.

Qual é o menor valor para um número positivo K tal que eles podem ter certeza de que, se há N quarteirões (ou quadras) entre as ruas Barbarossa e Meininger então eles conseguem, andando sempre juntos, chegar ao destino percorrendo no máximo KN quarteirões (ou quadras)?

PROBLEMA 10: Determine todas as triplas (a, m, n) de inteiros positivos tais que $a^m + 1$ divide $(a+1)^n$.

Notas: (sobre as origens dos problemas)

O Problema 1 apareceu originalmente em meu artigo "Ainda os ponteiros do relógio", na Revista do Professor de Matemática nº 15 (1989), p. 35–36.

O Problema 2 foi proposto na 13ª Olimpíada Brasileira de Matemática, em 1991.

O Problema 3 é uma variação de um problema que o Prof. Eduardo Wagner me propôs durante a VI Olimpíada Iberoamericana de Matemática, em 1991 na Argentina, onde o Wagner foi líder e eu fui vice-líder do Brasil. Acho que eu ganhei um gim-tônica do Wagner por tê-lo resolvido na época. Se não me engano o problema foi proposto inicialmente pelo professor russo Valery Vavilov.

O Problema 4 caiu na 14ª OBM, em 1992. Ele me foi comunicado originalmente pelo Marco Antônio Meggiolaro, e acho que o problema tem origem russa.

O Problema 5 é uma extensão de um problema que caiu na IV Olimpíada do Cone Sul, em Petrópolis, 1993.

O Problema 6 foi proposto na Eureka 10 (2001).

O Problema 7 caiu na IX Olimpíada Iberoamericana, em Fortaleza, 1994.

O Problema 8 caiu na 19ª OBM, em 1997. Eu o tinha visto proposto e escrevi uma solução dele no livro de problemas do Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

O Problema 9 é baseado em fatos reais, ocorridos comigo e com o prof. Nicolau Saldanha durante o Congresso Internacional de Matemática de 1998, em Berlim. Ele caiu na 20ª OBM, em 1998 (na verdade o enunciado original foi ligeiramente alterado aqui para evitar uma dupla interpretação que ocorreu na prova).

O Problema 10 fez parte do banco da XLI IMO, realizada na Coréia do Sul, em 2000. Este problema foi baseado numa pergunta de Andrés Koropecki, que foi meu aluno num curso de Introdução à Teoria dos Números, no IMPA.

PROBLEMAS SUPLEMENTARES - BRASIL

PROBLEMA 11: Sejam n um inteiro positivo e $A \subset \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ um conjunto de n classes de congruência módulo n^2. Prove que existe $B \subset \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$, também com n elementos, tal que

$$A + B = \{x + y | x \in A,\ y \in B\} \subset \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z} \quad \text{tem pelo menos } n^2/2 \text{ elementos.}$$

PROBLEMA 12: Uma prova de múltipla escolha com n questões é feita por k alunos. Uma resposta correta na i-ésima questão vale p_i pontos, onde p_i é um inteiro positivo, para $1 \leq i \leq n$. A nota de cada aluno é a soma dos pontos correspondentes às questões que ele acertou. Após a realização a prova, foi observado que, mudando os pesos p_i, as notas dos alunos podem estar em qualquer uma das $k!$ possíveis ordens (em que não há duas notas iguais). Dado n, qual é o maior valor possível de k ?

PROBLEMA 13: Sejam a e b inteiros maiores que 1 tais que $a^n - 1$ divide $b^n - 1$ para todo inteiro positivo n. Prove que $b = a^k$ para algum inteiro positivo k.

PROBLEMA 14: Prove que, para todo inteiro positivo n e para todo inteiro não-nulo a, o polinômio $x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + ax - 1$ é irredutível, i.e., não pode ser escrito como o produto de dois polinômios não-constantes com coeficientes inteiros.

PROBLEMA 15: Sejam ℓ a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$, C_1 o círculo centrado em $(0, \frac{1}{2})$ de raio $\frac{1}{2}$ e C_2 o círculo centrado em $(1, \frac{1}{2})$ de raio $\frac{1}{2}$.

Seja F o conjunto dos círculos em $\mathbb{R}^2$ com as seguintes propriedades:

i) $\{C_1, C_2\} \subset F$

ii) Se C e C' pertencem a F, são tangentes entre si e tangentes a ℓ então o círculo $\tilde{C}$ tangente aos dois círculos C e C' e à reta ℓ pertence a F.

ii) Se $\tilde{F}$ é um conjunto de círculos satisfazendo as propriedades i) e ii) acima então $F \subset \tilde{F}$.

Determine o conjunto dos pontos de tangência dos círculos $C \in F$ com a reta ℓ.

PROBLEMA 16: Seja $n \geq 2$ um inteiro. Existem n pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto. Para um dado número real positivo λ, define-se um *salto* da seguinte maneira:

- Escolhem-se duas pulgas quaisquer nos pontos A e B, com o ponto A à esquerda do ponto B;
- A pulga que está em A salta até o ponto C da reta, à direita de B, tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determine todos os valores de λ para os quais, dado qualquer ponto M na reta e quaisquer posições iniciais das n pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de M.

PROBLEMA 17: Seja α a maior raiz real da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Prove que $\lfloor \alpha^{2004} \rfloor$ é múltiplo de 17.

Obs: Dado um número real x, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

PROBLEMA 18: Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um conjunto A de inteiros positivos com n elementos tal que a soma dos elementos de qualquer subconjunto não-vazio de A é sempre uma potência não-trivial.

Obs.: Dizemos que um inteiro positivo é uma potência não-trivial se ele pode ser escrito como a^b, com a e b inteiros maiores que 1.

Notas: (sobre as origens dos problemas)

O Problema 11 fez parte do banco da 40ª IMO, realizada em 1999, na Romênia.

O Problema 12 caiu na 27ª Olimpíada Russa de Matemática, em 2001.

O Problema 13 é o Problema 10674 do American Mathematical Monthly (vol. 105, 1998, p. 560), proposto por Marius Cavachi, de Constanţa, Romênia.

O Problema 14 caiu na Olimpíada Romena de Matemática de 1992.

O Problema 15 é um problema clássico. Os círculos do conjunto F são conhecidos como *Círculos de Ford*, e foram introduzidos no artigo "Fractions", de L.R. Ford, publicado no American Mathematical Monthly vol. 45 (1938), p. 586–601.

O Problema 16 caiu na 41ª IMO, realizada em 2000, na Coréia do Sul.

O Problema 17 foi adaptado do banco da 29ª IMO, realizada em 1988, na Austrália.

O Problema 18 foi adaptado do banco da 33ª IMO, realizada em 1992, na Rússia.

SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS - BRASIL

SOLUÇÃO 1: Sejam α e β os ângulos que os ponteiros das horas e dos minutos, respectivamente, fazem com o eixo das 12 horas às h horas e m minutos. Temos $\beta = 6m$ e $\alpha = 30h + m/2$. Note que h é um inteiro com $0 \leq h < 12$ e m é um real com $0 \leq m < 60$. Temos então $\beta = 12\left(\alpha - 30\left\lfloor\frac{\alpha}{30}\right\rfloor\right)$. Se pudermos trocar as posições dos ponteiros, devemos ter $\alpha = 12\left(\beta - 30\left\lfloor\frac{\beta}{30}\right\rfloor\right)$, ou seja, $30h + \frac{m}{2} = 12\left(6m - 30\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor\right)$, ou seja, $m = \frac{60\left(h+12\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor\right)}{143}$. Sendo $k = h + 12\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor$, temos então $m = \frac{60k}{143}$ e $h = k - 12\left\lfloor\frac{m}{5}\right\rfloor = k - 12\left\lfloor\frac{12k}{143}\right\rfloor$. Como $0 \leq m < 60$, devemos ter $0 \leq k < 143$. Note que, nesse caso, $\left\lfloor\frac{12k}{143}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{k}{12}\right\rfloor$, pois $\frac{k}{12} \leq \frac{12k}{143}$ e $\frac{12k}{143} - \frac{k}{12} = \frac{k}{12\cdot 143} < \frac{1}{12}$ quando $0 \leq k < 143$. Assim, temos as 143 soluções: tal genômeno ocorre às $k - 12\left\lfloor\frac{k}{12}\right\rfloor = k - 12\left\lfloor\frac{12k}{143}\right\rfloor$ horas e $\frac{60k}{143}$ minutos, para cada inteiro k com $0 \leq k < 143$ (note que $0 \leq k - 12\left\lfloor\frac{k}{12}\right\rfloor < 12$ para todo inteiro k).

Para ver que esse é um fenômeno periódico, note que se $0 \leq k \leq 130$, o evento associado a k ocorre às $k - 12\left\lfloor\frac{k}{12}\right\rfloor$ horas e $\frac{60k}{143}$ minutos, enquanto o evento associado a $k + 12$ ocorre às $k + 12 - 12\left\lfloor\frac{k+12}{12}\right\rfloor = k + 12 - 12\left(\left\lfloor\frac{k}{12}\right\rfloor + 1\right) = k - 12\left\lfloor\frac{k}{12}\right\rfloor$ horas e $\frac{60(k+12)}{143}$ minutos, ou seja, $\frac{60\cdot 12}{143} = \frac{720}{143}$ minutos depois.

