Aplicaciones de teoría de residuos a funciones de partición en sistemas unimodulares y no unimodulares

Fabián Latorre - Fabián Prada

2010

1 Introducción

En este documento buscamos identificar los resultados más importantes del cálculo de funciones de partición en sistemas unimodulares via teoría de residuos. Quisimos implementar estos resultados en casos no unimodulares para identificar que tipo de distorsiones se presentan. En los casos particulares de estudio obtuvimos resultados favorables.

2 Preliminares

Siguiendo el articulo [1] introducimos los siguientes conceptos:

Sea U un espacio vectorial real de dimensión r y V su espacio vectorial dual. Sea $\Phi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} \subset V$ una sucesión de formas lineales sobre U. Sea $\triangle^+ := \{\alpha_i\}$, es decir Φ y $\triangle^+$ tienen los mismos elementos pero Φ puede tener multiplicidades. Considere $\mathbb{R}^n$ con base $e_1, \ldots, e_n$ y sea $A : \mathbb{R}^n \to V$ tal que $A(e_k) = \alpha_k$. Defina, para $a \in V$

$$P(\Phi, a) := \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \,|\, Ay = a\}$$

P es un politopo convexo. Es vacío si a no está en el cono generado por $\triangle^+$. De lo contrario es de dimensión $d = N - r = \dim(\ker(A))$.

Sin perder generalidad, podemos asumir $U = \mathbb{R}^r$. para $a \in V_{\mathbb{Z}}$, es decir, un vector de coordenadas enteras, defina

$$k(\Phi, a) := |P(\Phi, a) \cap \mathbb{Z}^N|$$

La función $k(\Phi, a)$ cuenta el número de formas distintas de expresar a como combinación lineal con coeficientes enteros positivos de los elementos de Φ, esto es, las formas de escribir $a = r_1\alpha_1 + \ldots + r_N\alpha_N$ con $r_i \in \mathbb{Z},\ r_i \geq 0$.

Denotamos por $C(\nu^+)$ el cono cerrado generado por $\nu^+ \subset \triangle^+$. Defina

$$C_{sing} := \bigcup_{|\nu^+|<r} C(\nu^+)$$

donde $r = \dim(V)$. Tome C_{reg} como el complemento de C_{sing}. Las componentes conexas de C_{reg} serán llamadas cámaras (chambers).

Ahora sea $\triangle = \triangle^+ \cup -\triangle^+$ y asuma que $\triangle$ genera V. Considere el arreglo de hiperplanos

$$H_{\mathbb{C}} = \bigcup_{\alpha \in \triangle} \{x \in U_{\mathbb{C}},\ \alpha(x) = 0\}$$

donde $V_{\mathbb{C}}$ denota la "complexificación" de U. Sea $R_\triangle$ el anillo de funciones racionales con polos en este arreglo de hiperplanos. Los elementos de $R_\triangle$ son de la forma $R(x) = P(x)/\prod_{\alpha\in\triangle} \alpha(x)^{n_\alpha}$ donde P es un polinomio en r variables complejas y los n_α son enteros no negativos. $\sigma \subset \triangle$ se llama base de $\triangle$ si sus elementos forman una base para V. Defina

$$f_\sigma(x) := \frac{1}{\prod_{\alpha\in\sigma} \alpha(x)}$$

y llamamos a estos los elementos simples. Sea $S_\triangle$ el subespacio de $R_\triangle$ generado por los elementos simples. U actua sobre $R_\triangle$ por diferenciación. Denotamos como $\partial(U)R_\triangle$ el generado por derivadas de funciones en $R_\triangle$.

Teorema 1 ([2], prop 7)

$$R_\triangle = \partial(U)R_\triangle \oplus S_\triangle$$

y llamamos a la proyección $\text{Tres}_\triangle : R_\triangle \to S_\triangle$, el residuo total (Total residue). Este mapa es cero en derivadas y también fuera de los componentes de grado $-r$.

Definición 1

$$K_\Phi(a) = \text{Tres}\left(\frac{e^a}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{-\alpha_k})}\right)$$

Definición 2. Para $\sigma \subset \triangle$, $\text{vol}(\sigma) = |\det(\sigma)|$, donde σ representa la matriz donde las columnas son los elementos de σ. Decimos que Φ es unimodular si $\text{vol}(\sigma) = 1$ para toda base $\sigma \subset \triangle$.

Ahora, para toda cámara c de $C(\triangle^+)$ existe una forma lineal asociada $f \mapsto \langle\langle c, f\rangle\rangle$ sobre el espacio $S_\triangle$. Basta definirla para funciones simples f_σ de la siguiente forma

Definición 3 $\langle\langle c, f\rangle\rangle := 1/\text{vol}(\sigma)$ si $c \subset C(\sigma)$. $\langle\langle c, f\rangle\rangle := 0$ de lo contrario.

El siguiente teorema permite cálcular $k(\Phi, a)$, en caso de sitemas unimodulares, a partir de esta teoría de residuos totales.

