Análise da Radiância em um Meio Participativo e Implementação

Dalia M. B. Correa †

† IMPA - Rio de Janeiro - Brazil

Análise da Radiância em um Meio Participativo

Introdução

No modelo curpuscular da luz temos que
Transferencia radioativa = transporte de fótons.

Introdução

No modelo curpuscular da luz temos que
Transferencia radioativa = transporte de fótons.

Faremos uma aproximação da transferência radioativa por um modelo reduzido da luz com suas características mais simples e principais (partículas abstratas).

Introdução

No modelo curpuscular da luz temos que
Transferencia radioativa = transporte de fótons.

Faremos uma aproximação da transferência radioativa por um modelo reduzido da luz com suas características mais simples e principais (partículas abstratas).

$\longrightarrow$
O objetivo   determinar a distribuição das partículas abstratas

Introdução

No modelo curpuscular da luz temos que
Transferencia radioativa = transporte de fótons.

Faremos uma aproximação da transferência radioativa por um modelo reduzido da luz com suas características mais simples e principais (partículas abstratas).

$\longrightarrow$

O objetivo determinar a distribuição das partículas abstratas no espaço e tempo , levando em conta seu movimento

Introdução

No modelo curpuscular da luz temos que
Transferencia radioativa = transporte de fótons.

Faremos uma aproximação da transferência radioativa por um modelo reduzido da luz com suas características mais simples e principais (partículas abstratas).

$\longrightarrow$
O objetivo determinar a distribuição das partículas abstratas no espaço e tempo , levando em conta seu movimento

Introdução

No modelo curpuscular da luz temos que
Transferencia radioativa = transporte de fótons.

Faremos uma aproximação da transferência radioativa por um modelo reduzido da luz com suas características mais simples e principais (partículas abstratas).

$\longrightarrow$
O objetivo determinar a distribuição das partículas abstratas no espaço e tempo , levando em conta seu movimento e iteração com o meio.

Suposições sobre a natureza das partículas.

- As partículas são muito pequenas e numerosas tal que sua distribuição pode ser considerada como continua.
- Em qualquer ponto do tempo uma partícula pode ser determinada por sua posição e velocidade e seus estados internos como polarização, frequência, spin ou carga.

Suposições sobre a natureza das partículas.

- As partículas são muito pequenas e numerosas tal que sua distribuição pode ser considerada como continua.
- Em qualquer ponto do tempo uma partícula pode ser determinada por sua posição e velocidade e seus estados internos como polarização, frequência, spin ou carga.

Para nossa aproximação consideramos sobre as partículas.

Suposições sobre a natureza das partículas.

- As partículas são muito pequenas e numerosas tal que sua distribuição pode ser considerada como continua.
- Em qualquer ponto do tempo uma partícula pode ser determinada por sua posição e velocidade e seus estados internos como polarização, frequência, spin ou carga.

Para nossa aproximação consideramos sobre as partículas.

- Têm velocidade constante v.
- Não possuem estado interno.
- Não existe colição entre elas.

Espaço Fase

Com velocidade constante v precisamos de 5 componentes para determinar uma partícula.

Espaço Fase

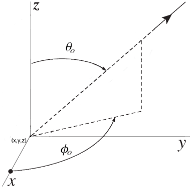
Com velocidade constante v precisamos de 5 componentes para determinar uma partícula.

- Três para sua posição (x,y,z)
- Duas para sua direção (θ_0, ϕ_0)

Espaço Fase

Com velocidade constante v precisamos de 5 componentes para determinar uma partícula.

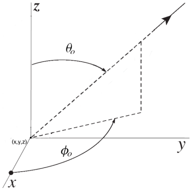
- Três para sua posição (x,y,z)
- Duas para sua direção (θ_0, ϕ_0)



Espaço Fase

Com velocidade constante v precisamos de 5 componentes para determinar uma partícula.

- Três para sua posição (x,y,z)
- Duas para sua direção (θ_0, ϕ_0)



O espaço 5D correspondente é

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$$

o espaço de fase onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Densidade do Espaço Fase

Densidade do Espaço Fase:
É a função

$$n(r, \omega, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

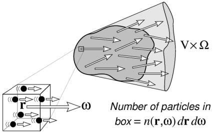
Número de partículas em $n(r, \omega, t) dr d\omega$

Densidade do Espaço Fase

Densidade do Espaço Fase:
É a função

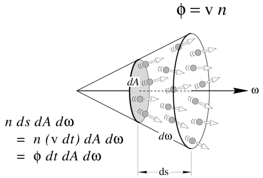
$$n(r, \omega, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Número de partículas em $n(r, \omega, t) dr d\omega$



Fluxo do espaço de fase

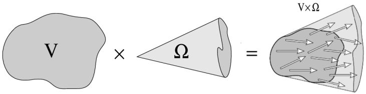
$\phi(r,n) = vn(r,n)$ então
$n(r,n)dAdsd\omega = \phi(r,n)dAd\omega dt.$



Análise da Radiância em um Meio Participativo

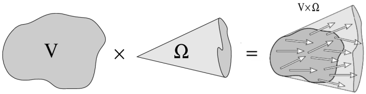
Equação do Balanço

Partículas em $V \times \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ um volume fixo arbitrario.



