Homework 2

Fabian Prada (Uniandes)

Problema 1(Trabaje con Sebastian Olano y Diego Cifuentes en este problema):

Sea P un d-politopo en $\mathbb{R}^n$, el cual podemos caracterizar, usando la H description, como $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ donde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Definase $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, como $Tx = -Ax + b$. Se va a probar que T es inyectiva en el politopo P: tome $v \neq w \in P$, si $Tv = Tw \Rightarrow Av = Aw \Rightarrow A(v - w) = 0$. Llame $u := (v - w)$, como $v \in P$ sabemos que $Av \leq b$ y por ende $A(v+\alpha u) \leq b$, de lo cual concluimos que $v+\alpha u \in P$ para todo α. Dado que P es acotado y $u \neq 0$ llegamos a una contradiccion, de la cual deducimos que $Tv \neq Tw$ para todos $v \neq w \in P$. De lo anterior se concluye que $T : P \to T[P]$ es un isomorfimo, y por tanto que P es afinmente isomorfo a $T[P]$ (pues T es una transformacion afin).

Veamos ahora que representa $T[P]$. $x \in T[P] \iff x = -Ap_x + b$ para algun $p_x \in P \iff x \in T[\mathbb{R}^n]$ y $x \geq 0$ (pues $0 \leq -Ap + b$ ssi $p \in P$) $\iff x \in T[\mathbb{R}^n] \cap R^m_{\geq 0}$. Por tanto podemos afirmar $T[P] = T[\mathbb{R}^n] \cap \mathbb{R}^m_{\geq 0}$. Claramente $T[\mathbb{R}^n] = -A[\mathbb{R}^n] + b \subseteq \mathbb{R}^m$ es un subespacio afin, por ende podemos concluir que P es afinmente isomorfo a $T[\mathbb{R}^n] \cap \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ donde $T[\mathbb{R}^n]$ es un espacion afin de $\mathbb{R}^m$. Esto es precisamente lo que se deseaba probar.

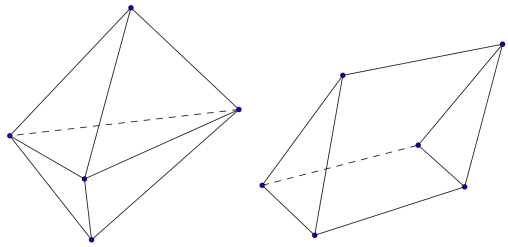
Problem 2:

i)Para el caso de 9 aristas podemos deducir por la ecuacion de Euler que $V+F = 11$, y aplicando las desigualdadas probadas en la tarea anterior ($V \leq 2F - 4$, y $F \leq 2V - 4$), se puede concluir que los casos a considerar son $(V, F, E) = (5, 6, 9)$ y $(V, F, E) = (6, 5, 9)$.

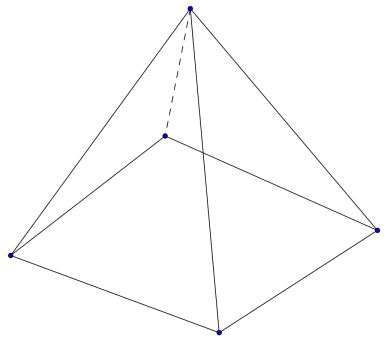
Para el caso $(V, F, E) = (5, 6, 9)$, podemos deducir que todas las caras del politopo van a ser triangulares, pues en general $3F \leq 2E$ y la igualdad solo se tiene, como en este caso, cuando todas las caras son triangulares. De igual forma sabemos que $e_{v_1} + e_{v_2} + ... + e_{v_5} = 2E = 18$ (donde e_{v_i} es el numero de aristas conectadas al vertice i) y $3 \leq e_{v_i} \leq 4$, pues de cada vertice salen al menos 3 aristas y no pueden salir 5 aristas ya que ello implica la existencia de al menos 6 vertices. De las condiciones anteriores se deduce que deben haber 3 vertices de grado 4 y 2 de grado 3. Dado que no pueden haber 4 vertices coplanares (de ser asi tendriamos una piramide y ello no cumpliria $(V, F, E) = (5, 6, 9)$), podemos considerar P el plano que contiene los 3 vertices de grado 4. Vease que los otros 2 vertices restante no pueden estar al mismo lado del plano (pues cada uno tendria que estar conctado con los 3 vertices del plano P (para que los vertices del plano P tengan grado 4) y entre ellos mismos, con lo cual no satisfacen la condicion de ser de grado 3), y si estan en lados diferentes del plano se satisfacen las condiciones buscadas. Se concluye que el unico politopo $(V, F, E) = (5, 6, 9)$ se construye uniendo dos tetrahedros por una misma cara.

