

AN INVITATION TO WEB GEOMETRY
FROM ABEL'S THEOREM TO THE ALGEBRAIZATION OF WEBS

PROPOSTA DE CURSO PARA O
27º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

JORGE VITÓRIO PEREIRA AND LUC PIRIO

1. DADOS BÁSICOS

Título: An invitation to web geometry

Subtítulo: From Abel's theorem to the algebraization of webs

Autores: Jorge Vitório Pereira e Luc Pirio

Pré-requisitos: Além de uma certa maturidade matemática será útil conhecimento sobre os rudimentos de geometria algébrica/analítica complexa. Familiaridade com o material coberto por um curso sobre superfícies de Riemann e/ou curvas algébricas deve ser suficiente.

Nível: Doutorado

Idioma: Tanto o texto quanto as aulas serão em inglês.

2. OBJETIVO

Apresentar uma introdução auto-contida à teoria dos webs de codimensão um com ênfase nas questões ligadas à algebrização. O curso começa com uma tradução para a teoria das webs de um tópico clássico da teoria de curvas algébricas/superfícies de Riemann e termina com resultados recentes sobre a algebrização de webs de codimensão um em dimensão superior à três e a existência de webs excepcionais em dimensão dois.

Além de fornecer o básico para que os interessados ajudem a desenvolver o tema, o curso também visa discutir um ponto de vista pouco conhecido sobre parte da teoria das curvas algébricas.

3. UM BREVE RESUMO DO MATERIAL A SER APRESENTADO NO CURSO

3.1. Webs e suas Relações Abelianas. Um **germe de k -web de codimensão um** $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$ on $(\mathbb{C}^n, 0)$ é uma coleção de k germes de folheações holomorfas sujeitas a condição de que para cada m destas folheações, $m \leq n$, a intersecção de seus espaços tangentes na origem seja de codimensão m .

O **espaço de relações abelianas** $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ para um k -web $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$ arbitrário define-se da seguinte forma: se as folheações \mathcal{F}_i são induzidas por 1-formas integráveis ω_i então

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \left\{ (\eta_i)_{i=1}^k \in (\Omega^1(\mathbb{C}^n, 0))^k \mid \forall i \, d\eta_i = 0, \eta_i \wedge \omega_i = 0 \text{ and } \sum_{i=1}^k \eta_i = 0 \right\} .$$

Note que se $u_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são submersões locais definindo as folheações \mathcal{F}_i então, após integração, as relações abelianas induzem equações funcionais das forma

$$\sum_{i=1}^k g_i(u_i) = 0$$

onde $g_i : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são germes de funções holomorfas.

Claramente $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ é um espaço vetorial e sua dimensão é o **posto** de \mathcal{W} , denotado aqui por $\text{rk}(\mathcal{W})$. É um Teorema de Bol que o posto de uma k -web planar é limitado superiormente por $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$. Esta cota foi generalizada para k -webs de codimensão um em dimensão arbitrária por S.S. Chern em sua tese de Doutorado. O Teorema de Chern diz que

$$(3.1) \quad \text{rk}(\mathcal{W}) \leq \pi(n, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \max(0, k - j(n-1) - 1).$$

Uma k -web \mathcal{W} em on $(\mathbb{C}^n, 0)$ é dita de **posto máximo** se $\text{rk}(\mathcal{W}) = \pi(n, k)$. Observe que o inteiro $\pi(n, k)$ é a cota de Castelnuovo para o gênero aritmético de curvas de grau k em \mathbb{P}^n irredutíveis e não-degeneradas.

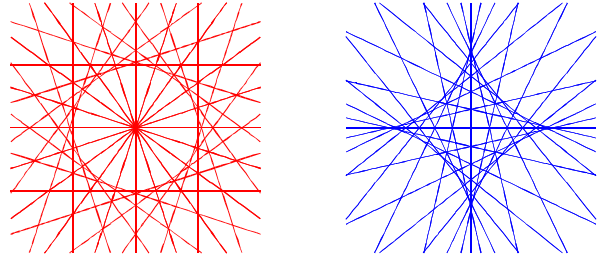
3.2. Webs Algebrizáveis e o Teorema de Abel. O aparecimento da cota de Castelnuovo na Geometria das webs está longe de ser uma mera coincidência.

