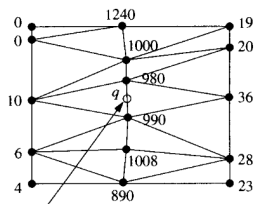
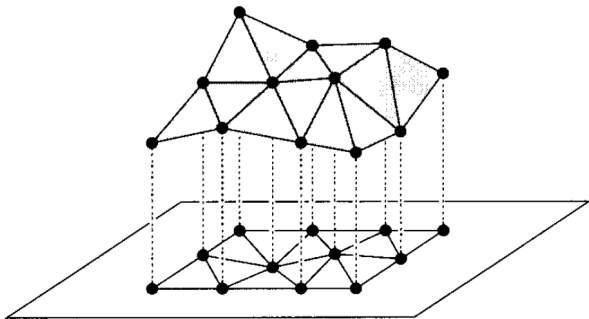


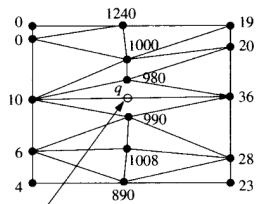
# Triangulação de Delaunay

Aldo Zang, Dalia Bonilla, Edgard Arakaki  
IMPA  
Rio de Janeiro

21 de junho de 2007



(a)



(b)

No possível faremos uma definição de triangulação de Delaunay sem ter usar os conceitos de diagrama de Voronoi.

## Definição (Triangulação)

*Coleção de triângulos, arestas e vértices. Seja  $S$  um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^n$ .*

$$S = \{p_1, \dots, p_m\}$$

*A triangulação  $K$  triangula  $S$  se os triângulos de  $K$  decompõem o fecho convexo de  $S$  e o conjunto de vértices de  $K$  é  $S$ .*

## Definição (Triângulo de Delaunay)

*Sejam  $p_i, p_j$  e  $p_k \in S$ .  $p_i, p_j, p_k$  são vértices de um triângulo de Delaunay se e só se o círculo que passa por  $p_i, p_j, p_k$  é vazio (isto é não contém outro ponto de  $S$ ).*

## Definição (Aresta de Delaunay)

*$\overline{p_i p_j} \in K$  é uma aresta de Delaunay se pertence a um ou dois triângulos de Delaunay.*

## Definição (Localmente Delaunay)

$\overline{p_i p_j} \in K$  é uma aresta localmente Delaunay se:

1. Pertence a um triângulo então pertence a fronteira do fecho convexo.
2. Pertence a dois triângulos  $p_i p_j p_k$  e  $p_i p_j p_l$  e  $p_l$  está fora do circuncírculo de  $p_i p_j p_k$ .

## Teorema

A coleção de triângulos de Delaunay com vértices em  $S$  e com suas arestas e vértices formam uma triangulação  $K$  de  $S$  chamada triangulação de Delaunay.

## Teorema

*Se toda aresta de  $K$  é localmente de Delaunay, então  $K$  é uma triangulação de Delaunay.*

## Observação

*Dois pontos  $p_i, p_j$  formam uma aresta de Delaunay se só se existe um círculo que passa por  $p_i, p_j$  e não contém outro ponto de  $S$  em seu interior.*

- ▶ Sejam  $K$  uma triangulação de  $S$ , com  $m$  triângulos,
- ▶  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$  os ângulos dos triângulos de  $K$  ordenados em forma crescente tal que  $\alpha_i \leq \alpha_j$  se  $i < j$  e
- ▶  $A(K) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$  o *vetor ângulo* de  $K$ .
- ▶ Dada outra triangulação  $K'$  de  $S$  e  $A(K') := (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3m})$  seu vetor ângulo, temos que
  - ▶  $A(K) > A(K')$  se existe  $1 \leq i \leq 3m$  tal que  $\alpha_j = \alpha'_j$  para todo  $j < i$  e  $\alpha_i > \alpha'_i$ .

### Definição (Triangulação de ângulo ótimo)

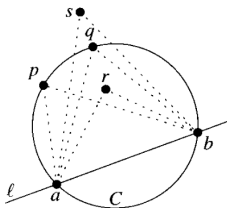
$K$  é de ângulo ótimo se  $A(K) \geq A(K')$  para toda triangulação  $K'$  de  $S$ .



