Aritmética em $[0, \infty]$ (1)

~~a+b=~~

$a + \infty = \infty + a = +\infty \quad \forall\ a \in [0, +\infty]$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & 0 < a \leq +\infty \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

+ comutativa e assoc. em $[0, +\infty]$

· comutativa e assoc. em $[0, +\infty]$

· distrib. rel + em $[0, +\infty]$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + ac$$

$a, b \in [0, +\infty]$

$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \qquad a_n \to a$ qdo $n \to \infty$

$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \qquad b_n \to b$ qdo $n \to \infty$

$\Downarrow$

$a_n + b_n \to a + b$

$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ qdo $n \to \infty$

(a) uma medida positiva é uma função μ

. definida numa σ-algebra $\mathcal{M}$,

. com valores em $[0,+\infty]$ e

. contavelmente aditiva (σ-aditiva)

$A_n \in \mathcal{M}$ $n=1,2,\ldots$, $m\neq n \Rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$\left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \right)$$

. finita em algum $A \in \mathcal{M}$

$\mu(A) < +\infty$ para algum $A \in \mathcal{M}$

(b) espaço ~~de~~ medida =

= espaço mensurável + medida pos.

$= (X, \mathcal{M}, \mu)$

c/ σ-alg em X medida em $\mathcal{M}$

(c) uma medida complexa

é uma função complexa definida numa σ-algebra contavelmente aditiva

→ "MEDIDA" = MEDIDA POSITIVA

<u>Teorema</u> Seja μ uma medida positiva definida numa σ-algebra $\mathcal{M}$

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $A_1, \dots A_n$ mesuraveis e disjuntos dois-a-dois

$\Rightarrow \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$

(c) A, B mens. $A \subseteq B$

$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

...

(d) A_n mens $n = 1, 2, \dots$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, $A = \bigcup A_n$

$\Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$ qdo $n \to \infty$

(e) A_n mens $n = 1, 2, \dots$ $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, $A = \bigcap A_n$

$\mu(A_1) < +\infty$

$\Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$ qdo $n \to \infty$

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \qquad A = \cap A_n$

$\mu(A_1) < +\infty$

$C_n = A_1 \setminus A_n$

$\cup C_n = A_1 \setminus A$

$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$

$$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$$

$$\mu(\cup C_n) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

medida de contagem

$X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{n}^{\text{o}} \text{ de elem. de } A & A \text{ finito} \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

—''—

LEMA. μ medida pos. na σ-alg $\mathcal{M}$ (de X)

(i) $E \in \mathcal{M}$,

$$\varphi(A) = \mu(A \cap E) \qquad A \in \mathcal{M}$$

é uma med. pos.

(ii) $0 \leq c \leq +\infty$

$$\varphi(A) = c.\mu(A) \qquad A \in \mathcal{M}$$

é uma med.

PROP. $\mathcal{M}$ σ-alg, μ e λ medidas positivas em $\mathcal{M}$

$$\varphi(E) = \mu(E) + \lambda(E) \qquad E \in \mathcal{M}$$

é uma medida

COR. $\mu_1 \dots \mu_n$ med. pos em $\mathcal{M}$

$c_1 \dots c_n \in [0, +\infty]$

$\Downarrow$

$$\varphi(E) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu_k(E)$$

med. pos. em $\mathcal{M}$

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES POSITIVAS

$\mathcal{M}$ σ-algebra em X

μ medida positiva em $\mathcal{M}$

DEF: $s: X \to [0,+\infty)$ função simples, positiva mensurável.

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{A_i}$$

onde $\{a_1, \dots, a_n\} = s(X)$,

$A_i = s^{-1}(\{a_i\}) \quad i = 1, \dots, n$

$E \in \mathcal{M}$

$$\boxed{\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i \cap E)}$$

Proposicao: Seja $s: X \to [0, +\infty)$ uma fç 8
simples mensurável

(i) a aplicaçao

$$\varphi(E) = \int_E s \, d\mu \qquad E \in \mathcal{M}$$

é uma medida positiva em $\mathcal{M}$

(ii) $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E s \, d\mu = 0$

(iii) $s = a$ em $E \Rightarrow \int_E s \, d\mu = a \mu(E)$

Obs: $0 \leq a < +\infty$, A mensurável

$$\int_E a \chi_A \, d\mu = a \mu(A \cap E)$$

Proposição: Sejam $s: X \to [0, +\infty)$ e
$t: X \to [0, +\infty)$ funções simples, mensur.
$0 \leq c < +\infty$

$$\int_E s + t \, d\mu = \int_E s \, d\mu + \int t \, d\mu$$

$$\int_E c s \, d\mu = c \int_E s \, d\mu$$