Vease que el politopo anterior induce un politopo dual (asumiendo que 0 esta en el interior) que caracterizado por el vector $(V, F, E) = (6, 5, 9)$. El politopo con el vector anterior tambien es unico, pues si existiese otro con esas carcteristicas, su dual volveria a ser de la forma $(V, F, E) = (5, 6, 9)$ (que ya probamos por construccion que es unico) y conociendo que el dual del dual vuelve a si

mismo (bajo condiciones de 0 interior) descartamos esa posiblidad. Por tanto los unicos politopos de 9 aristas son duales entre si y se representan:

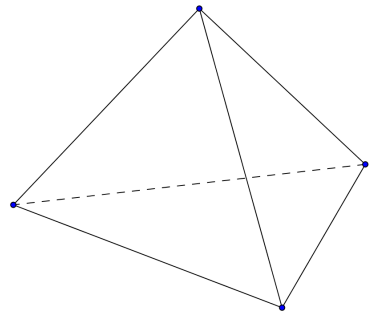


ii)Para el caso $E = 8$, la ecuacion de Euler y las desigualdades ya tratadas, nos dicen que el unico caso a considerar es $(V, F, E) = (5, 5, 8)$. De la ecuacion $e_{f_1} + e_{f_2} + ... + e_{f_5} = 2E = 16$,($e_{f_i}$ el numero de aristas en la cara i), y de la desigualdad $e_{f_i} \geq 3$, se deduce que debe haber 1 cara con 4 aristas y 4 caras con 3 aristas. Tomando la cara de 4 aristas (4 vertices), y cualquier vertice exterior a ella obtenemos el unico politopo posible con el vector $(V, F, E) = (5, 5, 8)$, esto es, una piramide de base cuadrada. Dado que el politopo dual a este presenta el mismo vector $(V, F, E) = (5, 5, 8)$, concluimos que este politopo es dual a si mismo:



iii)Para el caso $E = 7$,la ecuacion de Euler y las desigualdades no poseen solucion, por ende no hay politopos con estas condiciones.

iv)Para el caso $E = 6$, la ecuacion de Euler y las desigualdades nos dicen que el unico vector a considerar es $(V, F, E) = (4, 4, 6)$. Vease que los cuatros vertices no puden ser coplanares, y al no serlos, el politopo que formaran es un tetraedro, que ademas cumple las condiciones $(V, F, E) = (4, 4, 6)$. Por ende el tetraedro es el unico politopo que satisface $E = 6$ y sera dual a si mismo.



Problema 3(Trabaje con Fabian Latorre este problema):

a) Sea P un d-politopo, y sea $f_P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_1x + a_0$ su f-polinomio asociado. Considere la inyeccion $P \to (P,0) \subseteq R^{d+1}$ y defina $pyr(P) = convex\{(P,0), e_{d+1}\}$, siendo $e_{d+1} = (0,0,...,0,1) \in R^{d+1}$.Se va a probar que $f_{pyr(P)} = x^{d+1} + (a_d + a_{d-1})x^d + (a_{d-1} + a_{d-2})x^{d-1} + ... + (a_k + a_{k-1})x^k + ... + (a_1 + a_0)x + (a_0 + 1)$ Sea F una cara de dimension k contenida en P, se va a probar que todas las caras de $pyr(P)$ son de la forma $(F,0)$ (en cuyo caso esta cara sigue siendo de dimension k) o de la forma $convex\{(F,0), e_{d+1}\}$ (en cuyo caso la dimension de la cara es $k+1$).