Equação do Balanço

Partículas em $V \times \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ um volume fixo arbitrario.



Número de partículas em $V \times \Omega$ é

$$N(t) = \int_\Omega \int_V n(r, w, t) dr dw.$$

O número de partículas no volume pode mudar por causa das propriedades do meio. Mas podemos supor que:

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.$$

Já que a velocidade da luz é considerada como infinita e o equilibrio é atingido instantaneamente.

Análise da Radiância em um Meio Participativo

Equação do Transporte

Existem quatro processos que afetam a distribuição da radiancia em um ambiente com meio participativo. Emissão, corrente,absorção e dispersão, podem mudar o número; de partículas dentro de $V \times \Omega$, então se precisa que

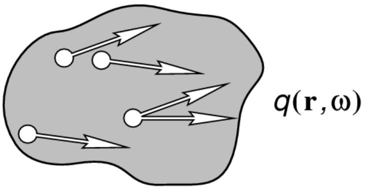
Equação do Transporte

Existem quatro processos que afetam a distribuição da radiancia em um ambiente com meio participativo. Emissão, corrente,absorção e dispersão, podem mudar o número; de partículas dentro de $V \times \Omega$, então se precisa que

[mudança por emissão] + [mudança por corrente]+ [mudança por dispersão]=0.

Emissão:

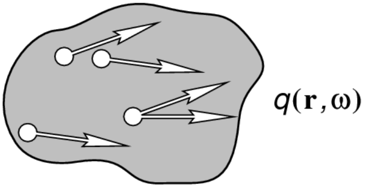
$$q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$\boxed{E = \int_\Omega \int_V q(r,\omega) dr d\omega}$$

Emissão:

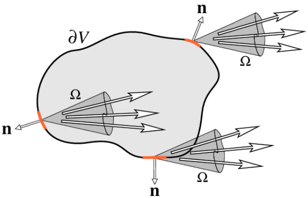
$q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Função fonte



$$\boxed{E = \int_\Omega \int_V q(r,\omega) dr d\omega}$$

Corrente:

- É a rede através da superfície ∂V de V.



$$\int_{\Omega}\int_{\partial V} \phi(\mathbf{s},\omega)\, \omega \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s})\, ds\, d\omega$$

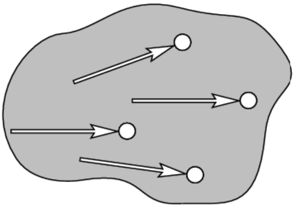
Corrente:

- A corrente depende da componente do fluxo normal ao diferencial de superfície $\phi(s, \omega)\omega \cdot n(s)$

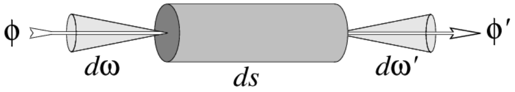
$$
\begin{aligned}
C &= \int_\Omega \int_{\partial V} \phi(s, \omega)\omega \cdot n(s) ds d\omega \\
&= \int_\Omega \int_V \nabla \cdot (\phi\omega) dr d\omega \\
&= \int_\Omega \int_V \omega \cdot \nabla\phi \, dr d\omega.
\end{aligned}
$$

Absorção:

O processo tira uma partícula do sistema



$$\phi' \propto \phi ds \longrightarrow \phi' = \sigma_a \phi ds$$



$$\boxed{C_{abs} = \int_\Omega \int_V \sigma_a(r)\phi(r,\omega) dr d\omega.}$$

Dispersão:

$\boxed{k : \mathbb{R}^3 \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}}$ $\longleftarrow$ kernel de dipersão volumétrica

Dispersão:

$\boxed{k : \mathbb{R}^3 \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}}$ $\longleftarrow$ kernel de dipersão volumétrica

$\boxed{k(r, \omega \cdot \omega')dr d\omega'}$ é a probabilidade que a partícula na direçãoω seja desviada na direção ω'.
Por unidade de volume por unidade
de ângulo solido.

Dispersão:

$\boxed{k : \mathbb{R}^3 \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}}$ $\longleftarrow$ kernel de dipersão volumétrica

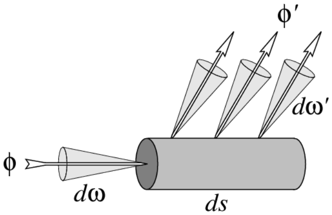
$\boxed{k(r, \omega \cdot \omega')drd\omega'}$ é a probabilidade que a partícula na direçãoω seja desviada na direção ω'.
Por unidade de volume por unidade de ângulo solido.