## Teorema ( de Thales (O menor ângulo definido entre 3 pontos))

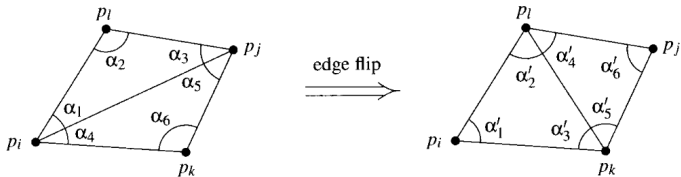
Seja um  $C$  círculo,  $l$  linha que intersecta  $C$  em  $a, b$   $p, q, r$  e  $s$  do mesmo lado de  $l$ . Suponha que  $p, q$  estão sobre  $C$ ,  $r \in \text{int}C$ , e  $s$  fora do  $C$  então

$$\angle arb > \angle apb = \angle aqb > \angle asb.$$



Demonstração.

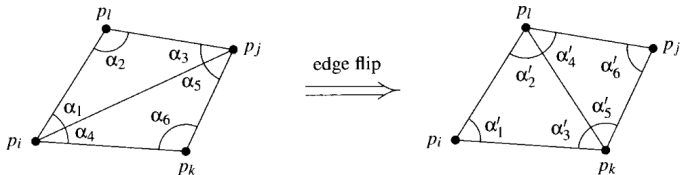
Demostrado em aula.



## Definição (Aresta ilegal)

Uma aresta  $e = p_i p_j$  é uma aresta ilegal se

$$\min_{1 \leq i \leq 6} \alpha_i < \min_{1 \leq i \leq 6} \alpha'_i.$$



## Definição (Flip de Aresta)

Seja  $e = \overline{p_i p_j}$  aresta ilegal de uma triangulação  $K$  de  $S$ , tal que  $e$  está contida nos triângulos  $p_i p_j p_k$ ,  $p_i p_j p_l$  de  $K$ . E que formam um quadrilátero convexo. A operação que remove a aresta  $e$ , e insere a aresta  $\overline{p_k p_l}$  é conhecida como flip de arestas e cria uma nova triangulação  $K'$ .

## Observação

*O flip será utilizado para modificar arestas ilegais transformando-as em arestas legais.*

## Observação

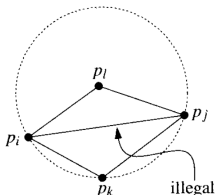
*As arestas consideradas legais são arestas localmente de Delaunay.*

## Definição (Triangulação legal)

*Uma triangulação é considerada legal se todas suas arestas são legais.*

## Lema

Seja a aresta  $\overline{p_i p_j}$  da fronteira dos triângulos  $p_i p_j p_k$ ,  $p_i p_j p_l$  e seja  $C$  o círculo que passa por  $p_i p_j p_k$ . Então a aresta  $e = \overline{p_i p_j}$  é ilegal se só se  $p_l \in \text{int}C$ .

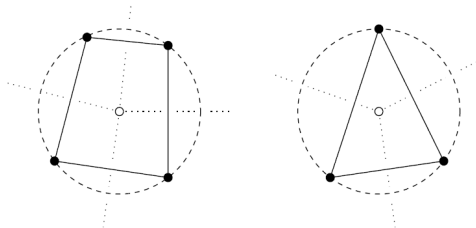


## Definição (Degeneração)

*Dado conjunto  $S$  quatro o mais pontos sobre um círculo formam uma degeneração.*

## Definição (Posição Geral)

*Se não existe degeneração.*



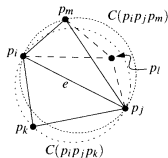
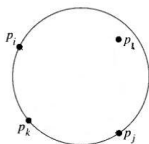
## Observação

1. *Pequena perturbação é suficiente para eliminar a degeneração, reduzindo assim o caso degenerado para o caso geral.*
2. *Em posição geral existe triangulação de Delaunay, e além disso é única.*
3. *Se não temos posição geral, então é possível conseguir uma triangulação do diagrama de Delaunay considerando os pontos de  $S$  com uma perturbação.*

## Teorema

*S um conjunto de pontos no plano. Uma triangulação  $K$  de  $S$  é legal, se e só se,  $K$  é uma triangulação de Delaunay.*

Demonstração.





# Perturbação simbólica

A técnica computacional de perturbação simbólica de uma entrada geométrica justifica a escolha matematicamente conveniente de posição geral dos dados. Descreveremos uma perturbação em particular chamada "*Simulação de Simplicidade*" (SoS).