Sea F' una cara de $pyr(P)$, vamos a considerar dos casos:

i)Si $e_{d+1} \notin F'$, se tiene entonces que $F' \subseteq (P,0)$. Por definicion, existe $w \in R^{d+1}$ tal que $F' = \{x \in pyr(P) : w^tx = max_{z \in pyr(P)} w^tz\} = \{x \in pyr(P) : w^tx = max_{z \in (P,0)} w^tz\}$ (esta ultima igualdad se tiene pues estamos asumiendo que $F' \subseteq (P,0)$). Escribiendo $w = (\hat{w}, \zeta), \hat{w} \in R^d, \zeta \in R$, se tiene que $F' = \{(\hat{x},0), \hat{x} \in P : \hat{w}^t\hat{x} = max_{(\hat{z},0) \in (P,0)} \hat{w}^t\hat{z}\}$. Defieniendo $F := \{\hat{x} \in P : \hat{w}^t\hat{x} = max_{\hat{z} \in P} \hat{w}^t\hat{z}\}$, vemos que $F' = (F,0)$ y ademas que F, por definicion, es una cara de P. Mas aun F y F' son de igual dimension pues $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es base para el espacio afin que contiene a F (es decir $F \subset b + span\{v_1, v_2, ..., v_k\}$) ssi $\{(v_1,0), (v_2,0), ..., (v_k,0)\}$ es base para el espacio afin que contiene a F' (es decir $F' \subset (b,0) + span\{(v_1,0), (v_2,0), ..., (v_k,0)\}$).

ii)Suponga ahora que $e_{d+1} \in F'$. Asumiendo que e_{d+1} no sea el unico vertice de F', sean $\{v_1, v_2, ...v_s\}$ los vertices de F' en $(P,0)$ y sea $G' := convex\{v_1, v_2, ...v_s\}$, de modo que $F' = convex\{G', e_{d+1}\}$. Por definicion, existe $w \in R^{d+1}$ y $C \in R$, tal que $F' = \{x \in pyr(P) : w^tx = max_{z \in pyr(P)} w^tz = max_{z \in (P,0)} w^tz = C\}$. Reescribiendo $w = (\hat{w}, \zeta)$ como en el caso anterior, vemos que $(\hat{x},0) \in G' \iff (\hat{x},0) \in (P,0) \cap F' \iff (\hat{x},0) \in (P,0)$ es tal que $(\hat{w},\zeta)^t(\hat{x},0) = C \iff \hat{x} \in P$ es tal que $\hat{w}^t\hat{x} = C$, por ende si definimos $F := \{\hat{x} \in P : \hat{w}^t\hat{x} = max_{\hat{z} \in P} w^tz = C\}$ vemos que F es una cara de P y $(F,0) = G'$. Mas aun si F es de dimension k entonces G' lo es, y como $F' = convex\{G', e_{d+1}\}$ concluimos que F' es de dimension k+1.

De las observaciones anteriores se concluye que toda cara de dimension $k, k \geq 1$, en $pyr(P)$, es de la forma $(F,0)$ con $F \subseteq P$ cara de dimension k, o de la forma $convex\{(F,0), e_{d+1}\}$ con $F \subseteq P$ cara de dimension $k-1$. Por ende si $f_{pyr(P)} = x^{d+1} + b_dx^d + ... + b_kx^k + ... + b_1x + b_0$, podemos

afirmar que $b_k = a_k + a_{k-1}$ para $1 \leq k \leq d$, y $b_0 = 1 + a_0$ pues se agrego solo un nuevo vertice. Entonces $f_{pyr(P)} = x^{d+1} + (a_d + a_{d-1})x^d + (a_{d-1} + a_{d-2})x^{d-1} + ... + (a_k + a_{k-1})x^k + ... + (a_1 + a_0)x + (a_0 + 1)$.