Se C é uma curva projetiva não-degenerada de grau k em \mathbb{P}^n então para todo hiperplano genérico H_0 define-se um germe de k -web \mathcal{W}_C de codimensão um em (\mathbb{P}^n, H_0) via dualidade projetiva. Tal web é induzido pelos níveis das aplicações holomorfas $p_i : (\mathbb{P}^n, H_0) \rightarrow C$ caracterizadas por

$$H \cdot C = p_1(H) + p_2(H) + \cdots + p_k(H)$$

para todo H próximo a H_0 .

FIGURA 1. Na esquerda temos \mathcal{W}_C para cúbica reduzida C formada pela união de um reta e uma cônica. Na direita temos \mathcal{W}_C para uma quártica racional irredutível. C .



O Teorema de adição de Abel diz que para todo $p_0 \in C$ e toda 1-forma diferencial holomorfa $\omega \in H^0(C, \omega_C)$ a soma

$$\int_{p_0}^{p_1(H)} \omega + \int_{p_0}^{p_2(H)} \omega + \cdots + \int_{p_0}^{p_k(H)} \omega$$

não depende de H . Pode-se reformular este resultado sucintamente da forma seguinte:

$$\sum_{i=1}^k p_i^* \omega = 0.$$

Segue que as 1-formas em C podem ser interpretadas como relações abelianas do k -web \mathcal{W}_C . Em particular $\dim \mathcal{A}(\mathcal{W}_C) \geq h^0(C, \omega_C)$ e se C é uma **curva extremal** — reduzida, não degenerada e atinge a cota de Castelnuovo — então \mathcal{W}_C é de posto máximo.

Uma questão central na Teoria das Webs é a caracterização/classificação das webs **algebrizáveis** de codimensão um. Estas são as webs equivalente à \mathcal{W}_C para alguma curva projetiva C .

3.3. Recíproca do Teorema de Abel. A ferramenta ubíqua para a algebrização de k -webs é o seguinte Teorema.

Teorema 3.1. *Sejam C_1, \dots, C_k germes de curvas em \mathbb{P}^n todos intersectando transversalmente um certo hiperplano H_0 e escreva $p_i(H) = H \cap C_i$ para hiperplanos H suficientemente próximos à H_0 . Se $\omega_i, i = 1 \dots k$ são germes de 1-formas não identicamente zero nas curvas C_i satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^k p_i^* \omega_i = 0,$$

então existe uma curva algébrica reduzida $C \subset \mathbb{P}^n$ de grau k e uma 1-forma holomorfa ω sobre C tal que $C_i \subset C$ e $\omega|_{C_i} = \omega_i$ para todo i variando de 1 até k .

O Teorema 3.1 no caso de quárticas planas foi obtido por Sophus Lie em suas investigações sobre superfícies de dupla translação, cf. Figura 2. O caso geral segue da prova de Darboux (utilizando idéias de Poincaré) do Teorema de Lie.

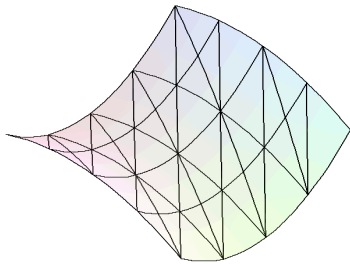


FIGURA 2. Uma superfície de dupla translação é uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ que admite duas parametrizações independentes da forma $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$. Em S temos um 4-web \mathcal{W} naturalmente definido. As retas tangentes as folhas de \mathcal{W} intersectam o hiperplano no infinito ao longo de 4 germes de curvas. O Teorema de Lie afirma que estas 4 curvas estão contidas em uma curva algébrica de grau 4.

3.4. Algebrização. A relevância do Teorema 3.1 na Teoria das Webs torna-se evidente uma vez traduzido — como Blaschke-Howe ($n = 2$) e Bol ($n \geq 3$) fizeram — ao espaço projetivo dual. Lembramos que um **web linear** é caracterizado pelo fato de que todas as suas folhas são abertos de hiperplanos.