Por outro lado, se $0 \leq h \leq 10$ então o evento associado a $k = h + 12 \cdot 11 = h + 132$ ocorre às $h + 132 - 12\left\lfloor\frac{h+132}{12}\right\rfloor = h + 132 - 12\left\lfloor\frac{h}{12} + 11\right\rfloor = h + 132 - 12\cdot = h$ horas e $\frac{60(h+132)}{143}$ minutos, enquanto o evento associado a $k = h+1$ ocorre às $h + 1 - \left\lfloor\frac{h+1}{12}\right\rfloor = h + 1$ horas e $\frac{60(h+1)}{143}$ minutos, ou seja, $60 - \frac{60(h+132)}{143} + \frac{60(h+1)}{143} = \frac{60\cdot 12}{143} = \frac{720}{143}$ minutos depois. Assim, o fenômeno é periódico com período $\frac{720}{143}$ minutos $= 5$ minutos $\frac{300}{143}$ segundos $= 5$ minutos $2{,}097902097902\ldots$ segundos, associado à seguinte seqüência de valores de k: $0, 12, 24, \ldots, 132, 1, 13, 25, \ldots, 133, \ldots, 10, 22, 34, \ldots, 142, 11, 23, 35, \ldots, 131$ (note que o evento associado a $k = 131$ ocorre às 11 horas e $\frac{60\cdot 131}{143} = 60 - \frac{60\cdot 12}{143}$ minutos, isto é, $\frac{720}{143}$ minutos antes do relógio marcar novamente 0 horas 0 minutos, o evento associado a $k = 0$).

Obs. 1: Os ponteiros se superpõem às h horas e $\frac{60h}{11}$ minutos, para $0 \leq h \leq 10$. Esses casos correspondem a tomar $k = 13h$ em nossa expressão das soluções.

Obs. 2: Podemos mostrar de outro modo que o fenômeno é periódico: de $m = \frac{60k}{143}$, segue que $x = h + \frac{m}{60} = h + \frac{k}{143}$ (x marca o tempo, em horas, às h horas e m minutos). Por outro lado, de $30h + \frac{m}{2} = 12(6m - 30\lfloor \frac{m}{5} \rfloor)$ segue que $30x = 360(12\{x\} - \lfloor 12\{x\} \rfloor)$ onde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = \frac{m}{60}$, onde $x = 12\{12\{x\}\} = 12(12\{x\} - \lfloor 12\{x\} \rfloor)$. Como $143x$ é inteiro, segue que $143\{x\}$ e $p = 143\{12\{x\}\}$ são também inteiros, donde $x = 12p143$. Como $0 \leq x < 12$, temos $0 \leq p \leq 142$, e como o fenômeno ocorre exatamente 143 vezes, ele ocorre às $\frac{12p}{143}$ horas para cada inteiro p com $0 \leq p \leq 142$, e logo é um fenômeno periódico de período $\frac{12}{143}$ horas $= \frac{720}{143}$ minutos.

SOLUÇÃO 2:

Primeira solução:

Temos $P_{n+4} = \dfrac{P_n + P_{n+1}}{2}$. Portanto, $P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} + 2P_{n+4} = P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3}$, logo $P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = (3, 4)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde, como A_n é sempre convexo,

$$\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right) = \frac{P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3}}{7} =$$
$$= \frac{3}{7}\left(\frac{1}{3} P_n + \frac{2}{3} P_{n+1}\right) + \frac{4}{7}\left(\frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2}\right)$$

sempre pertence ao interior de A_n. Se mostrarmos que o diâmetro (maior distância entre 2 pontos) de A_n tende a 0, teremos mostrado que a interseção de todos os A_n é $\left\{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right\}$.

Para isso, note que o diâmetro de $ABCD$ é $\operatorname{diam}(ABCD) = \max\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}\}$, e

$$P_{n+4} = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}, \quad P_{n+5} = \frac{P_{n+1} + P_{n+2}}{2}, \quad P_{n+6} = \frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2}$$

$$P_{n+7} = \frac{P_{n+3} + P_{n+4}}{2} = \frac{2P_{n+3} + P_n + P_{n+1}}{4}$$

e

$$P_{n+8} = \frac{P_{n+4} + P_{n+5}}{2} = \frac{P_n + 2P_{n+1} + P_{n+2}}{4}.$$

Assim,

$$\overline{P_{n+5}P_{n+6}} = |P_{n+6} - P_{n+5}| = \left|\frac{P_{n+3} - P_{n+1}}{2}\right| = \frac{1}{2}\,\overline{P_{n+1}P_{n+3}},$$

$$\overline{P_{n+5}P_{n+7}} = |P_{n+7} - P_{n+5}| = \frac{2P_{n+3} + P_n - P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\,|P_{n+3} - P_{n+2}| + \frac{1}{4}\,|P_n - P_{n+1}| = \frac{\overline{P_{n+2}P_{n+3}}}{4} + \frac{\overline{P_nP_{n+1}}}{2},$$

$$\overline{P_{n+5}P_{n+8}} = |P_{n+8} - P_{n+5}| = \left|\frac{P_n - P_{n+2}}{4}\right| = \frac{\overline{P_nP_{n+2}}}{4},$$
$$\overline{P_{n+6}P_{n+7}} = |P_{n+7} - P_{n+6}| = \left|\frac{P_n + P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|P_n - P_{n+2}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+2}|}{4} = \frac{1}{4}\,\overline{P_nP_{n+2}} + \frac{1}{4}\,\overline{P_{n+1}P_{n+2}},$$
$$\overline{P_{n+6}P_{n+8}} = |P_{n+8} - P_{n+6}| = \left|\frac{P_n + 2P_{n+1} - P_{n+2} - 2P_{n+3}}{4}\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\,|P_{n+1} - P_{n+3}| + \frac{1}{4}\,|P_n - P_{n+2}| = \frac{1}{2}\,\overline{P_{n+1}P_{n+3}} + \frac{1}{4}\,\overline{P_nP_{n+2}},$$

e

$$\overline{P_{n+7}P_{n+8}} = |P_{n+8} - P_{n+7}| = \left|\frac{P_{n+2} + P_{n+1} - 2P_{n+3}}{4}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|P_{n+2} - P_{n+3}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+3}|}{4} = \frac{1}{4}\,\overline{P_{n+2}P_{n+3}} + \frac{1}{4}\,\overline{P_{n+1}P_{n+3}}.$$

Portanto, $\operatorname{diam}(P_{n+5}P_{n+6}P_{n+7}P_{n+8}) \leq \frac{3}{4}\operatorname{diam}(P_nP_{n+1}P_{n+2}P_{n+3})$, donde

$$\operatorname{diam}(P_{5k}P_{5k+1}P_{5k+2}P_{5k+3}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \operatorname{diam}(P_0P_1P_2P_3) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k,$$

que tende a 0, o que implica o nosso resultado.

Segunda solução:

Podemos escrever $P_n = Q_0 + Q_1\alpha^n + Q_2\beta^n + Q_3\gamma^n$, onde 1, α, β e γ são as raízes de $x^4 - \left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$, ou seja, α, β e γ são raízes de

$2x^3+2x^2+2x+1=0$ (pois $(x-1)(2x^3+2x^2+2x+1)=2x^4-x-1$). Temos $P(x)=2x^3+2x^2+2x+1=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Como $P(0)=1$, $P(-1)=-1$ e $P\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ podemos supor que $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$, logo $\beta\gamma=-1/2\alpha<1$ e $\beta+\gamma=-1-\alpha\in(-1,0)$, donde $(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma=1+2\alpha+\alpha^2+\frac{2}{\alpha}<0$ pois $\alpha<0\Rightarrow\alpha+\frac{1}{\alpha}\le-2$ e $|\alpha|<1\Rightarrow\alpha^2<1$. Assim, $(\beta-\gamma)^2<0$, donde β e γ são complexos conjugados, e $|\beta|=|\gamma|=\sqrt{\beta\gamma}<1$. Portanto, P_n tende a Q_0 quando n cresce, e logo a interseção de todos os A_n deve ser Q_0.

Para calcular Q_0, observe que:

$$\begin{cases} Q_0+Q_1+Q_2+Q_3=P_0\\ Q_0+Q_1\alpha+Q_2\beta+Q_3\gamma=P_1\\ Q_0+Q_1\alpha^2+Q_2\beta^2+Q_3\gamma^2=P_2\\ Q_1+Q_1\alpha^3+Q_2\beta^3+Q_3\gamma^3=P_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow 7Q_0+Q_1(1+2\alpha+2\alpha^2+2\alpha^3)+Q_2(1+2\beta+2\beta^2+2\beta^3)+Q_3(1+2\gamma+2\gamma^2+2\gamma^3)$ $=P_0+2P_1+2P_2+2P_3\Rightarrow 7Q_0=P_0+2P_1+2P_2+2P_3$ (pois α, β e γ são raízes de
$2x^3+2x^2+2x+1)\Rightarrow Q_0=\dfrac{P_0+2P_1+2P_2+2P_3}{7}=\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{7}\right)$.

SOLUÇÃO 3: Trace a paralela a P_3P_2 passando por P_1. O ponto P_7 pertencerá a essa reta e teremos $\overrightarrow{P_1P_7}=\overrightarrow{P_3P_2}$. O ponto P_6 pertencerá à paralela *a* P_3P_4 passando por P_5 e satisfará $\overline{P_5P_6}=a$, ou seja, $\overrightarrow{P_5P_6}=\frac{a}{|P_3P_4|}\cdot\overrightarrow{P_3P_4}$.