$\Downarrow$

NO MEIO ISOTROPICO
só depende do produto
não da direção

Coeficiente de dispersão

$$\boxed{\sigma_s = \int_{\mathbb{S}^2} k(r, \omega \cdot \omega') d\omega'} \longrightarrow \text{Coeficiente de dispersão}$$

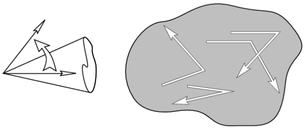


$$\phi' \propto \phi ds \longrightarrow \phi' = \sigma_s \phi ds$$

Dispersão :

Out-scatter

- Remove partículas de $V \times \Omega$.
- A parícula em V muda sua direção fora de Ω por algum motivo.



Dispersão :

$$
\begin{aligned}
C_{out} &= \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} k(r, \omega \cdot \omega')\phi(r,\omega) d\omega' dr d\omega \\
&= \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} k(r, \omega \cdot \omega') d\omega' \phi(r,\omega) dr d\omega \\
&= \int_\Omega \int_V \sigma_s(r)\phi(r,\omega) dr d\omega.
\end{aligned}
$$

Dispersão :

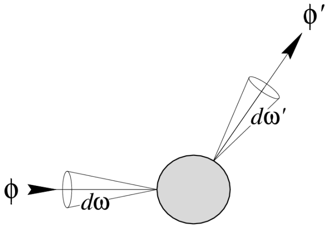
$$
\begin{aligned}
C_{out} &= \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} k(r, \omega \cdot \omega')\phi(r,\omega) d\omega' dr d\omega \\
&= \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} k(r, \omega \cdot \omega') d\omega' \phi(r,\omega) dr d\omega \\
&= \int_\Omega \int_V \sigma_s(r)\phi(r,\omega) dr d\omega.
\end{aligned}
$$

$$\searrow \sigma_s = \int_{\mathbb{S}^2} k(r, \omega \cdot \omega') d\omega'$$

Dispersão:

Definição: Função fase

$$p_r : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{para todo } r \in \mathbb{R}^3$$
$$(\omega, \omega') \longrightarrow p_r(\omega, \omega')$$



probabilidade de dispersão da luz incidente en qualquer direção, em um meio participativo.

$$p_r(\omega \cdot \omega') = 4\pi \frac{k(r, \omega \cdot \omega')}{\sigma_s(r)} \text{ onde } r \in \mathbb{R}^3.$$

$$k(r, \omega \cdot \omega') = \sigma_s(r) \frac{p_r(\omega \cdot \omega')}{4\pi} = \sigma_s(r) P_r(\omega \cdot \omega')$$

$$\text{onde } P_r(\omega \cdot \omega') = \frac{p_r(\omega \cdot \omega')}{4\pi}.$$

$$p_r(\omega \cdot \omega') = 4\pi \frac{k(r, \omega \cdot \omega')}{\sigma_s(r)} \text{ onde } r \in \mathbb{R}^3.$$

$$k(r, \omega \cdot \omega') = \sigma_s(r) \frac{p_r(\omega \cdot \omega')}{4\pi} = \sigma_s(r) P_r(\omega \cdot \omega')$$

$$\text{onde } P_r(\omega \cdot \omega') = \frac{p_r(\omega \cdot \omega')}{4\pi}.$$

$$k(r, \omega \cdot \omega') = \sigma_s(r) P_r(\omega \cdot \omega')$$

Dispersão:

In-scatter Adição de partículas a $V \times \Omega$ por deviação da direção de partículas para dentro de Ω.

$$C_{in} = \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} k(r,\omega \cdot \omega')\phi(r,\omega')d\omega' dr d\omega.$$

Logo

$$C_{in} = \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} \sigma_s(r) P_r(\omega \cdot \omega')\phi(r,\omega')d\omega' dr d\omega.$$

Dispersão:

In-scatter Adição de partículas a $V \times \Omega$ por deviação da direção de partículas para dentro de Ω.

$$C_{in} = \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} k(r, \omega \cdot \omega')\phi(r,\omega')d\omega' dr d\omega.$$

Logo

$$C_{in} = \int_\Omega \int_V \int_{\mathbb{S}^2} \sigma_s(r) P_r(\omega \cdot \omega')\phi(r,\omega')d\omega' dr d\omega.$$

A equação

$$C + C_{abs} + C_{out} = E + C_{in}$$

$$\sigma(r) = \sigma_s(r) + \sigma_a(r)$$

$$\omega \cdot \nabla\phi(r, \omega) + \sigma(r)\phi(r, w) = q(r, w) + \int_{\mathbb{S}^2} \sigma_s(r) P_r(\omega' \cdot \omega)\phi(r, \omega') d\omega'.$$

A *equação do transporte*.