b)Sea P d-politopo con polinomio $f_P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_1x + a_0$ y sea Q e-politopo con polinomio $f_Q(x) = x^e + b_{e-1}x^{e-1} + ... + b_1x + b_0$. Se va a probar que el polinomio asociado al politpo $P \times Q$ es $f_{P\times Q}(x) = f_P(x)f_Q(x)$. Para este proposito se va a mostrar que $F \subseteq P \times Q$ es una cara del politopo si y solo si $F = F_P \times F_Q$ donde F_P, F_Q son caras de P, Q respectivamente:

Sea $v \in R^{d+e}$, escriba $v = (v_d, v_e)$ con $v_d \in R^d, v_e \in R^e$, y defina $F_{P\times Q,v} = \{x \in P : v^t x = max_{w\in P\times Q}\ v^t w\}$. Para todo $x \in P \times Q$, podemos escribir $x = (x_d, x_e)$ con $x_d \in R^d, x_e \in R^e$. Observese ahora que $v^t x = v_d^t x_d + v_e^t x_e \leq max_{x_d\in P}\ v_d^t x_d + max_{x_e\in Q}\ v_e^t x_e (*)$. Llame $F_{P,v_d} := \{p \in P : v_d^t p = max_{w\in P}\ v_d^t w\}$ y $F_{Q,v_e} := \{q \in Q : v_e^t q = max_{w\in Q}\ v_e^t w\}$. De la desigualdad $(*)$ podemos concluir que $F_{P\times Q,v} = \{x \in P \times Q : v^t x = max_{w\in P\times Q}\ v^t w\} = \{x = (x_d, x_e) \in P \times Q : x_d \in F_{P,v_d}, x_e \in F_{Q,v_e}\} = F_{P,v_d} \times F_{Q,v_e}$, es decir, $F_{P\times Q,v} = F_{P,v_d} \times F_{Q,v_e}$.Por tanto podemos concluir que toda cara F del politopo $P \times Q$ se representa de manera unica como $F = F_P \times F_Q$ donde F_P, F_Q son caras de P, Q respectivamente (caras diferentes generan productos diferentes), y que $F_P \times F_Q$ es siempre una cara de $P \times Q$ para cualesquiera F_P, F_Q caras de P, Q.

Observese ahora que si F_P es una cara de dimension s y F_Q es de dimension t entonces $F_P \times F_Q$ es de dimension $s + t$ (suponga $F_P \subset p_0 + span\{u_1, ..., u_s\}$, con $\{u_1, ..., u_s\}$ linealmente independiente, y $F_Q \subset q_0 + span\{z_1, ..., z_t\}$, con $\{z_1, ..., z_t\}$ tambien linealmente independiente, entonces $F_{PQ} \subset (p_0, q_0) + span\{(u_1, 0_e), ..., (u_s, 0_e), (0_d, z_1), ..., (0_d, z_t)\}$, siendo $\{(u_1, 0_e), ..., (u_s, 0_e), (0_d, z_1), ..., (0_d, z_t)\}$ un conjunto minimo de vectores que cumple esta propiedad). Por tanto observamos que toda cara de dimension k en $P \times Q$ es el producto de caras de dimensiones s en P,y t en Q con $s + t = k$. De esta ultima observacion deducimos que si $f_{P\times Q}(x) = c_{d+e}x^{d+e} + c_{d+e-1}x^{d+e-1} + ... + c_1x + c_0$, se tiene que $c_k = \sum_{0\leq s\leq d, 0\leq t\leq e, s+t=k} a_s b_t$, con lo cual podemos verificar que $f_{P\times Q}(x) = f_P(x)f_Q(x)$.