Rodando o heptágono $H=P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ de 180^o em torno do ponto médio de P_1P_2 obtemos o heptágono $H'=P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'P_6'P_7'$ com $P_1'=P_2$, $P_2'=P_1$, $P_3'=P_7$, $P_7'=P_3$. Transladando infinitas vezes os heptágonos H e H' por $k.\ \overrightarrow{P_3P_6}$, $k\in\mathbb{Z}$, cobrimos uma faixa dentada, que, transladada infinitas vezes por $m.\ \overrightarrow{P_4'P_5}$, $m\in\mathbb{Z}$, nos permite cobrir o plano. Desta forma, cobrimos o plano com os heptágonos $H+K\cdot\overrightarrow{P_3P_6}+m\cdot\overrightarrow{P_4'P_5}$ e $H'+k\cdot\overrightarrow{P_3P_6}+m\cdot\overrightarrow{P_4'P_5}$, $m\in\mathbb{Z}$, de interiores disjuntos e todos congruentes a H.

SOLUÇÃO 4: Como cada brasileiro conquistou metade de seus pontos jogando contra brasileiros e metade contra argentinos, o total de pontos que os jogadores brasileiros conquistaram contra brasileiros é igual ao total de pontos que os brasileiros conquistaram contra argentinos. Do mesmo modo, o total de pontos que os argentinos conquistaram contra brasileiros é igual ao total de pontos que os argentinos conquistaram contra argentinos.

Em um torneio com n jogadores onde cada jogador joga conra cada um dos outros uma vez, há $\frac{n(n-1)}{2}$ partidas disputadas, e em cada partida é disputado um ponto, de modo que o número total de pontos do torneio é $\frac{n(n-1)}{2}$. Assim, se há a argentinos e b brasileiros, o total de pontos que os argentinos conquistaram contra argentinos é $\frac{a(a-1)}{2}$ (que, como vimos acima, é igual ao total de pontos que os argentinos conquistaram contra brasileiros). Do mesmo modo, o total de pontos que os brasileiros conquistaram conra brasileiros é $\frac{b(b-1)}{2}$ (igual ao total de pontos que os brasileiros conquistaram contra argentinos). Por outro lado, o total de pontos do torneio é $\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}$, donde

$$\frac{(a+b)(a+b-1)}{2} = 2 \cdot \frac{a(a-1)}{2} + 2 \cdot \frac{b(b-1)}{2},$$

e logo $a + b = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Assim, o número total $a + b$ de jogadores do torneio é um quadrado perfeito.

SOLUÇÃO 5: a) Temos $x_1 = 6$ e, para cada $k \geq 1$, $x_{k+1} = x_k + a_k \cdot 10^k$, donde $x_{k+1}^2 - x_{k+1} = (x_k + a_k \cdot 10^k)^2 - (x_k + a_k \cdot 10^k) = x_k^2 - x_k + a_k \cdot 10^k \cdot (2x_k - 1 + a_k \cdot 10^k)$.

Suponhamos, por hipótese de indução que $x_k^2 - x_k = b_k \cdot 10^k$. Assim, $x_{k+1}^2 - x_{k+1} = 10^k(b_k + a_k(2x_k - 1 + a_k \cdot 10^k))$. Queremos mostrar que existe uma única escolha de a_k que faz com que $x_{k+1}^2 - x_{k+1}$ seja múltiplo de 10^{k+1}, mas isso equivale a mostrar que existe uma única escolha de a_k que faz com que $b_k + a_k(2x_k - 1 + a_k \cdot 10^k)$ seja múltipoo de 10. Como x_k é um número de forma $10m_k + 6$, temos $b_k + a_k(2x_k - 1 + a_k \cdot 10^k) = b_k + a_k + 10(2m_k + 1 + a_k - 10^{k-1}) \cdot a_k$, e portanto $b_k + a_k(2x_k - 1 + a_k \cdot 10^k)$ é múltiplo de 10 se e somente se $b_k + a_k$ é múltiplo de 10, mas, dado b_k, existe um único $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ com essa propriedade.

Obs.: De fato, x_n é o único número de n algarismos terminado em 6 tal que $x_n^2 - x_n$ é múltiplo de 10^n. Para mostrar isso, note que se $x_n^2 - x_n = x_n(x_n - 1)$ é múltiplo de 10^n com x_n terminando em 6 (e $x_n - 1$ terminando em 5), então x_n deve ser múltiplo de 2^n e $x_n - 1$ deve ser múltiplo de 5^n. Assim, se y_n é outro número com essas propriedades, $x_n - y_n = (x_n - 1) - (y_n - 1)$ é ao mesmo tempo múltiplo de 2^n e de 5^n, e logo é múltiplo de 10^n. Como x_n e y_n têm n algarismos, eles devem ser iguais.

b) Suponha que existam um inteiro positivo P e um natural n_0 tal que $a_{k+p} = a_k$ para todo $k \geq n_0$. Então $x_{k+p} - 10^p x_k = x_{n_0+p} - 10^p x_{n_0}$ para todo $k \geq n_0$. Assim, se $m = x_{n_0+p} - 10^p x_{n_0}$, temos $x_{k+p} - 10^p x_k = m$, para todo $k \geq n_0$. Por outro lado, pela observação acima, $x_n \equiv 0(\mod 2^n)$ e $x_n \equiv 1(\mod 5^n)$, para todo $n \geq 0$, donde $x_{k+p} - 10^p x_k \equiv 0(\mod 2^k)$ para todo $k \geq 0$. Assim, $m = x_{k+p} - 10^p x_k \equiv 0(\mod 2^k)$, para todo $k \geq n_0$, donde $2^k | m$, $\forall\, k \geq n_0$, e logo $m = 0$, mas então teríamos $x_{n_0+p} = 10^p x_{n_0}$, donde $10 | x_{n_0+1}$, mas x_{n_0+p} termina em 6, absurdo.

SOLUÇÃO 6: Note que $x_5 = 2^{2^{16}} = (2^{16})^{2^{12}} = 65536^{4096} > 2001^{4002} > 44022^2$. Vamos mostrar que $x_{k+4} > y_k^{4002} > y_k$ para todo $k \geq 1$, por indução. Como $y_{kM} = 2001^{y_k^{2001}}, y_{k+1}^{4002} = 2001^{4002 \cdot y_k^{2001}} < (2^{11})^{4002 \cdot y_k^{2001}} = 2^{44022 \cdot y_k^{2001}} < 2^{44022 \cdot c_{k+4}^{1/2}} < 2^{x_{k+4}} = x_{k+5}$ (pois $x_{k+4} \geq x_5 > 44022^2 \Rightarrow 44022 \cdot x_{k+4}^{1/2} < x_{k+4}$), o que prova nossa afirmação. Assim, $C = 4$ satisfaz a condição do enunciado. Vamos ver que de fato 4 é o menor valor de C com essa propriedade. Para isso, basta ver que $x_5 = x_{2+3} < y_2$: temos $y_2 = 2001^{2001^{2001}} > 2^{2^{2001}} > 2^{2^{16}} = x_5$.

Obs.: Mais geralmente, se $0 < \alpha < 1 < \beta$ e (Z_n) é uma seqüência ilimitada de termos positivos tal que $2^{Z_n^\alpha} \leq Z_{n+1} \leq 2^{Z_n^\beta}$ então existe C natural tal que $x_{n-C} \leq Z_n \leq x_{n+C}$ para todo $n > C$.

Para provar isso, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Z_{n_0} \geq \max\left\{(2\beta)^{1/\beta}, (\frac{2}{\alpha})^{2/\alpha}\right\}$, e seja b natural tal que $x_{n_0+b} \geq Z_{n_0}^{2\beta}$. Mostraremos por indução que $x_{k-(n_0-1)} \leq Z_k^{\alpha/2} \leq Z_k \leq Z_k^{2\beta} \leq x_{k+b}$, para todo $k \geq n_0$. De fato, $x_1 = 2 \leq 2/\alpha \leq Z_{n_0}^{\alpha/2}$, e, por indução, temos:

$$Z_{k+1}^{2\beta} \leq (2^{Z_K^\beta})^{2\beta} = 2^{2\beta \cdot Z_K^\beta} \leq 2^{2\beta \cdot x_{k+b}/Z_K^\beta} \leq 2^{x_{k+b}} = x_{k+b+1},$$

e

$$Z_{k+1}^{\alpha/2} \geq (2^{Z_K^\alpha})^{\alpha/2} = 2^{\frac{\alpha}{2}\cdot Z_K^\alpha} \geq 2^{\frac{\alpha}{2}\cdot x_{k-(n_0-1)}\cdot Z_K^{\alpha/2}} \geq 2^{x_{k-(n_0-1)}} = x_{k+1-(n_0-1)}.$$

Assim, $C = \max\{b, n_0 - 1\}$ satisfaz nossa afirmação.

Nota: Eu e o Artur Avila dizemos que uma seqüência (Z_n) que satisfaz $x_{n-C} \leq Z_n \leq x_{n+C}$ para algum C natural e todo $n > C$ cresce *torrencialmente*. Esse tipo de crescimento aparece naturalmente num artigo nosso sobre a dinâmica da família quadrática.