Análise da Radiância em um Meio Participativo

Equação de Transferência

$$E = \hbar\nu$$
$\hbar$ é a constante de Plank
ν é a frequencia.

- $L(r,\omega) = \hbar\nu\phi(r,n) = c\hbar\nu n(r,n).\longleftarrow$radiancia
- $L_{ve} = \hbar\nu q \longleftarrow$Fonte de volume
- $\varepsilon_b = \hbar\nu q_b. \longleftarrow$Fonte de superficie

Equação

$$\omega \cdot \nabla\phi(r,\omega) + \sigma(r)\phi(r,w) = q(r,w) + \int_{\mathbb{S}^2} \sigma_s(r)P_r(\omega' \cdot \omega)\phi(r,\omega')d\omega'.$$

Equação

$$\omega \cdot \nabla\phi(r,\omega) + \sigma(r)\phi(r,w) = q(r,w) + \int_{\mathbb{S}^2} \sigma_s(r) P_r(\omega' \cdot \omega)\phi(r,\omega')d\omega'.$$

$$\omega \cdot \nabla L(r,\omega) + \sigma(r)L(r,w) = L_{ve}(r,w) + \sigma_s(r)\int_{\mathbb{S}^2} P_r(\omega' \cdot \omega)\phi(r,\omega')d\omega'.$$

$$L(s,\omega) = \varepsilon_b(s,\omega) + \int_{H_r^-} k_b(s,\omega' \to \omega)(s,\omega')drd\omega'.$$

`equação de transferência` com condiçoẽs de fronteira.($s \in M$ onde M é superfície)

Análise da Radiância em um Meio Participativo

Forma Integral

$$\begin{aligned}\omega \cdot \nabla L(r,\omega) &= \left.\tfrac{\partial}{\partial x} L(r + x\omega,\omega)\right|_{x=0} \\ &= -\left.\tfrac{\partial}{\partial x} L(r - x\omega,\omega)\right|_{x=0}\end{aligned}$$

$$\boxed{S(r,\omega) = L_{ve}(r,\omega) + \sigma_s(r)\int_{\mathbb{S}^2} P_r(\omega' \cdot \omega)Ł(r,\omega')d\omega'}$$

$\widehat{L}(x) = L(r - x\omega,\omega)$
$\widehat{S}(x) = S(r - x\omega,\omega)$
$\widehat{\sigma}(x) = \sigma(r - x\omega)$ $\quad r,\omega$ fixos.

$$-\tfrac{\partial}{\partial x}\widehat{L}(x) + \widehat{\sigma}(x)\widehat{L}(x) = \widehat{S}(x)$$

Resolviendo pero fator de integração

$$v(x) = e^{-\int_0^x \widehat{\sigma}(y)dy}$$

Forma Integral

$$L(r,\omega) = e^{-\int_0^x \sigma(r-y\omega)dy} L(r - x\omega, \omega) + \int_0^x e^{-\int_0^z \sigma(r-y\omega)dy} S(r - z\omega, \omega)dz$$

para $s \in M$

$$L(s,\omega) = \varepsilon_b(s,\omega) + \int_{H_r^-} k_b(s,\omega' \to \omega)\phi(s,\omega')drd\omega'$$

$L(s,\omega)$ por $L_o(s,\omega)$.

Definições

Definamos agora as siguentes funções

- **Função de distancia óptica ou espessura óptica**

$$\tau(r, r') := \int_0^{\|r'-r\|} \sigma(r + yu)dy$$

$$\text{onde } u = \frac{r'-r}{\|r'-r\|}$$

Definições

Definamos agora as siguentes funções

- **Função de distancia óptica ou espessura óptica**

$$\tau(r,r') := \int_0^{\|r'-r\|} \sigma(r+yu)dy$$

onde $u = \frac{r'-r}{\|r'-r\|}$

- **Função caminho de absorção ou transmitancia do raio**

$$T(r \to r') := e^{-\tau(r,r')}.$$

Finalmente substituendo todo em ★ temos

$$L(r,\omega) = T(s \to r)L_o(s,\omega) + \int_0^h T(r - z\omega \to r)S(r - z\omega,\omega)dz$$

Agora chamaremos esta radiancia $L(r,\omega)$ por $L_i(r,\omega)$, logo temos

$$L_i(r,\omega) = T(s \to r)L_o(s,\omega) + \int_0^h T(r - z\omega \to r)S(r - z\omega,\omega)dz$$

onde

$$s = \gamma(r,-\omega) \text{ e } h = b(r,-\omega)$$