Problema 4:

Dado un vector $v = (v_1, v_2, ...v_n) \in R^n$, el conjunto $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ lo podemos particionar de forma unica en los conjuntos $\{v_{\alpha_{(1)}}, v_{\alpha_{(2)}}, ..., v_{\alpha_{(s_1)}}\}, \{v_{\alpha_{(s_1+1)}}, v_{\alpha_{(s_1+2)}}, ..., v_{\alpha_{(s_2)}}\}, ..., \{v_{\alpha_{(s_{t-1}+1)}}, v_{\alpha_{(s_{t-1}+2)}}, ..., , v_{\alpha_{(s_t)}}\}$, con $s_t = n$ y de modo que $v_{\alpha_{(1)}} = v_{\alpha_{(2)}} = ... = v_{\alpha_{(s_1)}} < v_{\alpha_{(s_1+1)}} = v_{\alpha_{(s_1+2)}} = ... = v_{\alpha_{(s_2)}} < ... < v_{\alpha_{(s_{t-1}+1)}} = v_{\alpha_{(s_{t-1}+1)}} = ... = v_{\alpha_{(s_t)}}$. Por la desigualdad de reordenamiento, sabemos que si tenemos dos listas $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, y $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ la mayor suma de productos cruzados entre las listas que podemos obtener, se alcanza en $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, es decir respetando el orden de las listas. Usando la observacion anterior,podemos afirmar que para maximizar el producto $v^t x$, se debe tener que las componentes mas pequenas de x se ubiquen en las posiciones $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, ..., \alpha_{(s_1)}$, las siguentes en las posiciones $\alpha_{(s_1+1)}, \alpha_{(s_1+2)}, ..., \alpha_{(s_2)}$,..., y las mas grandes en las posiciones $\alpha_{(s_{t-1}+1)}, \alpha_{(s_{t-1}+1)}, ..., \alpha_{(s_t)}$. Vease entonces que para encontrar los valores de $x \in \Pi_{n-1}$ que maximizan $v^t x$ **no** nos interesa el vector v explicitamente, sino cuantos valores diferentes toman sus componenetes y que posiciones tienen. Por ejemplo, el problema de maximizar en Π_5, $v^t x$ con $v = (0.3, -1, 0.3, 2, -1, 0.3)$ es equivalente a maximizar $w^t x$ con $w = (2, 1, 2, 3, 1, 2)$ pues ambos toman igual cantidad de valores diferentes y en las mismas posiciones. Por tanto a partir de la particion $\{\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, ..., \alpha_{(s_1)}\}, \{\alpha_{(s_1+1)}, \alpha_{(s_1+2)}, ..., \alpha_{(s_2)}\}, ..., \{\alpha_{(s_{t-1}+1)}, \alpha_{(s_{t-1}+1)}, ..., \alpha_{(s_t)}\}$, podemos iden-

tificar $x \in \Pi_{n-1}$ que maximizan $v^t x$.

Tal como se mostro en clase, para hallar $x \in \Pi_{n-1}$ que maximizan $v^t x$, basta hallar los vertices que alcanzan el maximo y tomar su envolvente. Por tanto nos interesa hallar $max_{x \in S_n}\ v^t x$ (escribiendo los elementos de S_n como vectores de n coordenadas). Como se menciono antes para maximizar el anterior producto se debe tener que $1, 2, ..., s_1$ se deben distribuir en las posiciones $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, ..., \alpha_{(s_1)}$, $s_1+1, s_1+2, ..., s_2$, se deben distribuir en las posiciones $\alpha_{(s_1+1)}, \alpha_{(s_1+2)}, ..., \alpha_{(s_2)}$,...,y $s_{t-1}+1, s_{t-1}+2, ..., s_t$ en las posiciones $\alpha_{(s_{t-1}+1)}, \alpha_{(s_{t-1}+1)}, ..., \alpha_{(s_t)}$. Por tanto:
$\{x \in \Pi_{n-1} : v^t x = max_{z \in \Pi_{n-1}}\ v^t z\}$
$= convex\{p$ vertex of $\Pi_{n-1} : v^t p = max_{z \in \Pi_{n-1}}\ v^t z\}$
$= convex\{p$ vertex of Π_{n-1} : se cumplan las condiciones de valores en las posiciones descritas $\}$.