Teorema: (Dahmen, Micchelli) Suponga Φ unimodular. Sea $Z(\Phi)$ el zonotopo generado por Φ. Sea c una cámara de $C(\triangle^+)$ y sea $a \in V_{\mathbb{Z}}$. Para $a \in c - Z(\Phi)$

$$k(\Phi, a) = \langle\langle c, K_\Phi(a)\rangle\rangle$$

3 Caso Unimodular

Los resultados más importantes de la aplicación de Teoría de Residuos a funciones de partición, se concentran en sistemas **unimodulares** y especialmente en los sistemas de raíces del grupo lineal

$$A_r^+ = \{e_i - e_j : 1 \le i < j \le r + 1\}$$

Figure 1: A_5

En dichos sistemas, el problema de encontrar la cantidad de cámaras sigue siendo un problema abierto. Actualmente es conocida la cantidad de cámaras en los casos $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, que corresponde a 1, 2, 7, 48, 820, 44288 respectivamente. Para dimensiones superiores se han desarrollado programas para estimar la cantidad de cámaras, pero aun siguen siendo excesivamente costosos, por ejemplo, el tiempo computacional que tomó el conteo de cámaras en el caso de dimension 6 fue de alrededor de 24 dias y 18 horas! [6].

Para el sistema A_r^+, uno de los resultados mas celebrados en materia aplicaciones de Teoria de Residuos a funciones de partición, es el Teorema de Zeilberger, antes conocido como conjentura de Chan-Robbins-Yuen:

$$k\Big(A_r^+, \big(1, 2, 3, ..., r, -\frac{r(r+1)}{2}\big)\Big) = \Pi_{i=1}^r C_i$$

En la anterior expresion $C_i = \frac{1}{i+1}\binom{2n}{n}$, es decir, el i-ésimo número de Catalán. Una prueba detallada de este resultado se encuentra en [5].

A pesar del poco conocimiento que aún se tiene sobre las cámaras de A_r^+, existe una de particular interés, denomida **nice chamber** y que corresponde a

$$c_{nice} = \{(a_1, a_2, ..., a_r, -(a_1 + a_2 + ... + a_r)) : a_i \geq 0, 1 \leq i \leq r\}$$

Para esta cámara existen resultados teóricos interesantes, que permiten calcular el funcional $\langle\langle c_{nice}, f\rangle\rangle$, via Residuos Iterados:

$$\langle\langle c_{nice}, f\rangle\rangle = \text{Ires} f = \text{Res}_{x_1=0}\text{Res}_{x_2=0}\ldots\text{Res}_{x_r=0} f(x_1, x_2, ..., x_r) \tag{1}$$

La bibliografía que consultamos presentaba resultados teóricos de gran interes para calcularlas funciones de partición sobre subconjuntos $\Phi \subset A_r^+$. Además del Teorema de Dahmen-Michelli, destacamos los siguientes resultados:

Definiciones previas:

- $m_{i,j}$ es la multiplicidad de $e_i - e_j$ en Φ
- $t_i^\Phi = m_{i,i+1} + m_{i,i+1} + ... + m_{i,r+1} - 1$
- $f_c(\Phi, i) = \langle\langle c, \text{Tres}\left(\frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_r^{i_r}}{\Pi_{i=1}^r x_i^{m_{i,r+1}} \Pi_{1\leq i<j\leq r}(x_i - x_j)^{m_{i,j}}}\right)\rangle\rangle$
- $\Phi' = \Phi \setminus \{e_i - e_{r+1} : e_i - e_{r+1} \in \Phi\}$

Proposición 1(Baldoni-Vergne [5]):

$$k(\Phi, c)(a_1, a_2, ..., a_r) = \sum_{|i|=N-r} f_c(\Phi, i)\binom{a_1 + t_1^\Phi}{i_1}\binom{a_2 + t_2^\Phi}{i_2}...\binom{a_r + t_r^\Phi}{i_r} \tag{2}$$

Proposición 2 (Pitman-Stanley [1]):

$$f_{c_{nice}}(\Phi, i) = k\big(\Phi', (i_1 - t_1^{\Phi})e_1 + (i_2 - t_2^{\Phi})e_2 + ... + (i_r - t_r^{\Phi})e_r\big) \tag{3}$$

A partir de estas proposiciones se obtienen resultados particulares de interés como el propuesto por Pitman y Stanley [7] :

Proposición 3 : Defina $\Phi_{PS} = \{(e_i - e_{i+1}), (e_i - e_{r+1}) : 1 \leq i \leq r\} \subset A_r^+$ (Figura 2). Entonces

$$k(\Phi_{PS}, a) = \sum_{i \in K_r} \left(\binom{a_1 + 1}{i_1}\right)\left(\binom{a_2}{i_2}\right) ... \left(\binom{a_r}{i_r}\right)$$

donde

$$\left(\binom{u}{k}\right) = \frac{u(u+1)\dots(u+(k-1))}{k!}$$

$$K_r = \{(i_1, i_2, ..., i_r) : i_1 \geq 1, i_1 + i_2 \geq 2, i_1 + i_2 + ... + i_{r-1} \geq r - 1, i_1 + i_2 + ... + i_{r-1} + i_r = r\}$$

Figure 2: Φ_{PS}

3.1 Nuestro estudio del Caso Unimodular

Nuestro objetivo inicial era apoyarnos en la Teoría de Residuos para obtener resultados particulares sobre funciones de partición en subconjuntos $\Phi \subseteq A_r^+$ u otros sistemas unimodulares. Se esperaba obtener resultados que en su contenido se asemejaran al presentado en el Teorema de Zeilberger o en la Proposicion 3.

