

## Aritmética Modular — Exercícios

1. Qual a menor solução positiva do sistema abaixo?

$$x \equiv 3 \pmod{19}$$

$$x \equiv 7 \pmod{62}$$

2. Quais são os algarismos das dezenas e das unidades em  $3^{2009}$  ?
3. Usando uma “prova dos 11”, determine se a conta abaixo está correta:

$$12345 \times 6789 = 83180205$$

O que diz a “prova dos 9” nesse caso?

## Aritmética Modular — Soluções

1. De  $x \equiv 7 \pmod{62}$  obtemos  $x = 62u + 7$ . Substituindo na primeira equação, obtemos:

$$62u + 7 \equiv 3 \pmod{19}$$

Simplificando, obtemos

$$5u \equiv -4 \pmod{19}$$

Como  $4 \cdot 5 = 20 \equiv 1 \pmod{19}$ , temos

$$u \equiv -16 \equiv 3 \pmod{19}$$

Assim,  $u = 19v + 3$  e  $x = 62u + 7 = (62 \cdot 19)v + 62 \cdot 3 + 7$ . Tomando  $v = 0$ , obtemos  $x = 62 \cdot 3 + 7 = 193$ .

2. Calculando  $3^k \pmod{100}$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , obtemos

$$1, 3, 9, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 7, 21, 63, 89, 67, 1, \dots$$

donde  $3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ . Como  $2009 \equiv 9 \pmod{20}$ , concluímos que donde  $3^{2009} \equiv 3^9 \equiv 83 \pmod{100}$ .

3. Temos

$$12345 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$6789 \equiv 2 \pmod{11}$$

$$83180205 \equiv 9 \pmod{11}$$

mas  $3 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{11}$ . Logo a conta não está correta.

Por outro lado, temos

$$12345 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$6789 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$83180205 \equiv 0 \pmod{9}$$

e  $3 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{9}$ . Logo a prova dos nove não detecta o erro (que é uma mera transposição: o resultado correto é 83810205).