WLOG asuma que $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, ..., \alpha_{s_1} = s_1$, de modo se deben distribuir $1, 2, ..., s_1$ en las posiciones $1, 2..., s_1$, es decir, cubrir todo S_{s_1}. Hallemos la dimension del menor espacio afin que contenga a S_{s_1}: Suponga que $S_{s_1} \subset u+E$ donde $u \in R^{s_1}$ es un vector y E un subespacio vectorial. Vease que si $x_1, x_2 \in u+E$ entonces $x_1 - x_2 \in E$. Como $(1234...s_1); (2134...s_1); (1324...s_1); (1243...s_1); ...$, estan en S_{s_1} deducimos que $(1(-1)00...0); (01(-1)0...0); (001(-1)0...0); ...; (00...01(-1))$ estan en E y que por ende es de dimension al menos $s_1 - 1$. Por otra parte la suma de componentes de todos los elementos de S_{s_1} es invariante, de alli se afirma que S_{s_1} esta contenido en un hiperplano de R^{s_1}, lo cual nos permite concluir que la dimension del menor espacio afin que contiene a S_{s_1} es $s_1 - 1$. Por tanto la dimension del menor espacio afin de R^n que contiene todas las permutaciones de $1, 2, ..., s_1$ en las posiciones $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s_1}$ (y 0 en las demas entradas) es $s_1 - 1$.

De forma analoga se prueba que la dimension del menor espacio afin de R^n que contiene todas las permutaciones de $s_1+1, s_1+2, ..., s_2$, en las posiciones $\alpha_{s_1+1}, \alpha_{s_1+2}, ..., \alpha_{s_2}$ (y 0 en las demas entradas) es $s_2 - s_1 - 1$. Por tanto concluyo que la dimension del menor espacio afin de R^n que contiene todas las permutaciones de $1, 2, ..., s_1$ en las posiciones $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s_1}$ y de $s_1+1, s_1+2, ..., s_2$, en las posiciones $\alpha_{s_1+1}, \alpha_{s_1+2}, ..., \alpha_{s_2}$ es $(s_1-1)+(s_2-s_1-1) = s_2-2$ (pues los vectores que generan el subespacio vectorial (lo que previamente llame $\mathbf{E}$) asociado al espacio afin en cada uno de los casos son indpendientes (no comparten las mismas posiciones)). Procediendo de forma inductiva se prueba que $s_t - t = n - t$ es la dimension del menor espacio afin de R^n que contiene todas las permutaciones de los valores $1, 2, 3, .., n$, en las posiciones que deben tomar para maximizar v^p.

Concluyo que $s_t - t = n - t$ es la dimension del menor espacio afin que contiene a
$\{x \in \Pi_{n-1} : v^t x = max_{z \in \Pi_{n-1}}\ v^t z\}$. Por tanto el problema de maximizar $v^t x$, que equivale a maximizar conociendo la particion $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s_1}\}, \{\alpha_{s_1+1}, \alpha_{s_1+2}, ..., \alpha_{s_2}\}, ..., \{\alpha_{s_{t-1}+1}, \alpha_{s_{t-1}+1}, ..., \alpha_{s_t}\}$, nos arroja una cara de dimension $n - t$.

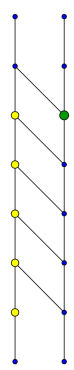
Por tanto cada particion ordenada de $[n] : \{1, ..., n\}$ en $n-k$ partes esta asociada a un problema de maximizacion $v^t x, x \in \Pi_{n-1}$ que nos arroja una cara de dimension $n - (n-k) = k$ diferente. Como a todo vector $v \in R^n$ se le puede asociar una particion ordenada de $[n]$ (por ejemplo si $v = (1, 3, -2, 1, 3, 1)$, la particion ordenada asociada es $\{3\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 5\}$), se concluye que el numero de cara de dimension k en Π_{n-1} esta en biyeccion con el numero de particiones ordenadas de $[n]$ en $n-k$ partes.