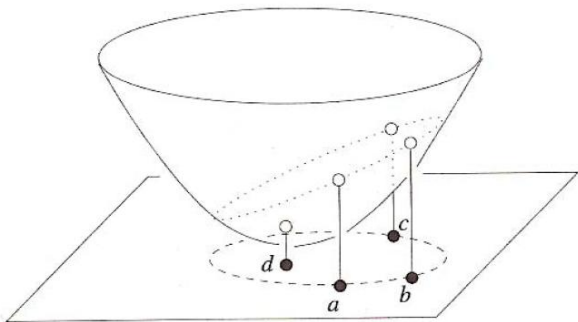
## Teste de orientação

Sejam  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$ , e  $c = (c_1, c_2)$  três pontos do plano. Consideramos  $a, b, c$  degenerados se eles são colineares, incluindo o caso em que dois deles ou até mesmo o três sejam coincidentes. No caso degenerado temos  $c = ta + (1 - t)b$ . Assim  $t$  existe se e somente se o determinante  $\Delta$  é 0.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

## Lema

Dados os pontos  $a, b, c, d$  do plano. O ponto  $d$  está dentro do circuncírculo de  $a, b, c$  se e somente se o ponto  $d'$  está verticalmente embaixo do plano determinado por  $a', b', c'$ , onde  $x' = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$  quando  $x = (x_1, x_2)$ .



Para testar pontos cocirculares, vamos utilizar pontos no parabolóide,  $a = (a_1, a_2, a_3)$  com  $a_3 = a_1^2 + a_2^2$ , conforme utilizado na prova do teorema anterior. Segundo o teorema anterior os pontos  $a, b, c, d$  estão no mesmo círculo se e somente se  $a', b', c', d'$  são coplanares em  $\mathbb{R}^3$ . Isto quer dizer que  $d'$  é uma combinação afim de  $a', b', c'$ , o que é equivalente a ter  $\det \Gamma = 0$ .

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

## Lema (incircle)

*O ponto  $d$  está dentro do circuncírculo de  $a, b, c$  se e somente se  $\det\Delta \cdot \det\Gamma < 0$ , e  $d$  está fora do circuncírculo de  $a, b, c$  se e somente se  $\det\Delta \cdot \det\Gamma > 0$ .*

Seja  $S$  um conjunto de  $n$  pontos,  $p_i = (\phi_{i,1}, \phi_{i,2})$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Enumerando as  $2n$  coordenadas numa seqüência, podemos pensar  $S$  como sendo um ponto no espaço  $2n$  dimensional. Mais especificamente,  $S$  é mapeado em  $Z = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ , onde  $\zeta_{2i-1} = \phi_{i,1}$  e  $\zeta_{2i} = \phi_{i,2}$ , para  $1 \leq i \leq n$ . O ponto  $Z$  é degenerado se e somente se

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} & \zeta_{2k} \end{bmatrix} = 0$$

Seja  $Z$  pertence  $\mathbb{R}^{2n}$ , e para cada  $\epsilon > 0$  definimos

$$Z(\epsilon) = (\zeta_1 + \epsilon_1, \zeta_2 + \epsilon_2, \dots, \zeta_{2n} + \epsilon_{2n}),$$

onde  $\epsilon_j = f_j(\epsilon)$  com  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $f_j(0) = 0$ . Se os  $\epsilon_j$  são diferentes o suficiente, temos as seguintes propriedades dadas por  $\epsilon$  quando é suficientemente pequeno

- ▶ I.  $Z(\epsilon)$  é não degenerado.
- ▶ II.  $Z(\epsilon)$  mantém todas as propriedades não degeneradas de  $Z$ .
- ▶ III. O cômputo adicional para simular  $Z(\epsilon)$  é desprezível.

$$\Delta(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} + \epsilon_{2i-1} & \zeta_{2i} + \epsilon_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} + \epsilon_{2j-1} & \zeta_{2j} + \epsilon_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} + \epsilon_{2k-1} & \zeta_{2k} + \epsilon_{2k} \end{bmatrix}$$

$$\det \Delta(\epsilon) = \det \Delta - \det \Delta_1 \cdot \epsilon^{2^{2i-1}} + \det \Delta_2 \cdot \epsilon^{2^{2i}} + \det \Delta_3 \cdot \epsilon^{2^{2j-1}} - 1 \cdot \epsilon^{2^{2j-1}} \epsilon^{2^{2i}} \pm \dots$$



$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} & \zeta_{2k} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2j-1} \\ 1 & \zeta_{2k-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2k} \end{bmatrix},$$

Boolean LEFTTURN (integer  $i, j, k$ ):