Sin embargo nuestros intentos por tales desarrollos fueron poco exitosos. Si bien los resultados teóricos que expusimos previamente describen de forma clara la manera en que se puede calcular la función de partición via Residuos Totales y Residuos Iterados, desarrollar de forma eficiente estos cálculos fue nuestro mayor problema.

Figure 3: Φ_5

Por ejemplo nos interesamos en tomar $\Phi_r = \{(e_i - e_{i+1}), (e_i - e_{i+2}) : 1 \leq i \leq r\}$ (ver figura 3), y $b_r = e_1 - e_{r+1}$. Para este caso observamos que $k(\Phi_r, b_r) = k(\Phi_{r-1}, b_{r-1}) + k(\Phi_{r-2}, b_{r-2})$, y siendo $k(\Phi_1, b_1) = 1$, y $k(\Phi_2, b_2) = 2$ concluimos que $k(\Phi_r, b_r) = F_r$, el r-esimo Fibonacci. Ahora deseabamos obtener este mismo resultado via teoria de residuos.

Tomando $i = (2, 1, 1, ..., 1, 0, 0)$, $\Phi = \Phi_r$, y aplicando la Proposición 2 obtenemos

$$f_{c_{nice}}(\Phi_r,(2,1,...1,0,0)) = k\big(\Phi_{r-1}, e_1 - e_r\big)$$

A partir de las definiciones tenemos que

$$f_{c_{nice}}(\Phi_r,(2,1,...1,0,0)) = \langle\langle c_{nice}, \text{Tres}\left(\frac{x_1^2 x_2 ... x_{r-2}}{x_{r-1}x_r\Pi_{i=1}^{r-1}(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})}\right)\rangle\rangle$$

y aplicando la ecuación 1, obtenemos

$$k\big(\Phi_{r-1}, e_1 - e_r\big) = \text{Ires}\Big(\text{Tres}\left(\frac{x_1^2 x_2 ... x_{r-2}}{x_{r-1}x_r\Pi_{i=1}^{r-1}(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})}\right)\Big)$$

Por lo tanto nos interesaba calcular este último término y verificar que coincidiera con F_{r-1}. Sin embargo no pudimos idear una manera eficiente de llevar a cabo estos cálculos. Al tomar otros conjuntos $\Phi \subset A_r^+$ y $a \in c_{nice}$, presentamos las mismas dificultades.

En la busqueda de situaciones para las cuales el cálculo de residuos se pudiese desarrollar de forma eficiente, nos encontramos con sistemas no unimodulares. Nos interesamos en estudiar la factibilidad de aplicar los resultados expuestos previamente (que se limitan a sistemas Unimodulares) a casos No Unimodulares . En las siguientes secciones presentamos los intersantes resultados obtenidos en ejemplos particulares de sistemas No Unimodulares, y nuestras conjeturas acerca de la validez de ciertos resultados.

Para resultados formales en materia de funciones de partición en sistemas no unimodulares, los artículos [3] y [4] presentan resultados interesantes.

Nota: No alcanzamos a comparar nuestros resultados particulares, con los resultados teóricos presentes en estos artículos, pero nos hubiera parecido interesante hacerlo.

4 Ejemplo No Unimodular 1

Consideremeos el conjunto *no unimodular* $\Phi = \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1\}$. Para dicho conjunto nos interesamos en conocer $k(\Phi,(t,t,t))$ siendo t entero positivo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P_\Phi(v) = \{x : Ax = v, x \geq 0\}$$

Podemos observar que $P_\Phi(t,t,t) = tP_\Phi(1,1,1)$ y $k_\Phi(t,t,t) = |tP_\Phi(1,1,1) \cap \mathbb{Z}^6|$.

De la H-description de $P_\Phi(1,1,1)$ deducimos que este es un politopo de dimensión 3 contenido en $\mathbb{R}^6$ que podemos representar como la figura 4.

Figure 4: $P_\Phi(1,1,1)$

Dado que $P_\Phi(1,1,1)$ no es integral (debido a la no unimodularidad del sistema) la función $k_\Phi(t,t,t) = |nP_\Phi(1,1,1) \cap \mathbb{Z}^6|$ va ser cuasipolinomial. Dado que $P_\Phi(2,2,2)$ si es politopo integral, podemos afirmar que el cuasipolinomio sera de periodicidad 2, es decir, vamos a tener un polinomio asociado a los valores pares de t y otro asociado a los valores impares. Como $P_\Phi(1,1,1)$ es 3-dimensional afirmamos además que los polinomios asociados serán de grado 3.