Teorema 3.2. *Um k -web linear \mathcal{W} em $(\mathbb{C}^n, 0)$ admitindo uma relação abeliana que não é relação abeliana de nenhum subweb estende-se a um web global (mas singular) \mathcal{W}_C em todo o \mathbb{P}^n .*

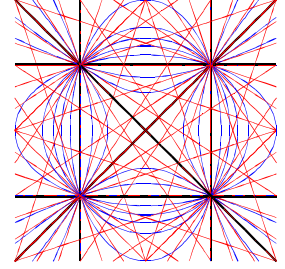
Com o Teorema 3.2 em mãos a algebrização de $2n$ -webs em $(\mathbb{C}^n, 0)$ com $n + 1$ relações abelianas linearmente independentes segue de um belo argumento devido Blaschke que inspirou-se nos trabalhos de Poincaré sobre as superfícies de dupla translação.

Recentemente Jean-Marie Trépreau — dando continuidade a trabalhos de Bol e Chern-Griffiths — provou o notável Teorema abaixo.

Teorema 3.3 ([16]). *Sejam $n \geq 3$ e $k \geq 2n$ ou $k \leq n + 1$. Se \mathcal{W} é um k -web em $(\mathbb{C}^n, 0)$ de posto máximo então \mathcal{W} é algebrizável.*

3.5. Webs Excepcionais. Em dimensão dois temos algebrização apenas para 3 e 4-webs de posto máximo (Teoremas de Blaschke-Dubordieu e Lie respectivamente). Já para 5-webs a situação é bastante misteriosa e o primeiro exemplo de 5-web de posto máximo não algebrizável é devido a Bol. Os webs de posto máximo e não algebrizáveis são chamados de **webs excepcionais**.

FIGURA 3. Web Excepcional de Bol \mathcal{B}_5
 é o web determinado por quatro pencils de retas em posição geral e pelo pencil de cônicas pelos pontos bases destes. Por quase 70 anos permaneceu como o único web excepcional conhecido. Uma de suas relações abelianas é a famosa equação funcional de Abel para o dilogaritmo.



Em um número de ocasiões distintas S.S. Chern enfatizou a importância de um melhor entendimento dos webs excepcionais no plano complexo. Folheando rapidamente a bibliografia de Chern sobre o tema encontra-se as seguintes citações (veja também [4, Unsolved Problems], [5, Problem 6]):

- “At this low-dimensional level an important unsolved problem is whether there are other 5-webs of rank 6, besides algebraic ones and Bol’s example.”, [6]
- “In general, the determination of all webs of maximum rank will remain a fundamental problem in web geometry and the non-algebraic ones, if there are any, will be most interesting.”, [5]
- “(...) we cannot refrain from mentioning what we consider to be the fundamental problem on the subject, which is to determine the maximum rank non-linearizable webs. The strong conditions must imply that there are not many. It may not be unreasonable to compare the situation with the exceptional simple Lie groups.”, [3]

A insistência de Chern justifica-se facilmente. Os webs excepcionais são, em certo sentido, generalizações das curvas algébricas planas e como tais merecem um melhor entendimento.

As indagações acima esperaram quase 20 anos para receber uma primeira resposta. Em [8], Hénaut reconhece o 9-web induzido pelas funções racionais presentes na equação funcional à nove termos de Spence-Kummer para o trilogaritmo como um bom candidato à excepcionalidade. Em 2002, Pirio e Robert provaram independentemente que este 9-web é de fato excepcional.

Na conferência em homenagem ao aniversário de 200 anos do nascimento de Abel, [7], Griffiths sugere que a excepcionalidade está em relação estrita com os polilogaritmos. Em particular ele pergunta se todos os webs excepcionais estão relacionados com equações funcionais para polilogos.

Frente a todas estas questões, foi uma surpresa quando recentemente mostrou-se que $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 + y^2)$ é um 5-web excepcional e que seu espaço de relações abelianas é gerado por identidades polinomiais elementares (cf. [13] e também [12]).

Outros webs excepcionais foram determinados em [12, 9, 11]. Em particular sabe-se hoje que existem k -webs excepcionais no plano para todo $k \geq 5$. Este resultado foi primeiramente obtido em [9] via o estudo de webs admitindo **automorfismos infinitesimais**.