Asses  $i < j < k$ ;

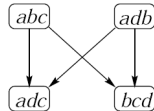
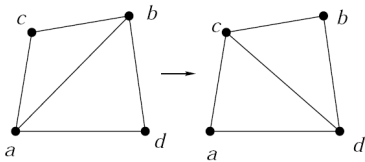
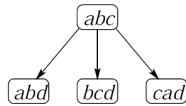
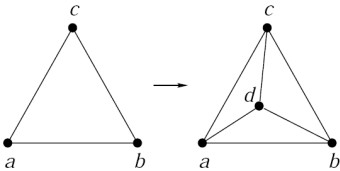
Case  $\det \Delta \neq 0$ : return  $\det \Delta > 0$ ;

Case  $\det \Delta_1 \neq 0$ : return  $\det \Delta_1 < 0$ ;

Case  $\det \Delta_2 \neq 0$ : return  $\det \Delta_2 > 0$ ;

Case  $\det \Delta_3 \neq 0$ : return  $\det \Delta_3 > 0$ ;

Otherwise: return FALSE.



## 5.1 Algoritmo

---

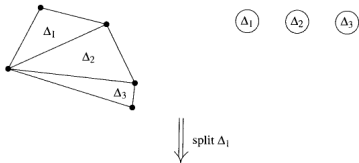
### Algorithm 5 Delaunay

---

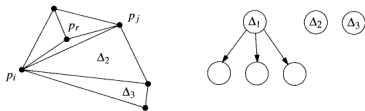
**Require:** Um array de  $n$  pontos  $S$

**Ensure:** Um array de triângulos  $D$

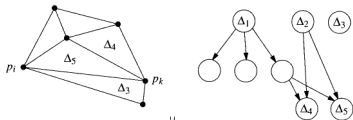
- 1: createArtificialPoints( $S, n$ ) {Cria os triângulo artificial}
  - 2: **for**  $i < n$  **do**
  - 3:    $t \leftarrow \text{findTriangle}(v_i, DAG)$
  - 4:   split( $p_i, t$ ) {Adiciona  $p_i$  a  $p_a p_b p_c$ , dividindo-o em três triângulos}
  - 5:   legalizeEdge( $p_i, t_1$ )
  - 6:   legalizeEdge( $p_i, t_2$ )
  - 7:   legalizeEdge( $p_i, t_3$ )
  - 8: **end for**
-



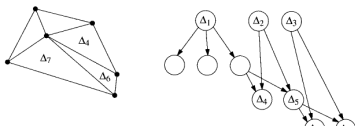
split  $\Delta_1$



flip  $\overline{p_i p_j}$



flip  $\overline{p_i p_k}$



Implementação

Análise

# Análise

## Lema

*Esperamos que o número de triângulos criados por algoritmo é no máximo  $9n + 1$*

## Demonstração.

- ▶ Depois da inserção de  $p_r$  no passo  $r$  do algoritmo, existem  $k$  arestas incidentes em  $p_r$ , seja  $deg(p)$  o grau de  $p_r$ , e  $deg(p) = k$ .
- ▶ pela inserção de  $p_r$ 
  - ▶ 3 novos triângulos pelo splitting
  - ▶  $2(k - 3)$  pelo fliptotal temos  $2(k - 3) + 3$  novos triângulos



## Demonstração.




- ▶ Qual é o valor esperado do grau de  $p_r$ ?
  - ▶  $3(r + 3) - 6$  número de arestas do diagrama de Delaunay
  - ▶ mais 3 do triângulo  $p_{-1}, p_{-2}, p_{-3}$
  - ▶ total  $3(r + 3) - 9$  arestas
  - ▶  $2(3(r + 3) - 9) = 6r$  vértices no passo  $r$  do algoritmo.
- ▶ Logo para os  $r$  pontos temos que na media ficam 6 arestas por vértice.
- ▶ O número de triângulos no passo  $r$  do algoritmo é como segue:

$$\begin{aligned} E[n\_de\_novos\_ \Delta's\_no\_passo\_r] &\leq E[2deg(p_r) - 3] \\ &= 2E[deg(p_r)] - 3 = 2(6) - 3 = 9 \end{aligned}$$

- ▶ Número total de triângulos =  $9n + 1$





-  P. C. P. Carvalho e L. H. de Figueiredo, *Introdução à Geometria Computacional*, 18<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.
-  M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 1997.
-  H. Edelsbrunner, *Geometry and Topology for Mesh Generation*, Cambridge, 2001.