Procedamos ahora a aplicar los resultados de la Teoria de Residuos a este caso particular no unimodular..Para ello se deben tener en cuenta las siguientes observaciones:

- En primer lugar notemos que para el sistema Φ tenemos 12 big cámaras:

- Dado que el vector (t,t,t) pertence a la clausura de varias de las cámaras, podemos tomar como cámara de base (i.e, la cámara sobre la cual se desarrollarán los cálculos) cualquiera de ellas. Sin pérdida de generalidad vamos a trabajar sobre la cámara c_1 que corresponde a

$$\mathrm{Cone}(e_1, e_1+e_2, e_2+e_3) \cap \mathrm{Cone}(e_3, e_3+e_1, e_1+e_2)$$

- Recordemos que

$$K_\Phi(a) = \mathrm{Tres}\left(\frac{e^a}{\prod_{k=1}^N (1-e^{-\alpha_k})}\right)$$

A partir de las expansiones :

$$e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + ...$$

$$\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12}\alpha^2 - \frac{1}{720}\alpha^4 + \dots,$$

podemos escribir

$$\frac{e^a}{\Pi_{\alpha\in\Phi} 1-e^{-\alpha}} = \left(1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \dots\right)\left(\Pi_{\alpha\in\Phi}\frac{1}{\alpha}(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12}\alpha^2 - \frac{1}{720}\alpha^4 ...)\right) \tag{4}$$

En este caso, para calcular $K(\Phi,(t,t,t))$ nos interesan únicamente los términos de grado -3 de la ecuación (4). Dichos términos son:

$$\frac{a^3}{3!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha} + \frac{a^2}{2!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\left(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{a}{\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\left(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha^2}{12} + \sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\frac{\alpha_i\alpha_j}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\left(\sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\frac{\alpha_i^2\alpha_j}{24} + \sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\neq\alpha_k\in\Phi}\frac{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{8}\right) \tag{5}$$

Llamemos $\tilde{k}(\Phi,(t,t,t)) = \langle\langle c_1, K(\Phi,(t,t,t)\rangle\rangle$. Procedemos a calcular este polinomio:

Coeficiente de grado 3:

Para nuestro caso de interés, $\Phi = \{e_1, e_2, e_3, e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_1\}$,$a = te_1 + te_2 + te_3$, vemos que:

$$\frac{a^3}{3!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha} = \frac{t^3\left(e_1+(e_2+e_3)\right)\left(e_2+(e_3+e_1)\right)\left(e_3+(e_1+e_2)\right)}{3!e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}$$

$$= \frac{t^3}{3!}\left(\frac{1}{(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)} + \frac{1}{e_1e_2e_3} + \sum_{cyc}\frac{1}{e_1(e_1+e_2)(e_1+e_3)} + \sum_{cyc}\frac{1}{e_2e_3(e_2+e_3)}\right)$$

Vease que :

- $c_1 \subseteq \mathrm{Cone}((e_1+e_2),(e_2+e_3),(e_3+e_1))$ y $\det((e_1+e_2),(e_2+e_3),(e_3+e_1)) = 2$, entonces $\langle\langle c_1, \frac{1}{(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}\rangle\rangle = \frac{1}{2}$
- $c_1 \subseteq \mathrm{Cone}(e_1,e_2,e_3)$, y $\det(e_1,e_2,e_3) = 1$, entonces $\langle\langle c_1, \frac{1}{e_1e_2e_3}\rangle\rangle = 1$
- $c_1 \not\subset \mathrm{Cone}(e_1,(e_1+e_2),(e_1+e_3))$ entonces $\langle\langle c_1, \frac{1}{e_1(e_1+e_2)(e_1+e_3)}\rangle\rangle = 0$ (válido para los demás ordenamientos)
- $c_1 \not\subset \mathrm{Cone}(e_2,e_3,(e_2+e_3))$ entonces $\langle\langle c_1, \frac{1}{e_2e_3(e_2+e_3)}\rangle\rangle = 0$ (válido para los demás ordenamientos)

De los resultados anteriores se deduce que

$$\langle\langle c_1, \frac{a^3}{3!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\rangle\rangle = \frac{1}{4}t^3$$

Coeficiente de grado 2:

Procedamos ahora a calcular el segundo término. Dado que $\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}(e_1+e_2+e_3)$

$$\frac{a^2}{2!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\left(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3t^2}{4}\frac{(e_1+e_2+e_3)^3}{e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}$$

Del caso anterior se deduce que $\langle\langle c_1, \frac{(e_1+e_2+e_3)^3}{e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}\rangle\rangle = \frac{3}{2}$. Por lo tanto concluimos que $\langle\langle c_1, \frac{a^2}{2!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\left(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2}\right)\rangle\rangle = \frac{9}{8}t^2$.