SOLUÇÃO 7: A idéia é escrever cada natural $n \leq 2^{1000000}$ na base 2^k, onde k é um inteiro positivo a ser escolhido: $n = a_0 + a_1 2^k + a_2(2^k)^2 + \cdots + a_r(2^k)^r$, onde, para $0 \leq j \leq r$, temos $0 \leq a_j < 2^k$ e $r \leq \frac{1000000}{k}$. Isso nos dá a seguinte construção do número n:

Primeiro criamos todos os algarismos entre 1 e $2^k - 1$: $x_0 = 1$, e, para $1 \leq j \leq 2^K - 2$, $x_j = x_{j-1+1} = j + 1$. A partir daí, dado $n = a_0 + a_1 2^k + \cdots + a_r(2^K)^r$, fazemos $x_{2^K-1} = a_r + a_r = 2 \cdot a_r$ e, para cada s e t com $0 \leq s \leq r$, $0 \leq t \leq k$ e $(k+1)s + t \geq 2$, fazemos, se $t > 0$,

$$\begin{aligned} x_{2^K-2+(k+1)s+t} &= x_{2^k-2+(k+1)s+t-1} + x_{2^k-2+(k+1)s+t-1} \\ &= 2 \cdot x_{2^k-2+(k+1)s+t-1}, \end{aligned}$$

e, se $t = 0$, $s > 0$,

$$x_{2^K-2+(k+1)s} = x_{2^k-2+(k+1)(s-1)+k} + a_{r-s}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} X_{2^K-1} &= 2 \cdot a_r, x_{2^K} = 2 \cdot x_{2^K-1} = 2^2 \cdot a_r, \ldots, X_{2^K-2+k} = 2^k a_r, \\ x_{2^K-2+(k+1)} &= 2^k \cdot a_r + a_{r-1},\ x_{2^k-2+(k+1)+1} \\ &= 2(2^k \cdot a_r + a_{r-1}), \ldots, x_{2^k-2+(k+1)+k} = 2^k(2^k \cdot a_r + a_{r-1}), \\ x_{2^k-2+2(k+1)} &= 2^k(2^k \cdot a_r + a_{r-1}) + a_{r-2}, \ldots, \end{aligned}$$

e, finalmente,

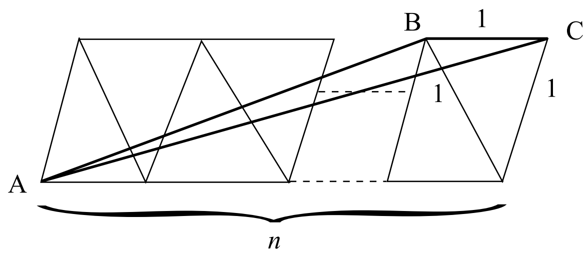
$$\begin{aligned} x_{2^k-2+r(k+1)} &= 2^k(a_1 + 2^k(a_2 + \cdots + 2^k \cdot a_r)) + a_0 \\ &= a_0 + 2^k \cdot a_1 + 2^{2k} \cdot a_2 + \cdots + 2^{rk} \cdot a_r = n. \end{aligned}$$

Assim, todo $n \in 2^{1000000}$ pode ser criado com no máximo $2^k - 2 + r(k+1) < 2^k - 2 + \frac{1000000}{k} \cdot (k+1)$ somas. Tomando, por exemplo, $k = 12$, isso implica que podemos criar qualquer $n \le 2^{1000000}$ com no máximo $4094 + \frac{13000000}{12} < 1100000$ somas.

Obs.: A melhor escolha de k é $k = 13$, que implica que podemos criar qualquer $n \le 2^{1000000}$ com no máximo $\left\lfloor 8190 + \frac{14000000}{13} \right\rfloor = 1085113$ somas.

SOLUÇÃO 8: Em primeiro lugar, observe que as imagens dos vértices de um triângulo equilátero de lado 1 formam também um triângulo eqüilátero de lado 1. Assim, dados dois triângulos eqüiláteros de lado 1 com um lado em comum, os vértices opostos ao lado comum podem ter mesma imagem ou imagens diferentes distando $\sqrt{3}$. Em outras palavras, se A e A' sãopontos tais que $AA' = \sqrt{3}$. Então $d(f(A), f(A')) \in \{0, \sqrt{3}\}$. Vamosmostrar que, de fato, $d(f(A), f(A')) = \sqrt{3}$. Se $f(A) = f(A')$, então tomando B com $AB = 1$ e $A'B = \sqrt{3}$, teríamos $d(f(A), f(B)) = 1 \Leftrightarrow d(f(A'), f(B)) = 1$, o que seria absurdo. Assim, $d(A, A') = d(f(A), f(A')) = \sqrt{3} \Rightarrow d(f(A), f(A')) = \sqrt{3}$. Desta forma qualquer reticulado triangular formado por vértices de triângulos eqüiláteros de lado 1 de interiores disjuntos e cobrindo o plano é preservado por f, no seguinte sentido: a imagem deste reticulado também será outro reticulado do mesmo tipo. Em particular, pontos a distância n são levados em pontos também à distância $n, n \in \mathbb{N}$.

Este último fato mostra que triângulos de lados 1, $\sqrt{n^2 - n + 1}$ e $\sqrt{n^2 + n - 1}$ que têm área $\sqrt{3}/4$ são preservados pela função f, já que seus vértices estão em reticulado triangular de lado 1.



$$AB = \sqrt{n^2 - n + 1}$$
$$AC = \sqrt{n^2 + n + 1}$$

Utilizando um procedimento análogo ao anterior, vamos agora considerar a imagem dos vértices de dois triângulos deste tipo com o lado de medida $\sqrt{n^2+n+1}$ em comum. Sendo X e Y os vértices destes triângulos opostos ao lado comum, temos novamente que $XY = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(X), f(Y))) = 0$ ou $d(f(X), f(Y)) = XY = \varepsilon_n$, onde

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{3}{n^2+n+1}}$$

é o dobro da altura dos triângulos donsiderados em relação ao lado comum. Vamos demonstrar que os pontos à distância ε_n têm, de fato, imagens distintas. Seja k_n tal que $k_n\varepsilon_n > 1 \leq (k_n+1)\varepsilon_n$.

Sendo $d(A_0, A_1) = \varepsilon_n$, considere pontos A_i, $2 \leq i \leq k_n + 1$ tais que $d(A_i, A_{i+1})=\varepsilon_n$ para $0\leq i\leq k_n$ e $d(A_0, A_{k_n+1})=1$. Temos $d(f(A_0, f(A_{k_{n+1}}))=1$ e, portanto,

$$1 \leq \sum_{i=0}^{k_n} d(f(A_i), f(A_{i+1})) \leq d(f(A_0), f(A_i)) + k_n\varepsilon_n,$$

se $d(f(A_0), f(A_1))$ fosse 0, então $1 \leq k_n\varepsilon_n < 1$, o que seria absurdo assim, $XY = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(X), f(Y)) = \varepsilon_n$. Como antes, temos que $XY = k\varepsilon_n \Rightarrow d(f(X), f(Y)) = k\varepsilon_n$ para $k \in \mathbb{N}$.

Agora, suponha que existam X e Y tais que $f(f(X), f(Y)) \neq d(X, Y)$. Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $4\varepsilon_n < |d(f(X), f(Y)) - d(X, Y)|$ e $P \in \mathbb{R}^2$ com $\frac{d(P,X)}{\varepsilon_n} \in \mathbb{N}$, $d(P, Y) < 2\varepsilon_n$.

Tome $Q \in R^2$ com $d(P, Q) = d(Y, Q) = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(P), f(Q)) = d(f(Y), f(Q)) = \varepsilon_n \Rightarrow d(f(P), f(Y)) \leq 2\varepsilon_n$ e como $d(P, X) = d(f(P), f(X))$, temos $|d(f(X), f(Y)) - d(X, Y)| \leq |d(f(X), f(Y)) - d(f(X), f(P))| + |d(X, P) - d(X, Y)| \leq f(F(Y), f(P)) + d(P, Y) < 4\varepsilon_n$, absurdo.

Obs.: As funções $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfazem as condições do enunciado são chamadas isometrias, e são composições de translações com rotações e/ou reflexões.

SOLUÇÃO 9: Como os matemáticos não sabiam para que lado nem a que distância estava a Meiningerstrasse, deviam adotar uma estratégia do seguinte tipo: andar a_1 quarteirões para um lado (digamos o direito), depois voltar ao ponto inicial e andar a_2 quarteirões para a esquerda, depois a_3 para a direita, depois a_4 para a esquerda e assim sucessivamente, onde $a_1, a_2, a_7 \ldots$ são números inteiros positivos com $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots$ e $a_2 < a_4 < a_6 < \ldots$ até encontrar a Meiningerstrasse. Os piores cassos são quando a Meininger está a $a_{2k+1} + 1$ quarteirões à direita ou $a_{2k} + 1$ à esquerda da Barborossastrass, com k natural (convencionamos $a_0 = 0$).