No que diz respeito à classificação de webs excepcionais não sabe-se muito até o momento. Talvez o resultado mais completo neste sentido foi obtido recentemente pelos dois proponentes. Trata-se da classificação de webs quasi-lineares e completamente decomponíveis em superfícies complexas compactas. No caso particular de \mathbb{P}^2 classificação diz que existem 13 webs excepcionais esporádicos e quatro famílias infinitas enumeráveis destes.

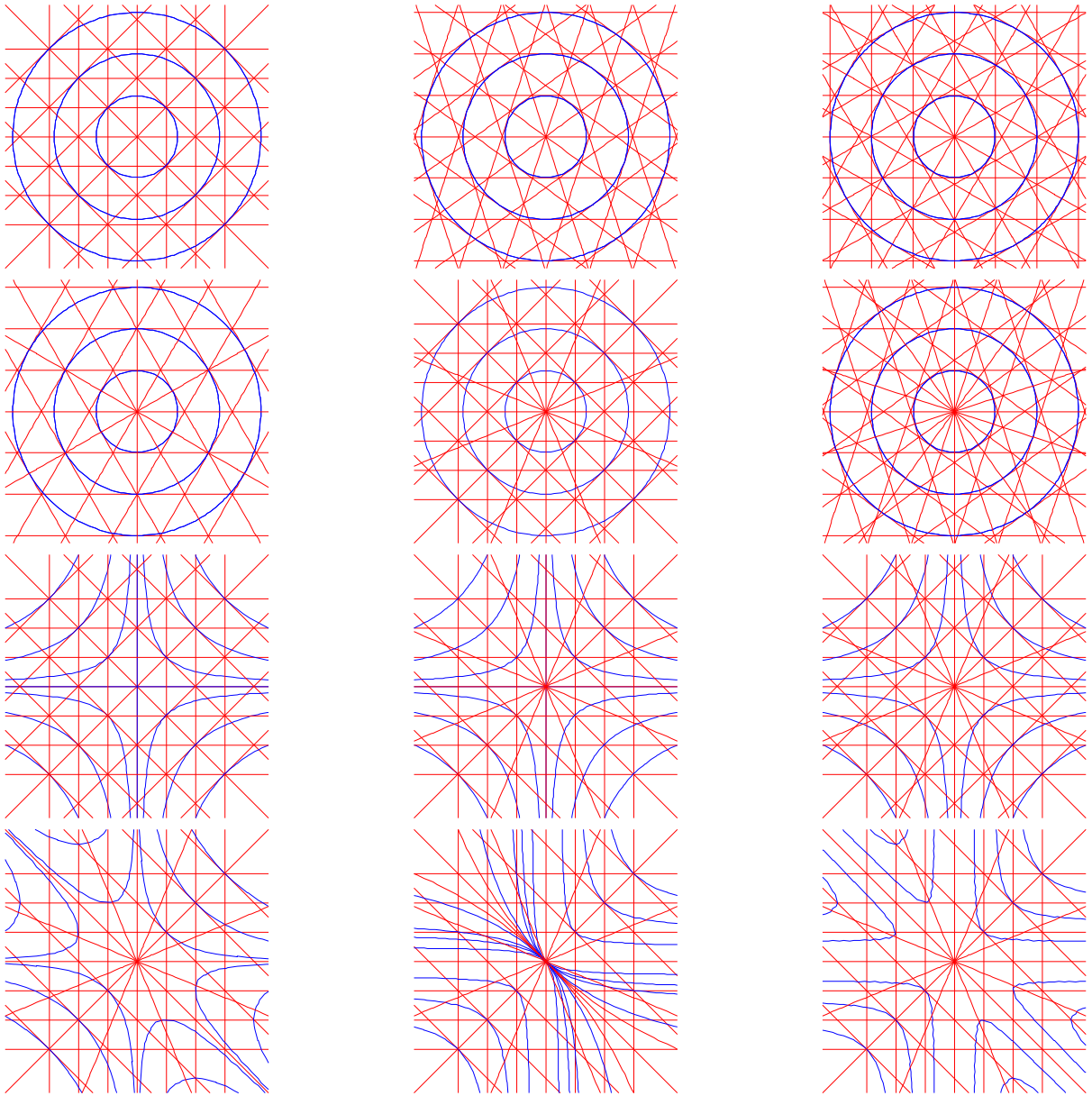


FIGURA 4. Alguns webs excepcionais em \mathbb{P}^2 .