Problema 5 (Trabaje con Federico Castillo en este problema):

a)Dado que el conjunto $Flags(P)$ es finito para cualquier d-politopo P, basta probar que $T : Flags(P) \to Flags(P)$ es sobreyectiva para poder concluir que T es biyectiva. Por tanto voy a probar que para todo $\mathcal{F} \in Flags(P)$, existe $\mathcal{G} \in Flags(P)$ tal que $T\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Dado $\mathcal{F} = (F(-1), F(0), ..., F(d))$ defina $\mathcal{G} = (G(-1), G(0), ..., G(d))$ de forma inductiva, asi: $G(d) = P$,$G(-1) = \emptyset$, y para $1 \leq i \leq d$ defina $G(d-i)$ como la unica cara de dimension $d-i$ diferente a $F(d-i)$ que contiene a $F(d-i-1)$ y que esta contenida en $G(d-i+1)$ (lo anterior esta bien definido por la "estructura de diamantes" que tiene el poset de todo politopo). Por la anterior construccion sabemos que para todo $0 \leq i \leq d-1$, $F(i)$ es la unica cara de dimension i diferente a $G(i)$ que esta contenida en $G(i+1)$ y que contiene a $F(i-1)$ (nuevamete la unicidad la garantiza la estructura de diamante), vease que esto es precisamente la definicion de $T\mathcal{G}$, por tanto $T\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Lo anterior nos muestra que T es sobreyectiva y por ende biyectiva. Dado que $\mathcal{G}$ fue definida a partir de $\mathcal{F}$, ya hemos construido T^{-1} de forma explicta: $T^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{G} = (G(-1), G(0), ..., G(d))$, donde $G(d) = P$,$G(-1) = \emptyset$ y para $1 \leq i \leq d$ $G(d-i)$ es la unica cara de dimension $d-i$ diferente a $F(d-i)$ que contiene a $F(d-i-1)$ y que esta contenida en $G(d-i+1)$. Otra forma de hallar T^{-1} es a partir del politopo dual: sea $\mathcal{F}'$ el "flag dual" asociado a $\mathcal{F}'$ (esto es, el mismo flag pero recorrido en sentido contrario, es decir visto ahora como flag del dual), entonces se puede probar que $T^{-1}\mathcal{F} = (T\mathcal{F}')'$.

b)Para probar $T^rF(k) \neq T^sF(k)$ para todos $0 \leq r < s \leq d$, $0 \leq k \leq d-1$ voy a empezar probando la siguiente proposicion:

Proposicion: $T^rF(j) \nsubseteq T^{r+1}F(k)$ para todos $r \geq 0$ and $0 \leq j \leq k \leq d-1$:



(En este grafico la primera columna representa $T^r\mathcal{F}$ y la segunda $T^{r+1}\mathcal{F}$. Lo que quiero probar es que ninguno de los puntos amarillos esta contenido en el punto verde)

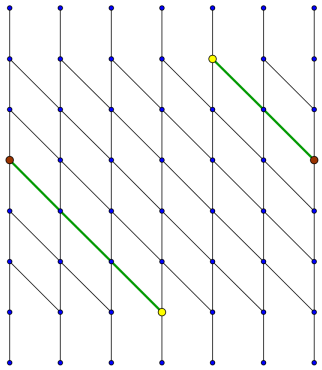
Demostracion de la proposcion:

Por definicion sabemos que $T^rF(k) \neq T^{r+1}F(k)$, $T^{r+1}F(k-1) \subset T^rF(k)$ y $T^{r+1}F(k-1) \subset T^{r+1}F(k)$, por ende $T^{r+1}F(k-1) \subseteq T^rF(k) \wedge T^{r+1}F(k)$. Sabemos que la interseccion de dos

caras del politopo es tambien una cara del mismo, sin embargo, si intersectamos dos caras de dimension k la cara que resulta puede tener dimension a lo sumo $k-1$ (no puede ser de dimension k pues ello implica la contenecia de una cara de dimension k en otra de la misma dimension), ahora vease que $T^rF(k) \wedge T^{r+1}F(k)$ no puede ser diferente de $T^{r+1}F(k-1)$ (sino se tendria que $T^{r+1}F(k-1)$,de dimnesion $k-1$, esta contenida en otra cara de dimension $k-1$), por tanto concluimos $T^{r+1}F(k-1) = T^rF(k) \wedge T^{r+1}F(k)$. De forma analoga podemos concluir que $T^{s+1}F(i-1) = T^sF(i) \wedge T^{s+1}F(i)$ para todo $s \geq 0$,$0 \leq i \leq d-1$.