Coeficiente de grado 1:

Observemos que

$$\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha^2}{12} + \sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\frac{\alpha_i\alpha_j}{4} = \frac{1}{12}\left(\Big(\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha\Big)^2 + \Big(\sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\alpha_i\alpha_j\Big)\right)$$

En nuestro caso

$$\Big(\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha\Big)^2 = 9(e_1+e_2+e_3)^2$$

$$\sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\alpha_i\alpha_j = 3(e_1+e_2+e_3)^2 + 2(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{12}\Big((\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha)^2 + (\sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\alpha_i\alpha_j)\Big) = \frac{1}{12}\Big(12(e_1+e_2+e_3)^2 + 2(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)\Big)$$

Obtenemos que

$$\frac{a}{\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\left(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha^2}{12} + \sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\frac{\alpha_i\alpha_j}{4}\right) =$$

$$\frac{(e_1+e_2+e_3)^3}{e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)} + \frac{1}{6}\frac{(e_1+e_2+e_3)(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)}{e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}$$

Sabemos que $\langle\langle c_1, \frac{(e_1+e_2+e_3)^3}{e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}\rangle\rangle = \frac{3}{2}$. Por su parte,

$$\frac{(e_1+e_2+e_3)(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)}{e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)} = \frac{3}{(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)} + \sum_{sym}\frac{e_1}{e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}$$

$$= \frac{3}{(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)} + \sum_{sym}\Big(\frac{1}{e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)} - \frac{1}{(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}\Big)$$

$$= \sum_{sym}\frac{1}{e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)} - \frac{3}{(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}$$

Existen 3 permutaciones, $\sigma\in S_3$ para las cuales $c_1\subset \mathrm{Cone}(e_{\sigma(1)}, (e_{\sigma(2)}+e_{\sigma(3)}), (e_{\sigma(3)}+e_{\sigma(1)}))$:

(esto se cumple para cualquiera de las cámaras que contiene el punto (t,t,t), es decir, $c_1, c_4, c_5, c_8, c_9, c_{12}$)

Como $\det(e_{\sigma(1)}, (e_{\sigma(2)}+e_{\sigma(3)}), (e_{\sigma(3)}+e_{\sigma(1)})) = 1$, concluimos que $\langle\langle c_1, \sum_{sym}\frac{1}{e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)}\rangle\rangle = 3$. Por su parte $\langle\langle c_1, \frac{3}{(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}\rangle\rangle = \frac{3}{2}$, de lo cual obtenemos

$$\langle\langle c_1, \frac{(e_1+e_2+e_3)(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)}{e_1e_2e_3(e_1+e_2)(e_2+e_3)(e_3+e_1)}\rangle\rangle = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto llegamos a

$$\langle\langle c_1, \frac{a}{\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\left(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha^2}{12} + \sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\frac{\alpha_i\alpha_j}{4}\right)\rangle\rangle = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\frac{3}{2}\right)t = \frac{7}{4}t$$

Coeficiente de grado 0

Véase que

$$\sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \Phi} \frac{\alpha_i^2 \alpha_j}{24} + \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \neq \alpha_k \in \Phi} \frac{\alpha_i \alpha_j \alpha_k}{8} = \frac{1}{48}\Big((\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha)^3 - (\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha^2)(\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha) \Big)$$

En este caso $\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha^2 = 3(e_1 + e_2 + e_3)^2 - 4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)$, por lo tanto

$$\Big(\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha \Big)^3 - \Big(\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha^2 \Big) \Big(\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha \Big) = 18(e_1 + e_2 + e_3)^3 + 12(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)(e_1 + e_2 + e_3)$$

Entonces

$$\langle\langle c_1, \frac{1}{\Pi_{\alpha \in \Phi} \alpha} (\sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \Phi} \frac{\alpha_i^2 \alpha_j}{24} + \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \neq \alpha_k \in \Phi} \frac{\alpha_i \alpha_j \alpha_k}{8}) \rangle\rangle =$$

$$\frac{1}{48}(18\frac{3}{2} + 12\frac{3}{2}) = \frac{15}{16}$$

Con base en los resultados anteriores podemos finalmente concluir que

$$\tilde{k}(\Phi, (t,t,t)) = \langle\langle c_1, K_\Phi(a) \rangle\rangle = \frac{1}{4}t^3 + \frac{9}{8}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{15}{16}$$

Resultado via interpolación

Como se mencionó previamente la función $k(\Phi, (t,t,t))$ es cuasipolinomial de período 2 en t, siendo dichos polinomios de grado 3. Por tanto es sencillo cálcular los respectivos polinomios vía interpolación. Para hallar los valores de interpolación, contruimos un algoritmo simple de conteo que recorre los puntos enteros del cubo $C = [0,t]^6$ y verifica que sean solución de $Ax = (t,t,t)$. Se obtuvo el siguiente resultado:

- si t es impar $k(\Phi, (t,t,t)) = \frac{1}{4}t^3 + \frac{9}{8}t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{7}{8}$
- si t es par $k(\Phi, (t,t,t)) = \frac{1}{4}t^3 + \frac{9}{8}t^2 + \frac{7}{4}t + 1$

Observamos que a pesar que el sistema no es unimodular, el resultado obtenido acerca de la función de partición via teoría de residuos se acerca satisfactoriamente a la función real de partición, siendo $|k(\Phi, (t,t,t)) - \tilde{k}(\Phi, (t,t,t))| = 1/16$