4. ESTRUTURA DO CURSO

Aula #1: Após discutir as definições e apresentar exemplos de webs que aparecem na *natureza* a exposição focará nos 3-webs planares e em particular discutirá quando estes são hexagonais, i.e. equivalentes aos webs formados por famílias de retas paralelas. Uma vez estabelecida a caracterização dos webs hexagonais introduzir-se-á o conceito central do curso: o espaço das relações abelianas. A primeira aula terminará com um esboço da prova das cotas de Bol e Chern, fórmula (3.1), para a dimensão destes espaços.

Aula #2: A segunda aula será completamente dedicada aos webs algébricos. Como explicado na seção §3.2, estes são obtidos a partir de curvas algébricas via dualidade projetiva. Discutir-se-á como o teorema de adição de Abel estabelece conexão entre a teoria de formas diferenciais para as curvas projetivas e a teoria das relações abelianas para os webs algébricos. Esta terminará com uma prova do teorema de adição de Abel e o enunciado de sua recíproca, ver Teorema 3.1.

Aula #3: A terceira aula começará com a prova da recíproca do teorema de Abel e terminará com a aplicação destes na algebrização de webs lineares.

Aula #4: O teorema de algebrização de Bol-Chern-Griffiths-Trépreau, ver Teorema 3.3, será o tema central da quarta aula. Trata-se de um resultado fundamental cuja prova é bastante elaborada. Nesta aula apresentar-se-á um histórico das contribuições e as grandes linhas da demonstração.

Aula #5: A quinta e última aula será dedicada ao webs excepcionais. Além de discutir o clássico 5-web de Bol, esta última aula incluirá: (a) um *survey* sobre os exemplos recentemente encontrados por Marín-Pereira-Pirio, Pirio, Pirio-Trépreau e Robert; (b) discussão sobre a estrutura dos espaço de relações abelianas para webs admitindo automorfismos infinitesimais; e (c) alguns problemas em aberto.

5. ESTRUTURA DO TEXTO

O primeiro e único(!) livro sobre a teorias das webs com ênfase nas questões de algebrização [1] data da década de 30 e está escrito em alemão. Tendo em vista o ressurgimento de interesse na teoria e subsequentes avanços acreditamos que é hora de escrever um novo livro sobre o assunto.

Pretendemos aproveitar da tradição do Colóquio Brasileiro de Matemática para redigir uma primeira versão de tal livro e usá-la como texto de apoio para o curso proposto. Dito isto, fica claro que pretendemos que o texto contenha não só o material coberto nas aulas mas também tópicos extras.

O texto conterà no mínimo os cinco capítulos detalhados abaixo.

Capítulo 1 - Introdução.

1.1. Definições Básicas: Webs como: (a) equações diferenciais de primeira ordem e de grau arbitrário; (b) coleção de folheações; (c) tensor diferencial simétrico e localmente decomponível. Webs globais em superfícies. Discriminante de uma web e a representação de monodromia.

1.2. Exemplos.: Webs associados a superfícies projetivas. Webs relacionados ao teorema de Tait-Knesser.

1.3. 3-webs planares: Curvatura. Paralelização.

- 1.4. Relações Abelianas:** Definição. Sistemas lineares gerados por potências de formas lineares. Cota de Bol. Condições lineares no espaço de quádricas. Lema de Castelnuovo. Cota de Chern.

Capítulo 2 - Webs algébricos.

- 2.1. Definição de webs algébricos:** Dualidade projetiva. Webs duais à curvas.
2.2. Teorema de adição de Abel: Formulação clássica. Formulação moderna.
2.3. Aplicações: Formas diferenciais e relações abelianas. Cota de Castelnuovo para o gênero de curvas como corolário das cotas de Chern.

Capítulo 3 - Recíproca do Teorema de Abel.