Suponga que tenga $T^rF(j) \subseteq T^{r+1}F(k)$ para algun $r \geq 0$ y $0 \leq j \leq k \leq d-1$. Dado que $T^rF(j) \subset T^rF(k)$, concluyo que $T^rF(j) \subset T^rF(k) \wedge T^{r+1}F(k) = T^{r+1}F(k-1)$.A partir de este resultado y conociendo $T^rF(j) \subset T^rF(k-1)$, puedo concluir $T^rF(j) \subset T^rF(k-1) \wedge T^{r+1}F(k-1) = T^{r+1}F(k-2)$. Vease que asi puedo proceder inductivamente hasta llegar a $T^rF(j) \subset T^rF(j+1) \wedge T^{r+1}F(j+1) = T^{r+1}F(j)$, es decir $T^rF(j) \subset T^{r+1}F(j)$. Lo anterior es una contradiccion, pues por definicion de T, $T^rF(j)$ y $T^{r+1}F(j)$ son caras diferentes de dimension j lo cual implica que $T^rF(j) \nsubseteq T^{r+1}F(j)$. Por tanto podemos concluir que se debe satisfacer $T^rF(j) \nsubseteq T^{r+1}F(k)$ para todos $r \geq 0$ and $0 \leq j \leq k \leq d-1$.

Demostracion del Problema:(Por contradicion)



(En este grafico los puntos rojos corresponden a $T^rF(k)$ y$T^sF(k)$ y los amarillos a lo que se va a llamar $T^{r+i}F(k-i)$ y T$^{s-j}F(k+j)$)

Suponga que tenga $T^rF(k) = T^sF(k)$ para algun $0 \leq r < s \leq d$ y $0 \leq k \leq d-1$. Por la forma en que se define T sabemos que $T^rF(k) \supset T^{r+1}F(k-1) \supset T^{r+2}F(k-2) \supset ... \supset T^{r+k}F(0)$ y tambien sabemos que $T^sF(k) \subset T^{s-1}F(k+1) \subset T^{s-2}F(k+2) \subset ... \subset T^{s-(d-1-k)}F(d-1)$. Escoja ahora $i, j \geq 0$ tales que se cumplan las siguientes condiciones($*$):
$a) r+i+1 = s-j$
$b) k-i \geq 0$
$c) k+j \leq d-1$

Bajo estas condiciones $T^rF(k) \supset T^{r+i}F(k-i)$ y $T^sF(k) \subset T^{s-j}F(k+j)$, y como asumimos que $T^rF(k) = T^sF(k)$ se tendria $T^{r+i}F(k-i) \subset T^{s-j}F(k+j)$. Sin embargo esto es una contradiccion,

pues como $s-j = r+i+1$, sabemos por la proposicion que probamos que $T^{r+i}F(k-i) \nsubseteq T^{s-j}F(k+j)$. Se concluye entonces que se debe tener $T^rF(k) \neq T^sF(k)$ para todos $0 \leq r < s \leq d$, $0 \leq k \leq d-1$.

($*$.Obsevese que dichos i, j existen: Al ubicarnos en $T^rF(k)$ podemos movernos en la "diagonal descendente" $T^{r+1}F(k-1), T^{r+2}F(k-2)...T^{r+k}F(0)$ y al ubicarnos en $T^sF(k)$ podemos movernos en la "diagonal ascendente" $T^{s-1}F(k+1), T^{s-2}F(k+2)...T^{s-(d-1-k)}F(d-1)$. Dado que $1 < s-r \leq d$ se puede afirmar que $(s-(d-1-k))-(r+k) = (s-r)-(d-1) \leq 1$ y por tanto que existiran $0 \leq i \leq k$ y $0 \leq j \leq d-1-k$ tales que $(s-j)-(r+i) = 1$. Estos son precisamente los i, j buscados.)