5 Una aproximación a la generalización del ejemplo anterior

El objetivo ahora es extender el resultado previo:

Siendo $e_1, e_2, ..., e_n$ la base canonica de $\mathbb{R}^n$, defina $\hat{e}_i = (1,1,1,...,1) - e_i$ y $\Phi_n = \{e_i, \hat{e}_i : i = 1,2,...,n\}$. El problema al que nos enfrentamos es hallar $k(\Phi_n, a)$ cuando $a = (t,t,...,t)$

Para ello nos interesan los terminos de grado $-n$ en la expresion

$$\frac{e^a}{\Pi_{\alpha\in\Phi}1-e^\alpha}=(1+a+\frac{1}{2!}a^2+\frac{1}{3!}a^3+...)\Big(\Pi_{\alpha\in\Phi}\frac{1}{\alpha}(1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{12}\alpha^2+0\alpha^3+??\alpha^4...)\Big)$$

Los primeros terminos de dicha serie son

$$\frac{a^n}{n!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2})+\frac{a^{n-2}}{(n-2)!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha^2}{12}+\sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\frac{\alpha_i\alpha_j}{4})$$
$$+\frac{a^{n-3}}{(n-3)!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}(\sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\in\Phi}\frac{\alpha_i^2\alpha_j}{24}+\sum_{\alpha_i\neq\alpha_j\neq\alpha_k\in\Phi}\frac{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{8})...$$

Procedemos ahora a calcular los primeros dos coeficientes de mayor grado en $\langle\langle c, K(\Phi_n, a)\rangle\rangle$.

Coeficiente de grado n:

Observamos que

$$\frac{a^n}{n!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}=\frac{t^n}{n!}\frac{(e_1+e_2+\ldots+e_n)^n}{\Pi_{i=1}^n e_i\hat{e_i}}=\frac{t^n}{n!}\frac{\Pi_{i=1}^n(e_i+\hat{e_i})}{\Pi_{i=1}^n e_i\hat{e_i}}$$

lo cual corresponde a

$$\sum_{f=(f_1,...,f_n):f_i\in\{e_i,\hat{e_i}\}}\frac{1}{f_1...f_n}$$

Se puede probar que los unicos vectores f para los cuales $(t,t,...,t)\in\text{Cone}(f)$, son los vectores $(e_1,e_2,...,e_n)$ y $(\hat{e_1},\hat{e_2},...,\hat{e_n})$.

Como $\det(e_1,e_2,...,e_n)=1$ y $|\det(\hat{e_1},\hat{e_2},...,\hat{e_n})|=\frac{1}{n-1}$, podemos afirmar que

$$\langle\langle c,\frac{a^n}{n!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}\rangle\rangle=\frac{t^n}{n!}(1+\frac{1}{n-1})=\frac{1}{(n-1)(n-1)!}t^n$$

Coeficiente de grado n-1:

Como $\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2}=\frac{n}{2}(e_1+e_2+\ldots+e_n)$, el siguiente termino del polinomio corresponde a

$$\frac{a^{n-1}}{(n-1)!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2})=\frac{nt^{n-1}}{2(n-1)!}\frac{(e_1+e_2+\ldots+e_n)^n}{\Pi_{i=1}^n e_i\hat{e_i}}$$

por el resultado previo concluimos entonces que

$$\langle\langle c,\frac{a^{n-1}}{(n-1)!\Pi_{\alpha\in\Phi}\alpha}(\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\alpha}{2})\rangle\rangle=\frac{nt^{n-1}}{2(n-1)!}(1+\frac{1}{n-1})=\frac{n^2}{2(n-1)(n-1)!}t^{n-1}$$

Con base en los resultados anteriores conjeturamos que

$$k(\Phi_n,(t,t,\ldots,t)) = \frac{1}{(n-1)(n-1)!}t^n + \frac{n^2}{2(n-1)(n-1)!}t^{n-1} + \ldots$$

Estos primeros términos nos dan una aproximación al orden de magnitud de $k(\Phi_n, a)$. Además se debe tener en cuenta que estos coeficientes nos indican un valor de volúmen y superficie relativa del politopo $P_{\Phi_n}(a)$.

Resultados computacionales

Via interpolación buscabamos calcular el Ehrhart polynomial de $P_{\Phi_n}(n-1, n-1, \ldots, n-1)$ que es un politopo integral.

Para $n = 4$:

$$k(\Phi_4,(t,t,t,t)) = 1 + 2t + \frac{25}{18}t^2 + \frac{4}{9}t^3 + \frac{1}{18}t^4 \quad \text{para } t \text{ múltiplo de } 3$$

En este caso se observa que los coeficientes de grados $4, 3$ corresponden a $\frac{1}{(n-1)(n-1)!}t^n$ y $\frac{n^2}{2(n-1)(n-1)!}t^{n-1}$, tal como se esperaba.

Para valores de n mayores a 4, no dispusimos de máquinas adecuadas para llevar a cabo el cálculo en un tiempo considerable.