Nesses casos, temos que entre o ponto inicial e o destino há $a_n + 1$ quarteirões, e os matemáticos andam no total $2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_n + 2a_{n+1} + a_n + 1$ quarteirões até chegarem ao destino (com $n = 2k + 1$ ou $n = 2k$). Assim, devemos ter $2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_n + 2a_{n+1} + a_n + 1 \leq k\ (a_n + 1)$, ou seja, $s_{n+1} \leq \left(\frac{k-1}{2}\right)(a_n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Para $k = 9$ existem estratégias que satisfazem as condições do problema, por exemplo tomando $a_m = 2^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, teremos $S_n + 1 = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2 < 4\ (2^n + 1) = \frac{k-1}{2}(a_n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que 9 é o menor k possível. Seja $k < 9$. Então $c = \frac{k-1}{2}$ é menor que 4. Se k satisfaz as condições do problema, deve haver uma seqüência (a_n) como acima com $S_{n+1} \leq c(a_n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $a_n = S_n - S_{n-1}$ teremos $S_{n+1} \leq c(S_n - S_{n-1} + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $U_n = S_n - c$, temos $U_{n+1} \leq c(U_n - U_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $c < 4$, $U_n > 0$ para todo $n \geq 3$, e, definindo $V_n = U_{n+1}/U_n$ para todo $n \geq 3$, teremos $V_n \leq c(1 - 1/V_{n-1})$ para todo $n \geq 4$, onde $V_n > 0$ para todo $n \geq 3$. Entretanto, $V_n \leq c(1 - 1/V_{n-1})$ implica $V_n - V_{n-1} \leq c(1 - 1/V_{n-1}) - V_{n-1} = \frac{cV_{n-1} - c - V_n^2 - 1}{V_{n-1}} = \frac{\frac{c^2}{4} - c - \left(\frac{c}{2} - V_{n-1}\right)^2}{V_{n-1}} \leq \frac{c(c-4)}{4V_{n-1}} < 0 \Rightarrow V_n < V_{n-1}$ para todo $n \geq 4$. Por outro lado, para todo $n \geq 4$ temos $V_n - V_{n-1}\frac{c(c-4)}{4V_{n-1}} \Rightarrow V_n - V_{n-1} \leq \frac{c(c-4)}{4V_3}$ para todo $n \geq 4$, donde $V_n \leq V_3 + \frac{(n-3)c(c-4)}{4V_3}$ para todo $n \geq 4$, absurdo, pois o lado direito é negativo para $n > 3 + \frac{4V_3^2}{c(4-c)}$. □

SOLUÇÃO 10: Usaremos algumas vezes o seguinte fato, que segue do teorema fundamental da aritmética: se m divide n^k então m divide $mdc(m, n)^k$, para quaisquer inteiros positivos m, n, k.

Observemos que, como 2^n é par para todo inteiro positivo n e $2 = 1^m+1$ para todo inteiro positivo m, $(1,m,n)$ é sempre solução. Vamos então considerar o caso em que $a \geq 2$. nesse caso, devemos ter m ímpar. De fato, se m é par, $a^m+1 \equiv (-1)^m+1 = 2 \pmod{a+1}$, donde $mdc(a^m+1, a+1)|2$ e, pelo fato acima, $a^m+1|2^n$, e logo $a^m+1 = 2^k$, para algum $k \leq n$, o que implica que a é ímpar, e logo $a^m = (a^{m/2})^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$, donde $2^k \equiv 2(\text{mod } 4) \Rightarrow k = 1$ e $a^m = 1 \Rightarrow a = 1$, absurdo. É fácil ver que $(a,1,n)$ é sempre solução. Vamos então supor que $m > 1$.

Seja agora p um primo (ímpar) que divide m. Escrevemos $m = p \cdot \ell$, e fazemos $b = a^\ell$. Assim, b^p+1 divide $(a+1)^n$, que, por sua vez, divide $(a^\ell+1)^n = (b+1)^n$, pois r é ímpar. Portanto, $\frac{b^p+1}{b+1}$ divide $(b+1)^{n-1}$, donde, pelo fato acima,$\frac{b^p+1}{b+1}$ divide $mdc\left(\frac{b^p+1}{b+1}, b+1\right)^{n-1}$, mas, como $b \equiv -1(\text{mod } b+1)$,

$$\frac{b^p+1}{b+1} = b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1$$

$$\equiv (-1)^{p-1} - (-1)^{p-2} + \cdots - (-1) + 1 = P(\text{mod } b+1),$$

donde $\frac{b^p+1}{b+1}$ divide p^{n-1}, e logo $\frac{b^p+1}{b+1} = P^r$, para algum natural r. Em particular, P divide $\frac{b^p+1}{b+1}$, que divide $(b+1)^{n-1}$, donde P divide $b+1$. Sejam então C e r inteiros positivos tais que $b+1 = C \cdot P^r$ e P não divide C. Temos então $b^p+1 = (C \cdot p^r - 1)^p + 1 = 1 + (-1) + P \cdot C \cdot P^r - \binom{P}{2}(C \cdot P^r)^2 + \cdots + (C \cdot P^r)^p \equiv C \cdot P^{r+1}(\text{mod } P^{r+2})$. Assim, a maior potência de P que divide b^p+1 é P^{r+1}, e como a maior potência de P que divide $b+1$ é P^r, a maior potência de P que divide $\frac{b^p+1}{b+1}$ P, donde $\frac{b^p+1}{b+1} = P$, mas $\frac{b^p+1}{b+1} = b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1 \geq b^{p-1} - b^p = (b-1)b^{p-2} \geq 2^{p-2}$. Assim, $2^{p-2} \leq P$. Entretanto, para $s \geq 5$, $2^{s-2} > s$ (de fato, por indução, $2^3 = 2^{5-2} > 5$ e $2^{s+1-2} = 2 \cdot 2^{s-2} > 2s > s+1$, para $s \geq 5$). Assim, como P é um primo ímpar, temos necessariamente $p = 3$, e $\frac{b^p+1}{b+1} = \frac{b^3+1}{b+1} = b^2 - b + 1 = 3$, donde $b^2 - b - 2 = 0$ e portanto $b = 2$. Como $b = a^\ell$, temos $a^\ell = 2$, donde $a = 2$ e $\ell = 1$. Assim, temos $a = 2$ e $m = P \cdot \ell = 3$, e, como $9 = 2^3 + 1$ divide $(2+1)^n = 3^n$ para todo $n \geq 2$, as soluções são dadas por $\{(a,m,n) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid a = 1 \text{ ou } m = 1 \text{ ou } (a = 2, m = 3 \text{ e } n \geq 2)\}$.

SOLUÇÃO 11: Vamos mostrar que, dado um conjunto $X \subset \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$, existe $t \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ tal que $(A+\{t\}) \cap X$ tem pelo menos $|X|/n$ elementos, onde $|X|$ é o número de elementos de X. De fato,

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}} |(A+\{t\})\cap X| = \sum_{a\in A}\sum_{x\in X} |\{t \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z} | a+t = x\} = |A|\cdot|X| = n\cdot|X|,$$

pois, para cada $a \in A$ e $x \in X$, existe um único $t \in \mathbb{Z}/n^2/zb$ tal que $a + t = x$. Assim, $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{t\in\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}} |(A + \{t\}) \cap X| = |X|/n$, donde o número médio de elementos de $(A + \{t\}) \cap X$ é $|X|/n$, o que claramente implica a nossa afirmação.

Agora, dado $k \geq 0$ existem $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ tais que $n^2 - |A + \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}| \leq n^2 \cdot (1 - \frac{1}{n})^k$. De fato, por indução, dados tais $t_1, t_2, \ldots, t_k$, pela afirmação acima existe $t_{k+1} \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ com

$$\begin{aligned}(A + \{t_{k+1}\}) &\cap ((\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}) \setminus (A + \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}))\\ &\geq \frac{1}{n} \cdot |(\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}) \setminus (A + \{t_1, t_2, \ldots, t_k\})|,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}|(A + \{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}\})^C| &= |((A + \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}) \cup (A + \{t_{k+1}\}))^C|\\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot |(A + \{t_1, t_2, \ldots, t_k\})^C\\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

(aqui X^C denota $(\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}) \setminus X$; temos $|X^C| = n^2 - |X|$).

Assim, existe $B = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ tal que $n^2 - |A+B| \leq n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < n^2/2$, donde $|A + B| > n^2/2$.

Obs.: Para $n \geq 1$, $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} = 2$, donde $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n < \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO 12: Vamos mostrar que o maior valor possível de k é n. De fato, é fácil ver que k pode ser igual a n: dada uma bijeção $\sigma = \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, e supondo que, para $1 \leq i \leq n$, o i-ésimo aluno acertou a i-ésima questão e errou todas as outras, se atribuirmos peso $p_i = n+1-\sigma(i)$ à questão i para $1 \le i \le n$, temos que o aluno de número $\sigma^{-1}(i)$ obteve a i-ésima melhor nota, para $1 \le i \le n$.

Suponha agora que k alunos tenham feito k provas como no enunciado. Para cada $i \le k$, denotamos por $V(i) \in \{0,1\}^n$ o resultado da i-ésima prova: $V(i) = (V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{in})$, onde $V_{ij} = 1$ se o i-ésimo aluno acertou a j-ésima questão, e $V_{ij} = 0$ caso contrário. Se $k > n$, os vetores $V(i)$, $1 \le i \le k$, são linearmente dependentes, ou seja, existem constantes C_i, $1 \le i \le k$, não todas nulas, tais que $\sum\limits_{i=1}^{k} C_i V(i) = 0$. Assim, passando os termos com C_i negativo para o lado direito da igualdade, obtemos constantes positivas $a_1, a_2, \dots, a_1, b_1, b_2, \dots, b_s$ com $r, s \ge 1$, $r+s \le k$ e $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i V(\tau(i)) = \sum\limits_{j=1}^{s} b_j V(\beta(j))$, onde $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(r), \alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(s)$ são os índices i tais que $C_i \neq 0$ (os $\tau(j)$ são tais que $C_{\tau(j)} > 0$ e os $\alpha(j)$ são tais que $C_{\alpha(j)} < 0$).

