

# Proposta de Curso Introdutório

27º Colóquio Brasileiro de Matemática  
IMPA, 27 a 31 de julho de 2009

**1- Título do Curso:** Introdução a Sistemas Dinâmicos Estocásticos

**2- Nível:** elementar (Iniciação Científica).

**3- Autor:** Paulo Régis Caron Ruffino.

**4- Descrição do Curso:**

A intenção deste curso é divulgar a teoria de sistemas dinâmicos estocásticos, suas motivações, exemplos clássicos, seu potencial, aplicações e na medida do possível, instigar e provocar os alunos de graduação com problemas em aberto que tem enunciados de fácil compreensão. No texto que tenho em preparação, depois de construir os objetos básicos da teoria, apresento com mais detalhes (sem perder o caráter elementar dos argumentos e da motivação), uma série de propriedades, resultados e exemplos que venho apresentando em palestras de divulgação que faço há vários anos.

Ministrei na Unicamp por três vezes um versão anterior desse mesmo curso na forma de Tópicos Especiais, para a pós-graduação, onde se exigiam pré-requisitos em teoria da medida e análise funcional. No último ano preparei e ministrei em duas oportunidades uma outra versão, que é a proposta aqui, voltada para alunos de graduação. Como disse acima, as notas dessa versão em nível de iniciação científica ainda estão em preparação. Essa versão elementar do curso foi ministrada em duas oportunidades:

1) Em Bucaramanga (UIS), Colômbia, 10-14 de dezembro de 2007. Com 5 aulas de 1h.

2) III Reunião Regional de Sistemas Dinâmicos no IBILCE-UNESP São José do Rio Preto-SP, 02-05 Setembro de 2008 (ministrado em colaboração com o Prof. Pedro Catuogno). Em 3 aulas de 1:30h cada.

**4.1- Objetivos:**

Apresentar a alunos de graduação uma visão do que são sistemas dinâmicos estocásticos, motivações, ferramentas, aplicações e potencial para resolução de problemas.

## 4.2- Descrição do Conteúdo:

Espaço de probabilidade finito. Inicialmente, sempre baseado nesses espaços: conceito de variável aleatória, aplicações e exemplos elementares de sistemas contínuos com aleatoriedade finita (EDO com parâmetros aleatórios em um conjunto finito – dois, inicialmente, neste caso!). Esperança e esperança condicional (discretos). Teorema da medida induzida e distribuição de variáveis aleatórias. Neste ponto aparecem distribuições contínuas e, portanto, a necessidade de espaços de probabilidade não-atômicos. Depois de já ter a motivação e a intuição do caso finito, tomando limites nesse contexto, a noção de integração aparece naturalmente para espaços de probabilidade mais gerais. Assim, distribuição é rerepresentada como (uma versão de) o teorema de Radon-Nikodym. Distribuição gaussiana. Processos de Markov em espaços finitos (discretos). Extensão para espaços contínuos (retas e planos). Movimento browniano e martingales na reta e no plano. Apresentação, com demonstrações omitidas (ou no apêndice) do teorema de extensão e do critério de Kolmogorov para existência de trajetórias contínuas. Exemplos. Variação quadrática e exemplos. Uma demonstração da fórmula de Itô tomando o limite de somas de Riemann de fórmulas de Taylor de segunda ordem. Aplicações da Fórmula de Itô. Ciclos gerados por sistemas estocásticos. Comparação com sistemas de controle. Solução de problemas determinísticos usando métodos probabilísticos (e.g. solucionar o problema de Dirichlet no plano atirando em sequência moedas sobre a mesa).

No capítulo final descrevo a abertura que a área tem para prosseguir em pesquisa apontando em três direções, sem necessariamente usar uma linguagem técnica: enfoque dinâmico para as trajetórias, enfoque analítico da teoria de semimartingales e o enfoque geométrico para trajetórias em variedades.

## 4.3- Distribuição de Capítulos e Seções:

*Introdução e Motivação*

*Capítulo 1. Variáveis Aleatórias*

- 1.1 Espaços de probabilidade
- 1.2 Esperança e esperança condicional
- 1.3 distribuição de variáveis aleatórias e Teorema de Radon-Nikodym
- 1.4 Independência
- 1.5 Exercícios

*Capítulo 2. Processos Estocásticos*

- 2.1 Definição, trajetórias e equivalências
- 2.2 Processos de Markov em espaço de estados finitos
- 2.3 Teorema da Extensão de Kolmogorov
- 2.4 Martingales e propriedades
- 2.5 Movimento Browniano
- 2.6 Exercícios

*Capítulo 3. Integração estocástica*

- 3.1 Integração de Itô e de Stratonovich
- 3.2 Fórmula de Itô
- 3.3 Fórmula de Dynkin e Aplicações
- 3.4 Exercícios

*Capítulo 4. Aplicações em Sistemas Dinâmicos Estocásticos*

- 4.1 Sistemas estocásticos e aleatórios: cociclos
- 4.2 Estabilidade da dinâmica estocástica
- 4.3 Conjugações de cociclo
- 4.4 Alguns aspectos da geometria estocástica
- 4.5 Exercícios

**4.4- Bibliografia:**

As referências neste nível elementar são poucas e em geral estão fragmentadas entre sistemas dinâmicos e teoria de probabilidade. Os textos mencionados abaixo são para motivar os alunos para estudos posteriores. Entre outros eu incluirei:

1. Referências em teoria da medida. Por exemplo, existem 3 livros do Projeto Euclides, os textos do Bartle, Royden e/ou outros.
2. Arnold, L. - Random Dynamical Systems. Springer, 1998.
3. Perko, L. - Differential Equations and Dynamical Systems. 3a. edição. Springer-Verlag, 2001.
4. Shiriyayev, A. N.- Probability, Springer 1984.
5. Protter, Ph. - Stochastic Integration and Differential Equation. Springer-Verlag, 1990.

6. Oksendal, B. - Stochastic Differential Equations: An Introduction with applications. Springer-Verlag. 6a. Edição, 2003.
7. Marques, M.S.F. e San Martin, L. A. B. - Cálculo Estocástico. 18<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática.

**5- Pré-requisitos:**

As aulas serão dirigidas, como das outras vezes que apresentei esse curso, para alunos de graduação em Matemática, Física, Engenharias e afins.

Paulo Régis C. Ruffino  
(Proponente)

Campinas, 30 de Outubro de 2008.