6 Ejemplo No Unimodular 2

En esta sección se estudiarán los resultados de aplicar la Teoría de Residuos en el cálculo de las funciones de partición asociados a las distintas cámaras de un sencillo sistema no unimodular. El caso de estudio es el siguiente:

Defina $\Phi = \{e_1, e_2, e_1+e_2, e_1+2e_2, e_2+2e_1\}$. Para este sistema tendremos 4 cámaras que corresponden a :

En este caso, nos interesa calcular los terminos de $K_\Phi(a)$ de grado -2, que corresponde precisamente con la ecuación (5).

Tomando $a = a_1e_1 + a_2e_2$ y expandiendo en la ecuación (5). observamos que este caso particular los de terminos de interesan son:

$$- \; g_{1^3} = \frac{e_1^3}{e_1e_2(e_1+e_2)(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)} = \frac{1}{e_2(e_1+e_2)} - \frac{2}{(e_1+e_2)(e_1+2e_2)} - \frac{1}{e_2(2e_1+e_2)} + \frac{2}{(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)}$$

- $g_{1^22} = \frac{e_1^2 e_2}{e_1e_2(e_1+e_2)(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)} = \frac{1}{(e_1+2e_2)(e_1+e_2)} - \frac{1}{(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)}$
- $g_{12^2} = \frac{e_1 e_2^2}{e_1e_2(e_1+e_2)(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)} = \frac{1}{(e_2+2e_1)(e_1+e_2)} - \frac{1}{(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)}$
- $g_{2^3} = \frac{e_2^3}{e_1e_2(e_1+e_2)(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)} = \frac{1}{e_1(e_1+e_2)} - \frac{2}{(e_1+e_2)(e_2+2e_1)} - \frac{1}{e_1(2e_2+e_1)} + \frac{2}{(e_1+2e_2)(e_2+2e_1)}$

A partir de estos terminos la ecuación (5) se escribe en la forma:

$$\frac{1}{6}(a_1^3)g_{1^3} + 3a_1^2a_2g_{1^22} + 3a_1a_2^2g_{12^2} + a_2^3g_{2^3}) + \frac{5}{4}(a_1^2(g_{1^3} + g_{1^22}) + 2a_1a_2(g_{1^22} + g_{12^2})$$
$$+a_2^2(g_{2^3}+g_{12^2}))+\frac{1}{6}(a_1(17g_{1^3}+35g_{1^22}+17g_{12^2})+a_2(17g_{1^22}+35g_{12^2}+17g_{2^3}))+\frac{15}{8}g_{1^3}+\frac{145}{24}g_{1^22}+\frac{145}{24}g_{12^2}+\frac{15}{8}g_{2^3} \tag{6}$$

Para hallar el valor de $\langle\langle c_i, K_\Phi(a)\rangle\rangle$ en cada una de las cámaras debemos hallar el valor de $\langle\langle c_i, g_\gamma\rangle\rangle$ para cada una de las combinaciones de i y γ. En este caso obtenemos:

$\langle\langle c_i, g_\gamma\rangle\rangle$				
	c_1	c_2	c_3	c_4
g_{1^3}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
g_{1^22}	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
g_{12^2}	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
g_{2^3}	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$

Reemplazando en (6) por los valores de la tabla anterior llegamos a los siguientes resultados:

- $\tilde{k}_{c_1,\Phi}(a_1, a_2) = \frac{1}{12}a_1^3 + \frac{5}{8}a_1^2 + \frac{17}{12}a_1 + \frac{15}{16}$
- $\tilde{k}_{c_2,\Phi}(a_1, a_2) = \frac{1}{6}(\frac{-5}{6}a_1^3 + 2a_1^2a_2 - a_1a_2^2 + \frac{1}{6}a_2^3) + \frac{5}{4}(\frac{-1}{6}a_1^2 + \frac{2}{3}a_1a_2 + \frac{-1}{6}a_2^2) + \frac{7}{12}a_1 + \frac{5}{12}a_2 + \frac{55}{72}$
- $\tilde{k}_{c_3,\Phi}(a_1, a_2) = \frac{1}{6}(\frac{1}{6}a_1^3 - a_1^2a_2 + 2a_1a_2^2 + \frac{-5}{6}a_2^3) + \frac{5}{4}(\frac{-1}{6}a_1^2 + \frac{2}{3}a_1a_2 + \frac{-1}{6}a_2^2) + \frac{5}{12}a_1 + \frac{7}{12}a_1 + \frac{55}{72}$
- $\tilde{k}_{c_4,\Phi}(a_1, a_2) = \frac{1}{12}a_2^3 + \frac{5}{8}a_2^2 + \frac{17}{12}a_2 + \frac{15}{16}$

Tal como se esperaba, las funciones coinciden en las fronteras de las cámaras, salvo el término constante.