Agora,se o peso da i-ésima questão é $p_i > 0$, a nota da i-ésima prova é $n(V(i)) = \sum\limits_{j=1}^{n} V_{ij} \cdot p_j$. Sejam $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{s} b_j \Big/ \sum\limits_{i=1}^{r} a_i$, $\tilde{b}_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{s} b_j}$ e $\tilde{a}_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{r} a_i}$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\lambda \ge 1$ (senão trocamos os lados da igualdade).

Como $\sum\limits_{j=1}^{s} b_j \cdot V(\beta(j)) = \sum\limits_{i=1}^{r} a_j \cdot V(\tau(j))$, temos $\sum\limits_{j=1}^{s} \tilde{b}_j \cdot V(\beta(j)) = \lambda \cdot \sum\limits_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot V(\tau(i))$ e, como $n(v)$ depende linearmente de V, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{s} \tilde{b}_j n(V(\beta(j))) &= n\left(\sum_{j=1}^{s} \tilde{b}_j \cdot V(\beta(j))\right) = n\left(\lambda \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot V(\tau(i))\right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot n(V(\tau(i)) \ge \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot n(V(\tau(i))),\end{aligned}$$

mas como $\sum\limits_{j=1}^{s} \tilde{b}_j = \sum\limits_{i=1}^{r} \tilde{a}_i = 1$, temos que $\sum\limits_{j=1}^{s} \tilde{b}_j \cdot n(V(\beta(j)))$ e $\sum\limits_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \cdot n(V(\tau(i)))$ são respectivamente médias ponderadas dos $n(V(\beta(j)))$ e dos $n(V(\tau(i)))$, e a desigualdade acima claramente implica que não podemos ter $N(V(\tau(i))) > n(V(\beta(j)))$ para todo $i \le r$ e $j \le s$, e potanto as notas não podem ficar em qualquer ordem.

Nota: Se $k>n$ então quaisquer vetores $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);$ $x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i \le n\}$ são *linearmente dependentes*, isto é, existem constantes $C_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le k$ não todas nulas tais que $\sum\limits_{i=1}^{k} C_i V_i = C_1 V_1 + \cdots + C_k V_k = 0$. Podemos provar isso por indução em n. Se $m < n$ podemos identificar $\mathbb{R}^m$ com $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n;\ x_i \in \mathbb{R},\ \forall\ i \le m\}$. Se $V_i = 0$ para algum i, podemos tomar $C_i = 1$ e $C_j = 0$, $\forall\ j \ne i$. Se $k > n+1$, e $V_1, V_2, \ldots, V_k$ são vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $V_i = (x_1^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)})$ para cada $i \le k$, temos duas possibilidades:

i) $x_{n+1}^{(i)} = 0$ para todo $i \le k$. Nesse caso $V_i \in \mathbb{R}^n$ para todo $i \le k$ e o resultado segue imediatamente pela hipótese de indução.

ii) $x_{n+1}^{(i)} \ne 0$ para algum i. Podemos supor sem perdade generalidade que isso vale para $i = k$. Nesse caso temos $\tilde{V}_j = V_j - \frac{x_{n+1}^{(j)}}{x_{n+1}^{(k)}} V_k \in \mathbb{R}^n$ para todo j com $1 \le j \le k-1$ e, por hipótese de indução, como $k-1 > n$, existem $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_{k-1} \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \tilde{C}_j \cdot \tilde{V}_j = 0$, mas, como $\tilde{V}_j = V_j - a_j \cdot V_k$, onde $a_j = x_{n+1}^{(j)}/x_{n+1}^{(k)}$, e portanto $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \tilde{C}_j (V_j - a_j V_k) = 0$, donde $\sum\limits_{j=1}^{k} C_j V_j = 0$, onde $C_j = \tilde{C}_j$ para $1 \le j \le k-1$ e $C_k = -\sum\limits_{j=1}^{k-1} a_j \tilde{C}_j$, o que prova o resultado.

SOLUÇÃO 13: Suponha por absurdo que b não seja uma potência de a. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^k < b < a^{k+1}$. Consideremos a seqüência $x_n = \frac{b^n - 1}{a^n - 1} \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \ge 1$. Como $\frac{1}{a^n - 1} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{2n}} + \cdots = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{jn}}$, temos

$$x_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^n}{a^{jn}} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{jn}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \cdots \left(\frac{b}{a^k}\right)^n + \frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1}.$$

Note que como $\frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} = \frac{(b/a^{k+1})^n}{1 - a^{-n}}$ e $\frac{1}{a^n - 1}$ tendem a 0 quando n cresce, se definimos $y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n = \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{b}{a^j}\right)^n$, temos que $x_n - y_n =$

$\frac{b^n}{a^{kn}(a^n-1)} - \frac{1}{a^n-1}$ tende a 0 quando n tende a infinito. Por outro lado, como y_n é uma soma de k progressões geométricas de razões b/a^j, $1 \leq j \leq k$, y_n satisfaz a equação de ecorrência $C_0 y_{n+k} + C_1 y_{n+k-1} + \cdots + C_k y_n = 0$, $\forall\ n \geq 0$, onde

$$\begin{aligned} &C_0 x^k + C_1 x^{k-1} + \cdots + C_{k-1} x + C_k \\ &\qquad = a^{k(k+1)/2} \left(x - \frac{b}{a}\right)\left(x - \frac{b}{a^2}\right) \cdots \left(x - \frac{b}{a^k}\right) \end{aligned}$$

(vejam o artigo "Equações de recorrência" na eureka! No. 9).

Note que todos os C_i são inteiros. Note também que

$$C_0 x_{n+k} + C_1 x_{n+k-1} + \cdots + C_k x_n$$

$$= C_0(x_{n+k} - y_{n+k}) + C_1(x_{n+k-1} - y_{n+k-1}) + \cdots + C_k(x_n - y_n)$$

tende a 0 quando n tende a infinito, pois $x_{n+j} - y_{n+j}$ tende a 0 para todo j com $0 \leq j \leq k$ (e k está fixo). Como os C_i e os x_n são todos inteiros, isso mostra que $C_0 x_{n+k} + C_1 x_{n+k-1} + \cdots + C_k x_n = 0$ para todo n grande.

Agora, como

$$x_n = y_n + \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \frac{b^n}{a^{(k+1)n}(a^n-1)} - \frac{1}{a^n-1},$$

temos

$$C_0 x_{n+k} + C_1 x_{n+k-1} + \cdots + C_k x_n = \sum_{j=0}^{k} C_j \left(\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} + z_{n+k-j}\right),$$

onde

$$z_m = \frac{b^m}{a^{(k+1)m}(a^m-1)} - \frac{1}{a^m-1}.$$

Note que $\sum\limits_{j=0}^{k} C_k \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} = P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n$, onde

$$\begin{aligned} P(x) &= C_0 x^k + C_1 x^{k-1} + \cdots + C_{k-1} x + C_k \\ &= a^{k(k+1)/2} \left(x - \frac{b}{a}\right)\left(x - \frac{b}{a^2}\right) \cdot \left(x - \frac{b}{a^k}\right), \end{aligned}$$

donde $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$. Por outro lado, para todo j com $0 \le j \le k$,

$$z_{n+k-j} \Big/ \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n = \frac{(b/a^{k+1})^{k-j}}{a^{n+k-j}-1} - \frac{1}{(a^{k-j}-a^{-n})(b/a^k)^n},$$

que tende a 0 quando n tende a infinito, donde $w_n = \left(\sum_{j=0}^{k} C_j x_{n+k-j}\right) \Big/ \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n$ tende a $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$, o que é um absurdo, pois, como vimos antes, w_n é igual a 0 para todo n grande.

SOLUÇÃO 14: Vamos mostrar que, se $a > 0$, $P_{a,n}(x) := x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + ax - 1$ tem uma raiz (real) de módulo menor que 1 e todas as outras $n-1$ raízes de módulo maior que 1. Isso implica que, se a é um inteiro positivo, $P_{a,n}(x)$ é irredutível, pois, se $P_{a,n}(x)$ fosse redutível, teríamos $P_{a,n}(x) = f(x) \cdot g(x)$, com $f(x) = x^k + b, x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + 1$ e $g(x) = x^{n-k} + C_1 x^{n-k-1} + \cdots + C_{n-k-1}x - 1$, donde o produto dos módulos das raízes de cada um dos fatores $f(x)$ e $g(x)$ é igual a 1, mas isso leva a uma contradição, pois, como todas as raízes de $P_{a,n}(x)$ exceto uma têm módulo maior que q, um dos dois fatores, $f(x)$ ou $g(x)$, tem apenas raízes de módulo maior que q, donde o produto de seus módulos não pode ser 1.

Note também que isso implica que $P_{-a,n}(x)$ é irredutível para todo inteiro positivo a, o que permite concluir o resultado desejado: de fato, temos $P_{a,n}(x) = -x^n P_{-a,n}(\frac{1}{x})$, donde, se $P_{-a,n}(x) = f(x) \cdot g(x)$ com f e g polinômios de coeficientes inteiros de graus k e $n-k$, respectivamente, temos $P_{a,n}(x) = \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$, onde $\tilde{f}(x) = x^k f(\frac{1}{x})$ e $\tilde{g}(x) = -x^{n-k} g(\frac{1}{x})$ são polinômios de coeficientes inteiros e graus k e $n-k$, respectivamente. Note que, se $a > 0$, $P_{-a,n}(x)$ tem uma raiz (real) maior que 1 e $n-1$ raízes de módulo menor que 1.