- 3.1. Resíduo de Poincaré e formas diferenciais:** Definição. Propriedades básicas. Extensão de formas meromorfas.
3.2. Recíproca do Teorema de Abel: Argumento de Darboux em dimensão dois. O caso geral.
3.3 Aplicações: Superfícies de dupla translação. Algebrização de webs lineares. Aplicação de Poincaré. Algebrização de $2n$ -webs em $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Capítulo 4 - Algebrização.

- 4.1. Formas normais:** Lema de Castelnuovo (bis). Curvas racionais em $\mathbb{P}T^*(\mathbb{C}^n, 0)$.
4.2. Aplicação de Poincaré: Definição. Condições de segunda ordem. Cálculo do posto
4.3. Algebrização, primeiro passo: A imagem da aplicação de Poincaré é algébrica.
4.4. Algebrização, segundo passo: Um sistema linear de curvas racionais. Linearização. Conclusão.

Capítulo 5 - Webs excepcionais.

- 5.1. Critérios para linearização:** Equação diferencial de segunda ordem associada. Teorema de Liouville. Linearização de webs.
5.2. O exemplo de Bol e variações: Integrais iteradas. Dilogarismo. Relações abelianas.
5.3. Automorfismos infinitesimais: Estrutura do espaço das relações abelianas. Variação do posto. Exemplos derivados de curvas algébricas.
5.4. Webs quasi-lineares completamente decomponíveis: Classificação no plano projetivo. Baricentro de webs com respeito à uma folheação. Estratégia da prova.
5.5. Outros exemplos e problemas em aberto:

REFERÊNCIAS

- [1] W. Blaschke e G. Bol – *Geometrie der Gewebe*. Die Grundlehren der Math. 49, Springer, Berlin, 1938.
[2] S. S. Chern and P. Griffiths – *Abel's theorem and webs*. Jahr. Deutsch. Math.-Ver. 80 (1978) 13–110.
[3] S. S. Chern and P. Griffiths – *Corrections and addenda to our paper: "Abel's theorem and webs"*. Jahr. Deutsch. Math.-Ver. 83 (1981) 78–83.
[4] S. S. Chern – *Web geometry*. Bull. Amer. Math. Soc. 6 1 (1982) 1–8.
[5] S. S. Chern – *The mathematical works of Wilhelm Blaschke— an update*. Wilhelm Blaschke Gesammelte Werke. Band 5. (1985) 21–23.
[6] S. S. Chern – *Wilhelm Blaschke and Web Geometry*. Wilhelm Blaschke Gesammelte Werke. Band 5. (1985) 25–27.

- [7] P. Griffiths – *The Legacy of Abel in Algebraic Geometry*. The Legacy of Niels Henrik Abel, Springer-Verlag (2004) 179–205.
- [8] A. Hénaut – *Analytic web geometry*. Web theory and related topics. World Scientific (2001) 6–47.
- [9] D. Marín, J. V. Pereira e L. Pirio – *On planar webs with infinitesimal automorphisms*. Inspired by Chern, Nankai Tracts in Mathematics 11 (2006) 351–364.
- [10] J.V. Pereira – *Algebraization of Codimension on Webs Tissus*. Séminaire Bourbaki (2007/08), Exp. No. 974, to appear.
- [11] J.V. Pereira e L. Pirio – *Classification of exceptional CDQL webs on compact complex surfaces*. preprint, available at Arxiv.
- [12] L. Pirio – *Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus*. Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 2004.
- [13] L. Pirio – *Sur les tissus plans de rang maximal et le problème de Chern*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004), 131–136.
- [14] L. Pirio – *Abelian functional equations, planar web geometry and polylogarithms*. Selecta Math. 11 no. 3-4 (2005) 453–489.
- [15] G. Robert – *Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans*. Prépublication 146 Université Bordeaux 1 (2002).
- [16] J.-M. Trépreau – *Algébrisation des Tissus de Codimension 1 – La généralisation d'un Théorème de Bol*. Inspired by Chern, Nankai Tracts in Mathematics 11 (2006) 399–433.

IMPA

E-mail address: `jvp@impa.br`

IRMAR

E-mail address: `luc.pirio@univ-rennes1.fr`