Resultados de implementación:

Caso 1: Comparación respecto a $P_\Phi(t, t)$

Definiendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } P_\Phi(v) = \{x : Ax = v, x \geq 0\}$$

Podemos probar que

$$P_\Phi(1,1) = conv\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \right\}$$

(Omitimos prueba), y por ende $P_\Phi(6,6)$ es un polítopo entero. Por lo tanto, la función $k(\Phi,(t,t)$ es cuasipolinomial y tendrá periodicidad un divisor de 6.

Con base en los resultados obtenidos a partir de la teoría de residuos pronosticamos, tomando $a_1 = a_2 = t$, y reemplazando en c_2 o c_3 que $\tilde{k}(\Phi,(t,t)) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{5}{12}t^2 + t + \frac{55}{72}$.

Teniendo en cuenta la periodicidad de $k(\Phi,(t,t))$ calculamos los polinomios respectivos via interpolación, obteniendo los siguientes resultados:

- si $t = 6n$ entonces $k(\Phi,(t,t)) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{5}{12}t^2 + t + 1$
- si $t = 6n+1$ entonces $k(\Phi,(t,t)) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{5}{12}t^2 + t + \frac{19}{36}$
- si $t = 6n+2$ entonces $k(\Phi,(t,t)) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{5}{12}t^2 + t + \frac{8}{9}$
- si $t = 6n+3$ entonces $k(\Phi,(t,t)) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{5}{12}t^2 + t + \frac{3}{4}$
- si $t = 6n+4$ entonces $k(\Phi,(t,t)) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{5}{12}t^2 + t + \frac{7}{9}$
- si $t = 6n+5$ entonces $k(\Phi,(t,t)) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{5}{12}t^2 + t + \frac{23}{36}$

En este caso volvemos a tener que $\tilde{k}(\Phi,(t,t))$ corresponde al promedio tomado sobre los 6 polinomios $k(\Phi,(t,t))$ para $t = 6n, 6n+1, \ldots, 6n+5$. Además como $|k(\Phi,(t,t)) - \tilde{k}(\Phi,(t,t))| \geq 1/2$, podemos considerar que la aproximación $\tilde{k}$ es aceptable.

Caso 2: Comparación en puntos aleatorios

Via un sencillo algoritmo de conteo, hallamos los valores de $k(\Phi,(a_1,a_2))$ y los comparamos con $\tilde{k}(\Phi,(a_1,a_2))$ según la cámara correspondiente.

cámara c_1

(a_1,a_2)	$(4,9)$	$(9,21)$	$(15,39)$	$(23,60)$
$k(\Phi,(a_1,a_2))$	22	125	444	1378
$\tilde{k}(\Phi,(a_1,a_2))$	21.9375	125.0625	444.0625	1378.0625

cámara c_2

(a_1,a_2)	$(9,17)$	$(13,15)$	$(26,40)$	$(33,40)$
$k(\Phi,(a_1,a_2))$	124	241	1842	3083
$\tilde{k}(\Phi,(a_1,a_2))$	$124+\frac{17}{72}$	$241+\frac{1}{8}$	$1841+\frac{55}{72}$	3083

De los resultados anteriores se concluye que la función $\tilde{k}(\Phi, (a_1, a_2))$ hallada via teoría de residuos, es una aproximación satisfactoria de la función de partición real. También observamos la naturaleza cuasipolinomial que tiene la función de partición real en cada una de las cámaras.

7 Conclusiones

Si bien hay varios resultados que relacionan funciones de partición de sistemas unimodulares con la teoría de residuos (residuos iterados y residuos totales), en la práctica, los cálculos necesarios para aprovechar estas herramientas pueden ser costosos y complejos. Por lo tanto es necesario profundizar en técnicas para simplificar los procedimientos necesarios.

A pesar de que los resultados más importantes de aplicaciones de la teoría de residuos a funciones de partición se enuncian en el contexto de sistemas unimodulares, pudimos observar que permiten obtener buenas aproximaciones de funciones de partición en casos no unimodulares. En consecuencia se debe seguir estudiando las modificaciones necesarias para extender dichos resultados al contexto de sistemas no unimodulares.

References

[1] W. Baldoni, M. Vergne. *Kostant partition functions and flow polytopes.*Transformation Groups, Vol. 13, Nos. 3-4, pp. 447-469. 2008

[2] M. Brion, M. Vergne, Arrangements of hyperplanes I: Rational functions and Jeffrey-Kirwan residue, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. 32. pp. 715-741. 1999

[3] C. De Concini, C. Procesi, M. Vergne, Vector partition function and generalized Dahmen-Micchelli spaces. 2008.

[4] A. Szenes, M. Vergne, Residue formulae for vector partitions and Euler?MacLaurin sums, Adv. in Appl. Math. 30 pp. 295?342. 2003.

[5] W. Baldoni-Silva, M. Vergne, Residues formulae for volumes and Ehrhart polynomi- als of convex polytopes. 2001

[6] W. Baldoni, M. Beck, C. Cochet, M. Vergne, Volume computation for polytopes and partition functions for classical root systems, Discrete Comput. Geom. 35 pp. 551-595. 2006.

[7] J. Pitman and R. Stanley: A polytope related to empirical dis- tribution, plane trees, parking functions, and the associahedron. Elec- tronic preprint (1999).