Vamos agora, finalmente, provar nossa afirmação inicial. Note que $P_{a,n}(x) = x^n - 1 + ax\frac{(x^{n-1}-1)}{x-1}$, donde $(x-1)P_{a,n}(x) = x^{n+1} + (a-1)x^n - (a+1)x + 1$. Por outro lado, temos $P_{a,n}(0) = -1$ e $P_{a,n}(1) = (n-1)a > 0$ (supondo $n \ge 2$), donde existe β com $0 < \beta < 1$ tal que $P_{a,n}(\beta) = 0$. Assim, $P_{a,n}(x)$, e logo $(x-1)P_{a,n}(x)$ é divisível por $x - \beta$. Dividindo (pelo lgoritmo usual de divisão de polinômios) $(x-1)P_{a,n}(x) = x^{n+1} + (a-1)x^n - (a+1)x + 1$ por $x - \beta$, obtemos $Q(x) = x^n + (a+\beta-1)x^{n-1} + \beta(a+\beta-1)x^{n-2} + \beta^2(a+$

$\beta - 1)x^{n-3} + \cdots + \beta^{n-2}(a + \beta - 1)x - 1/\beta$ (usando o fato de que, como a divisão dá exata, o coeficiente cosntante do quociente deve ser $-1/\beta$). Note que $a + \beta - 1 \geq \beta > 0$ usamos que a é um inteiro positivo, donde $a \geq 1$, mas, e fato, mesmo que $a > 0$ seja um real positivo arbitrário, $a + \beta - 1 > 0$ pois $P_{a,n}(1-a) = (1-a)^n - 1 + (a-1)((1-a)^{n-1} - 1) = -a < 0$, donde $1-a < \beta < 1$), donde, se $|x| \leq 1$, $|Q(x)| \leq \frac{1}{7}\beta - |x^n| - |(a+\beta-1)x^{n-1}| - \cdots - |\beta^{n-2}(a+\beta-1)x| \geq 1/\beta - 1 - (a+\beta-1) - \cdots - \beta^{n-2}(a+\beta-1) = -Q(1) = 0$, valendo as igualdades se e somente se $x = 1$. Como (se $n \geq 2$) 1 não é raiz de $P_{a,n}(x)$, segue que todas as raízes de $P_{a,n}(x)$ distintas de β (que também são raízes de $Q(x)$) têm módulo maior que q.

Nota: Esta solução é baseada num argumento do Artur Avila, medalhista de outo na IMO de 1995.

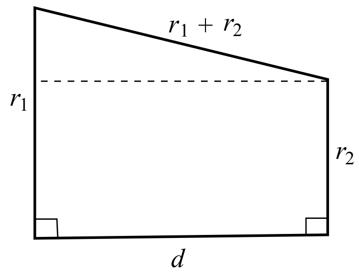
SOLUÇÃO 15: O conjunto dos pontos de tangência será o conjunto $\{(x, 0), x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$. Cada racional $x \in [0, 1]$ será representado por pq onde p é inteiro, q é inteiro positivo e $mdc(p, q) = 1$. Para provar isso mostraremos os seguintes fatos por indução:

i) O círculo tangente em $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ terá raio $\frac{1}{2q^2}$.

ii) Se os círculos tangentes em $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são tangentes entre si então $|ps - qr| = 1$.

Para isso, notemos que dois círculos centrados em (x, r_1) e (y, r_2) são tangentes à reta ℓ e tangentes entre si então $(r_1 - r_2)^2 + d^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow d^2 = 4r_1r_2 \Rightarrow d = 2\sqrt{r_1r_2}$, onde $d = |x - y|$.

As afirmações i) e ii) são verdadeiras para os círculos iniciais C_1 e C_2. Se o círculo C é tangente a ℓ e tem centro $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, o círculo C' é tangente a ℓe tem centro $\left(\frac{r}{s}, \frac{1}{2x^2}\right)$ e $qr - ps = 1$ então, se o círculo $\tilde{C}$ tangente a C e C' e à reta ℓ tem centro (x, y) com $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ então, se $d' = x - \frac{p}{q}$ e $d'' = \frac{r}{s} - x$, devemos ter $d' = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{y}{2}}$ e $d'' = \frac{2}{s}\sqrt{\frac{y}{2}}$, e $d' + d'' = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qs}$, donde $\frac{2(q+s)}{qs}\sqrt{\frac{y}{2}} = \frac{1}{qs} \Rightarrow y = \frac{1}{2(q+s)^2}$ e $d' = \frac{1}{q(q+s)} \Rightarrow x = \frac{p}{q} + d' = \frac{p(q+s)+q}{q(q+s)} = \frac{p+r}{q+s}$ (pois $ps = qr - 1$). Assim, $\tilde{C}$ é tangente em $\left(\frac{p+r}{q+s}, 0\right)$ e tem raio $\frac{1}{2(q+s)^2}$.



Como $q(p+r)-p(q+s) = qr-ps = 1$ e $(q+s)r-(p+r)s = qr-ps = 1$ vemos que $\tilde{C}$ satisfaz i) e ii).

Esses fatos implicam que todosos círculos criados terão centro em pontos racionais. Basta provar agora que para todo racional $\frac{p}{q} \in [0,1]$, o ponto $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ é ponto de tangência de algum dos círculos¿ Faremos isto por indução em q (para $q = 1$ o resultado é óbvio): basta mostrar se $mdc(p,q) = 1$ e $q \geq 2$ que é possível escrever $p = p' + p''$ e $q = q' + q''$ com p, p'', q', q'' inteiros, $q', p'' \geq 0$ e $q'p'' - p'q'' = 1$.

Estas equações podem ser escritas como $q'(p-p')-p'(q-q') = 1$, ou seja, $q'p - p'q = 1$, onde $0 < q' < q$ e $0 < p' < p$. Como $mdc(p,q) = 1$ existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com $px+qy = 1$, e teremos para todo $k \in \mathbb{Z}$, $p(x+kq)+q(y-kp) = 1$. Certamente podemos escolher k de modo que $0 < x + kq < q$ (note que x não é múltipo de q, senão $1 = px + qy$ também seria), e então tomamos $q' = x - kq$ e $p' = kp - y$ (temos $p' = \frac{pq'-1}{q}$, mas $1 \leq q' < q$, donde $0 \leq p' < p$).

SOLUÇÃO 16: A resposta é para $\ell \geq \frac{1}{(n-1)}$.

Devemos demonstrar duas coisas:

a) que, para $\ell \geq \frac{1}{(n-1)}$, existe uma seqüência infinita de movimentos que vai levando as pulgas cada vez mais para a direita, ultrapassando qualquer ponto prefixado M;

b) que, para $\ell < \frac{1}{(n-1)}$ e para qualquer posição inicial dada as pulgas, existe um ponto M tal que as pulgas em um número finito de movimentos jamais alcançam ou ultrapassam M.

Começaremos pelo item b). Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ as posições iniciais das pulgas, com $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, de tal forma que x_n é a posição da pulga mais à direita. Seja

$$P = \left(\frac{1}{(1-(n-1)\ell)}\right) \cdot (x_n - \ell \cdot x_1 - \ell \cdot x_2 - \dots - \ell \cdot x_{n-1}).$$

O ponto P claramente está à direita de todas as pulgas.

Afirmamos que se após alguns movimentos as novas posições são $x'_1, \dots, x'_n$ e definimos

$$P' = \left(\frac{1}{(1-(n-1)\ell)}\right) \cdot (x'_n - \ell \cdot x'_1 - \ell \cdots x'_1 - \dots - \ell \cdot x'_{n-1}).$$

Se $P' \leq P$, isto conclui a demonstração.

Basta considerar o que ocorre após um movimento.

Se a pulga que estava em x_i pula sobre a pulga que estava em x_n então $x'_n - x_n = \ell \cdot (x_n - x_i)$ e $x'_n - \ell \cdot x_n = x_n - \ell \cdot x_i$ e $P' = P$.

Qualquer outro caso é ainda mais favorável. De fato, se a pulga que pulou continua atrás de x_n, temos $x'_n = x_n$ e $x'_1 + \dots + x'_{n-1} > x_1 + \dots + x_{n-1}$, donde $P' < P$. Se ela passa de x_n, teremos $x'_n = x_j + \ell(x_j - x_i) \Rightarrow x'_n - \ell x_n < x'_n - \ell x_j = x_j - \ell x_i < x_n - \ell x_i$.

Item a) Se $P = x_n - \ell(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$ se, em cada movimento, a pulga mais à esquerda pula sobre a pulga mais à direita, temos $x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1) \Rightarrow x'_n - \ell x_n = x_n - \ell x_1$ e $P' = P$, donde P é uma constante positiva (escolhendo a origem, por exemplo, em x_n). Temos então

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j) &= x_n - \frac{1}{n-1}(x_1 + \dots + x_{n-1}) \\ &\geq x_n - \ell(x_1 + \dots + x_{n-1}) = P \Rightarrow\end{aligned}$$

$$x_n - x_1 \geq \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j) = P \Rightarrow x'_n - x_n = \ell(x_n - x_1) \geq \frac{P}{n-1},$$

donde o ponto mais à direita caminha pelo menos $\frac{P}{n-1}$ para a direita a cada passo, logo tende a infinito. Como o ponto mais a direita, após $n-1$ passos será o ponto mais à esquerda, todos os pontos tendem a infinito (para a direita).

