Homework 5

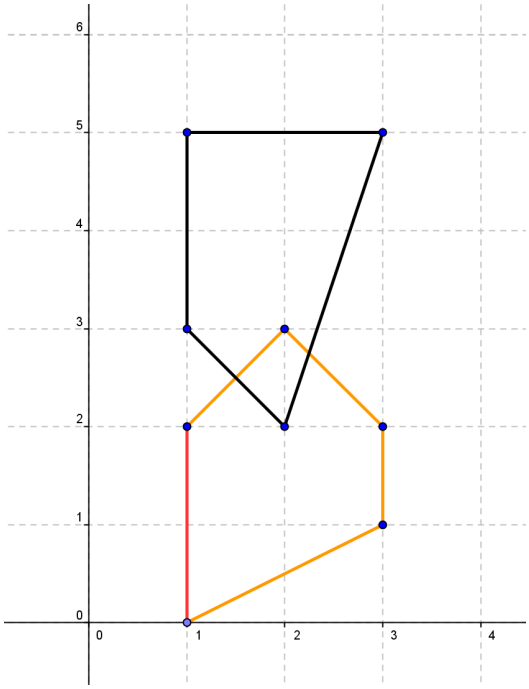
Fabian Prada (Uniandes)

a) Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax + bxy^2 + cx^2y + dx^2y^3 + ex^3y + fx^3y^2 = 0 \\ gxy^3 + hxy^4 + ixy^5 + jx^2y^2 + kx^2y^3 + lx^3y^5 = 0 \end{cases}$$

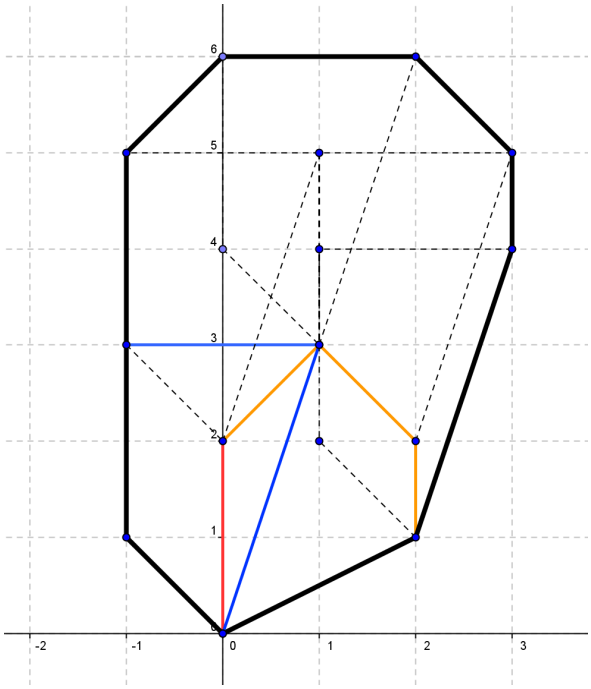
Donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ son números complejos genéricos, el Teorema de Berenstein nos dice que el número de isolated solutions del sistema en $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ es $2!Vol(P, Q)$, donde P y Q son los polítopos de Newton asociado a las ecuaciones, y $Vol(P, Q)$ es el mixed volume de los polítopos.

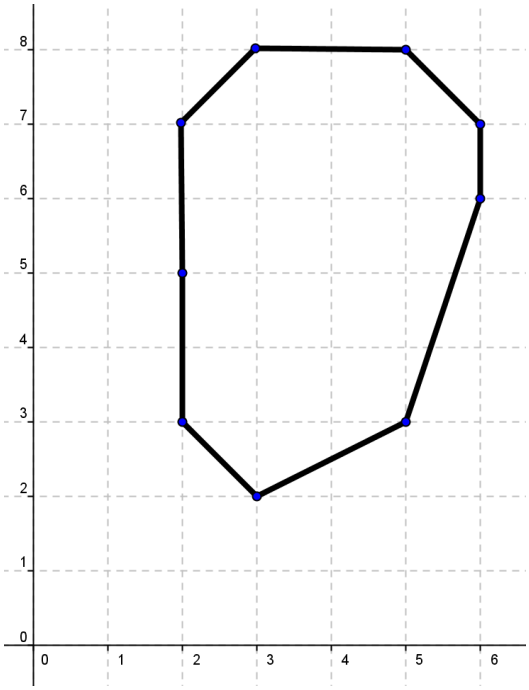
En este caso vemos que $P = conv\{(1,0)\ (1,2)\ (2,1)\ (2,3)\ (3,1)\ (3,2)\}$ y $Q = conv\{(1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (2,2)\ (2,3)\ (3,5)\}$ son los polítopos de Newton de las ecuaciones del sistema:



De la imagen anterior,podemos ver facilmente (por ejemplo usando T. de Pick) que $Vol(P) = 4$ y $Vol(Q) = 4$.

Tal como se vio en clase $2!Vol(P, Q) = Vol(P + Q) - Vol(P) - Vol(Q)$, por tanto nos hace falta hallar el volumen de la suma de Minkowski:





En la primera gráfica se desplazaron los polítopos al origen y se realizó alli la suma de Minkowski. En la segunda se revirtió la traslación para obtener la suma de Minkowski de los polítopos originales. Se observa en este caso que $Vol(P+Q) = 19$. Por tanto obtenemos que $2!Vol(P,Q) = 19-4-4 = 11$. De alli concluimos que el sistema tiene 11 isolated solutions en $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$. En la parte b) mostraré que el sistema **no** tiene isolated solutions en $\mathbb{C} \times \{0\}$ ni en $\{0\} \times \mathbb{C}$, de modo que efectivamente se puede afirmar que el sistema tiene 11 isolated nonzero solutions.

b) Del sistema de ecuaciones se observa que el conjunto $\{0\} \times \mathbb{C}$ es solución al sistema. Claramente ninguno de los puntos de este conjunto es isolated solution, por tanto el adjetivo isolated es **necesario** en el resultado del punto anterior.

Probemos ahora que tampoco pueden haber isolated solutions en $\mathbb{C} \times \{0\}$. Sabemos que $(0,0)$ no es isolated solution pues $(0,0) \in \{0\} \times \mathbb{C}$ que es un conjunto de soluciones. Por otra parte si $(z,0) \neq (0,0)$ es solucion del sistema, podemos afirmar que $a = 0$ y por tanto que todos los puntos en $\mathbb{C} \times \{0\}$ son soluciones.

Podemos concluir que todas las isolated solutions son nonzero solutions y por tanto que el dajetivo nonzero es **innecesario** en el enunciado del punto anterior.