Nota: Na estratégia descrita na solução do item a), o ponto mais à esquerda se torna sempre o mais à direita, donde podemos definir $x_{n+1} = x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1)$, e teriamos simplesmente $x'_j = x_{j+1}$, $\forall\, j$. Reduzimos então a análise dessa estratégia ao estudo da recorrência linear $x_{n+1} = (1+\ell)x_n - \ell x_1$, cujo polinômio característico é $P(x) = x^{n+1} - (1+\ell)x^n + \ell$, do qual 1 é raiz, donde, como $\frac{P(x)}{x-1} = x^n - \ell(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$, a expressão $y_m = x_m - \ell(x_{m-1} + x_{n-2} + \cdots + x_{m-n+2} + x_{m-n+1})$ é um invariante da recorrência, isto é, $y_{m+1} = y_m\ \forall\, m$, donde y_m é constante. Daí vem nossa fórmula para P.

SOLUÇÃO 17: Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Note que $f(-\frac{3}{5}) = -\frac{37}{125} < 0$, $f(0) = 1 > 0$ e $f(\frac{3}{4}) = -\frac{17}{64} < 0$, donde f tem uma raiz β com $-\frac{3}{5} < \beta < 0$ e uma raiz γ com $0 < \gamma < \frac{3}{4}$. Além disso, como $f(\frac{5}{2}) = -\frac{17}{8} < 0$ e $f(3) = 1 > 0$, temos $\frac{5}{2} < \alpha < 3$. Temos $\alpha+\beta+\gamma = 3$ e $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = 3^2 - 2\cdot 0 = 9$. Assim, $|\gamma| - |\beta| = \beta+\gamma = 3-\alpha > 0$, donce $|\gamma| > |\beta|$, e $|\gamma|^2 + |\beta|^2 < (\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{5})^2 = \frac{369}{400} < 1$.

Seja agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Temos $S_0 = S_1 = 3$ e $S_2 = 9$. Além disso, como $\alpha^3 = 3\alpha^2 - 1$, $\beta^3 = 3\beta^2 - 1$ e $\gamma^3 = 3\gamma^2 - 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\alpha^{n+3} = 3\alpha^{n+2} - \alpha^n$, $\beta^{n+3} = 3\beta^{n+2} - \beta^n$ e $j^{n+3} = 3\gamma^{n+2} - \gamma^n$, e logo, somando as iguadades, temos $S_{n+3} = 3S_{n+2} - S_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como $0 < \beta+\gamma = 3-\alpha < 1$, e, para cada $n \geq 2$, $\beta^n+\gamma^n = |\gamma|^n + \beta^n \geq |\gamma|^n - |\beta|^n > 0$, e $\beta^n+\gamma^n \leq |\beta|^n + |\gamma| \leq |\beta|^2 + |\gamma|^2 < 1$, temos $\alpha^n < \alpha^n+\beta^n+\gamma^n < \alpha^n+1$, ou seja, $S_n - 1 < \alpha^n < S_n$. Como S_0, S_1 e S_2 são inteiros e $S_{n+3} = 3S_{n+2} - S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que S_n é inteiro para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\lfloor \alpha^n \rfloor = S_n - 1$, para todo $n \geq 1$. Assim, basta provar que $S_{2004} - 1$ é múltiplo de 17, ou seja, que $S_{2004} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$. Vamos calcular $S_n (\mathrm{mod}\ 17)$ para os primeiros valores de n, usando $S_0 = S_1 = 3$, $S_2 = 9$ e $S_{n+3} (\mathrm{mod}\ 17) = 3S_{n+2} (\mathrm{mod}\ 17) - S)n (\mathrm{mod}\ 17)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; vamos denotar $\overline{S}_n := S_n (\mathrm{mod}\ 17) \in \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$. emos então: $\overline{S}_0 = 3$, $\overline{S}_1 = 3$, $\overline{S}_2 = 9$, $\overline{S}_3 \equiv 3\cdot 9 - 3 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 17)$, $\overline{S}_4 \equiv 3\cdot 7 - 3 \equiv 1$, $\overline{S}_5 \equiv 3\cdot 1 - 9 \equiv 11$, $\overline{S}_6 \equiv 3\cdot 11 - 7 \equiv 9$, $\overline{S}_7 \equiv 3\cdot 9 - 1 \equiv 9$, $\overline{S}_8 \equiv 3\cdot 9 - 11 \equiv 16$, $\overline{S}_9 \equiv 3\cdot 16 - 9 \equiv 5$, $\overline{S}_{10} \equiv 3\cdot 5 - 9 \equiv 6$, $\overline{S}_{11} \equiv 3\cdot 6 - 16 \equiv 2$, $\overline{S}_{12} \equiv 3\cdot 2 - 15 \equiv 1$, $\overline{S}_{13} \equiv 3\cdot 1 - 6 \equiv 14$, $\overline{S}_{14} \equiv 3\cdot 14 - 2 \equiv 6$, $\overline{S}_{15} \equiv 3\cdot 6 - 1 \equiv 0$, $\overline{S}_{16} \equiv 3\cdot 0 - 14 \equiv 3$, $\overline{S}_{17} \equiv 3\cdot 3 - 6 \equiv 3$

e $\overline{S}_{18} \equiv 3 \cdot 3 - 0 \equiv 9$ (todas as congruências são módulo 17). Assim, $\overline{S}_{n+16} = \overline{S}_n$ para $n = 0, 1$ e 2 donde, como $\overline{S}_{n+3} \equiv 3\overline{S}_{n+2} - \overline{S}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{S}_{n+16} = \overline{S}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{S}_4 = \overline{S}_{12} = 1$, temos que $\overline{S}_{4+8k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $\overline{S}_{2004} = \overline{S}_{4+8\cdot 250} = 1$, e portanto $\lfloor \alpha^{2004} \rfloor = S_{2004} - 1 \equiv \overline{S}_{2004} - 1 \equiv 1 = 0(\text{mod } 17)$, que é o que queríamos provar.

SOLUÇÃO 18: $A = \{4\}$ é solução para $n = 1$, $A = \{9, 16\}$ é solução para $n = 2$. Vamos provar a existência de um tal conjunto por indução em n. Suponha que $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto com n elementos e para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, $\sum\limits_{x \in B} x = m_B^{k_K}$. Vamos mostrar que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto $\tilde{A} = \{cx_1, cx_2, \ldots, cx_n, c\}$ satisfaz o enunciado.

Seja $\ell = mmc\{k_B, B \subset A, B \neq \emptyset\}$ o mínimo múltiplo comum de todos os exponentes k_B.

Para cada $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ associamos um número primo $p_B > \ell$, de forma que $B_1 \neq B_2 \Rightarrow p_{B_1} \neq p_{B_2}$, e associamos um natural r com $r_B \equiv 0$ (módulo p_x), $\forall\, x \neq B$, $\ell r_B + 1 \equiv 0$ (módulo p_B) (tal r_B existe pelo teorema chinês dos restos), e tomamos

$$c = \prod_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} (1 + m_B^{k_B})^{\ell r_B}.$$

Como c é uma potência ℓ-ésima, c é uma potência k_B-ésima para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, portanto, para $B' \subset \{cx_1, cx_2, \ldots, cx_n\}$, $B' \neq \emptyset$, teremos $B' = \{cx \mid x \in B\}$ para algum $B \subset A$, $B \neq \emptyset$. Logo $\sum\limits_{x \in B'} x$ será uma potência k_B-ésima.

Além disso,

$$\sum_{X \in B' U \{c\}} x = c(1 + m_B^{K_B}) = \left[\prod_{\substack{X \subset A \\ X \neq \emptyset, B}} (1 + m_X^{K_X})^{\ell r_X} \right] \cdot (1 + m_B^{K_B})^{\ell r_B + 1},$$

que é uma potência p_B-ésima, pois r_X é múltiplo de p_B para $X \neq B$ e $\ell r_B + 1$ é múltiplo de p_B. $\square$

Solução alternativa: O resultado segue do seguinte:

Lema: Dado um inteiro positivo r, existe um inteiro positivo k tal que $k, 2k, 3k, \ldots, rk$ são todos potências não-triviais.

(De fato, basta tomar $r = \frac{n(n+1)}{2}$ e $A = \{k, 2k, \ldots, nk\}$).

Prova do Lema: Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_s$ todos os primos menores ou iguais a r. Cada inteiro positivo $j \leq r$ se fatora como $j = p_1^{\alpha_1^{(j)}} \cdot p_2^{\alpha_2^{(j)}} \cdot \cdots \cdot p_s^{\alpha_s^{(j)}}$, com $\alpha_i^{(j)} \in \mathbb{N}$, $\forall\, i, j$. Vamos obter o inteiro k da forma $k = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot p_s^{m_s}$. Para isso, sejam $q_1, q_2, \ldots, q_r$ primos distintos. Vamos escolher $m_1, m_2, \ldots, m_s$ de tal modo que, para todo $j \leq r$, o número $j \cdot k = p_1^{\alpha_1^{(j)}+m_1} \cdot p_2^{\alpha_2^{(j)}+m_2} \cdot \cdots \cdot p_s^{\alpha_s^{(j)}+m_s}$ seja uma potência q_j-ésima. Para isso, dado $i \leq s$, escolhemos $m_i \in \mathbb{N}$ satisfazendo as congruências $\alpha_i^{(j)} + m_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ q_j)$, ou seja, $m_i \equiv -\alpha_i^{(j)} (\mathrm{mod}\ q_j)$, para $1 \leq j \leq r$. Tais m_i existem pelo teorema chinês dos restos, o que prova o resultado.